Bab 10: Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub

10.1 Kurva yang Didefinisikan oleh Persamaan Parametrik

1. Mengapa perlu persamaan parametrik?

Selama ini kurva di bidang kita nyatakan sebagai grafik fungsi $y = f(x)$, atau sebagai himpunan titik yang memenuhi relasi $F(x, y) = 0$. Cara ini punya dua keterbatasan. Pertama, banyak kurva yang gagal uji garis vertikal (misalnya lingkaran), sehingga tidak bisa ditulis sebagai satu fungsi $y = f(x)$. Kedua, persamaan $F(x, y) = 0$ hanya memberi tahu *titik mana saja* yang berada pada kurva, bukan *urutan* dan *arah* titik-titik itu dilalui.

Bayangkan sebuah partikel yang bergerak di bidang. Posisi horizontal dan vertikalnya masing-masing bergantung pada waktu t. Jika kita tuliskan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, kita mendapat deskripsi gerak yang lengkap: di mana partikel berada, kapan ia di sana, dan ke arah mana ia bergerak.

DEFINISI

Misalkan x dan y keduanya diberikan sebagai fungsi dari peubah ketiga t (disebut **parameter**):

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in I.$$

Setiap nilai t menentukan satu titik (x, y). Ketika t berubah, titik itu menggambar sebuah kurva C yang disebut **kurva parametrik**. Pasangan persamaan di atas disebut **persamaan parametrik**.

Parameter tidak harus berarti waktu, dan tidak harus bernama t. Dalam banyak soal geometri parameternya adalah sudut (sering θ). Namun dalam fisika dan teknik, t hampir selalu waktu, sehingga $(f(t), g(t))$ dibaca sebagai posisi partikel pada saat t.

2. Menggambar kurva parametrik dengan menandai titik

Cara paling dasar: buat tabel nilai t, hitung (x, y), tandai titik-titiknya, lalu hubungkan *menurut urutan t yang naik*. Jangan lupa memberi tanda panah arah.

CONTOH 1 — PARABOLA YANG DILALUI DENGAN KECEPATAN BERUBAH

Gambarlah kurva $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1$.

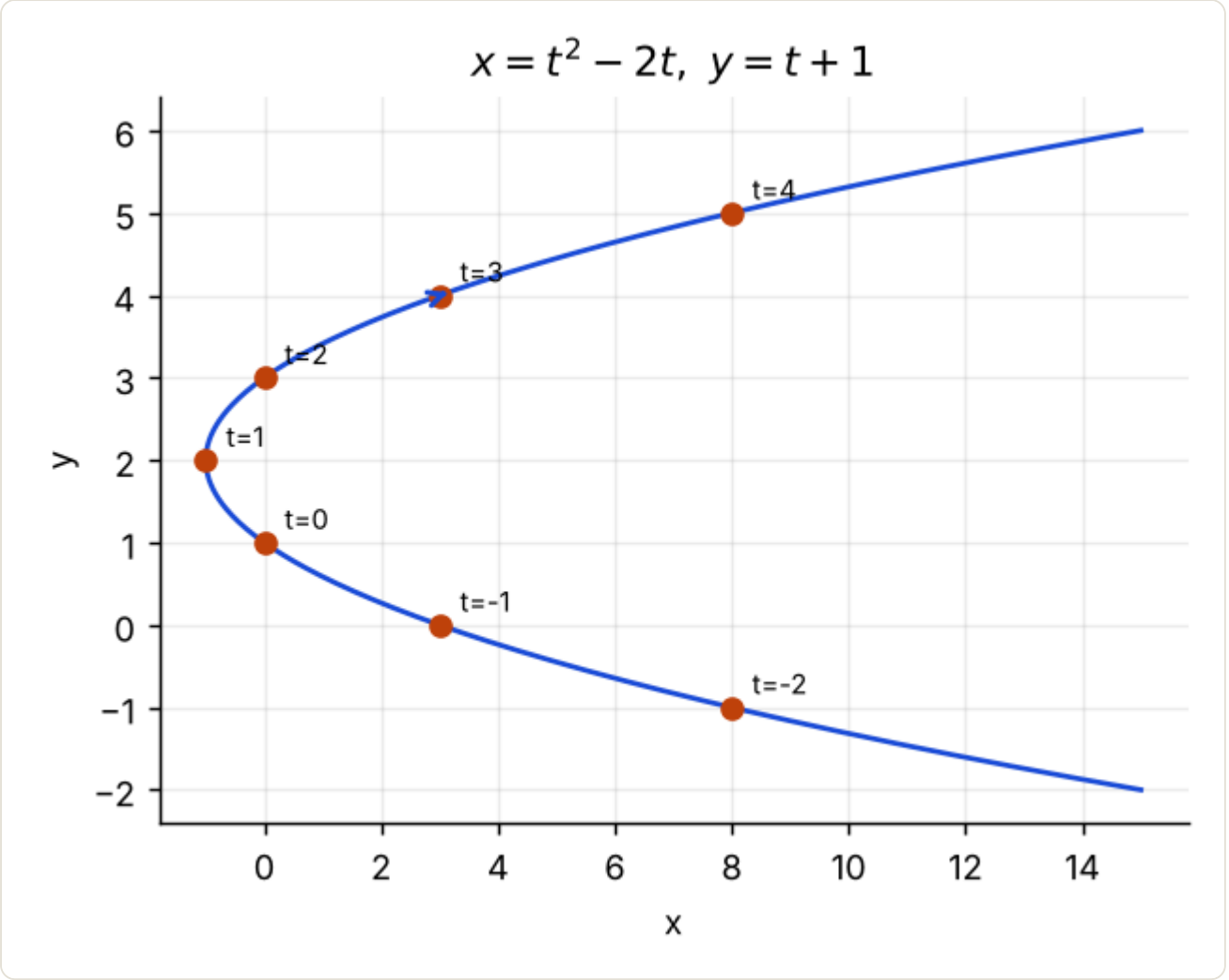
T	−2	−1	0	1	2	3	4
X	8	3	0	−1	0	3	8
Y	−1	0	1	2	3	4	5

Perhatikan bahwa $t = 0$ dan $t = 2$ memberi nilai x yang sama (0), tetapi y berbeda (1 dan 3). Titik-titiknya terlihat membentuk parabola yang terbuka ke kanan. Untuk membuktikannya, **hilangkan parameter**: dari $y = t + 1$ diperoleh $t = y - 1$. Substitusi ke persamaan pertama:

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3.$$

Jadi kurvanya adalah parabola $x = y^2 - 4y + 3$ dengan sumbu simetri horizontal.

Informasi tambahan yang tidak diberikan persamaan $x = y^2 - 4y + 3$: partikel bergerak ke arah t membesar, yaitu dari kanan-bawah, melewati titik puncak $(-1, 2)$ saat $t = 1$, lalu menuju kanan-atas. Titik-titik bernomor t yang berjarak waktu sama tidak berjarak sama pada kurva, karena partikel melambat mendekati puncak lalu mempercepat lagi.



Titik-titik pada $t = -2, \ldots, 4$ dan arah penelusuran.

Membatasi interval parameter

Bila parameter dibatasi pada interval tertutup $a \le t \le b$, kurva memiliki **titik awal** $(f(a), g(a))$ dan **titik akhir** $(f(b), g(b))$. Contoh: kurva di atas dengan $0 \le t \le 4$ hanya mencakup bagian parabola dari $(0, 1)$ sampai $(8, 5)$.

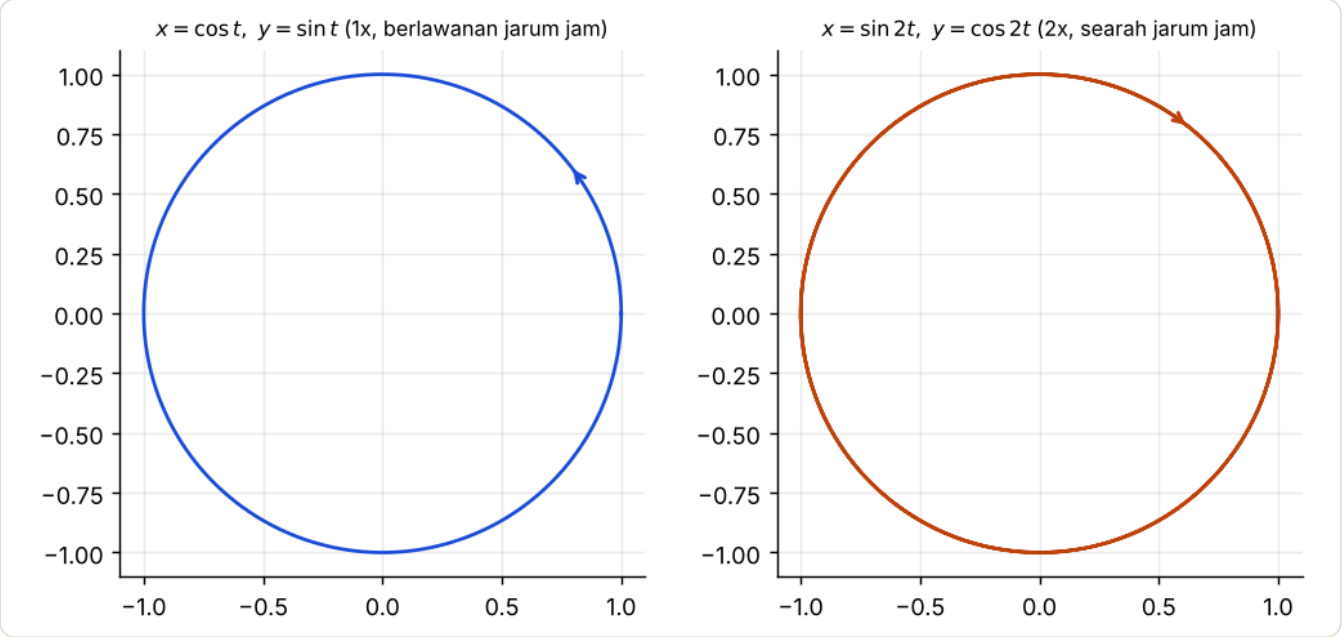
3. Kurva yang sama, parametrisasi berbeda

CONTOH 2 — LINGKARAN SATUAN, SATU KALI PUTARAN

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Karena $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, kita peroleh $x^2 + y^2 = 1$, yaitu lingkaran satuan. Di sini t adalah sudut (dalam radian) antara sumbu x positif dan ruas garis dari pusat ke titik. Saat t naik dari 0 ke 2π, titik bergerak *sekali* mengelilingi lingkaran *berlawanan arah jarum jam*, mulai dan berakhir di $(1, 0)$.

CONTOH 3 — LINGKARAN YANG SAMA, DUA KALI PUTARAN DAN ARAH BERLAWANAN

$x = \sin 2t,\ y = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Kembali $x^2 + y^2 = 1$, tetapi sekarang titik awalnya $(0, 1)$, arahnya searah jarum jam (karena x bertambah ketika y masih positif), dan karena argumen sudutnya $2t$, lingkaran dikelilingi *dua kali* selama t menempuh 0 sampai 2π.



Dua parametrisasi untuk himpunan titik yang sama.

CATATAN PENTING

Kurva sebagai *himpunan titik* tidak sama dengan *kurva parametrik*, yaitu himpunan titik beserta cara melaluinya. Contoh 2 dan 3 adalah dua kurva parametrik berbeda dengan himpunan titik yang sama. Perbedaan ini sangat berpengaruh nanti pada panjang kurva (Bagian 10.2): bila lingkaran dilalui dua kali, integral panjang akan memberi dua kali keliling.

CONTOH 4 — LINGKARAN UMUM

Untuk lingkaran berpusat (h, k) berjari-jari r: mula-mula kalikan parametrisasi lingkaran satuan dengan r sehingga diperoleh lingkaran berjari-jari r berpusat di titik asal, kemudian geser h satuan ke kanan dan k satuan ke atas:

$$x = h + r\cos t, \qquad y = k + r\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ diparametrisasi dengan cara serupa: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, sebab $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ langsung memberi persamaan elips.

CONTOH 5 — PARAMETRISASI YANG HANYA MENCAKUP SEBAGIAN GRAFIK

$x = \sin t,\ y = \sin^2 t$. Karena $y = x^2$, titik-titiknya berada pada parabola $y = x^2$. Namun $-1 \le \sin t \le 1$, sehingga hanya bagian $-1 \le x \le 1$ yang tercapai. Selain itu $\sin t$ periodik, maka titik bergerak bolak-balik tak hingga kali di antara $(-1, 1)$ dan $(1, 1)$. Pelajaran: setelah menghilangkan parameter, **selalu periksa daerah nilai x dan y** yang benar-benar dicapai oleh parametrisasi.

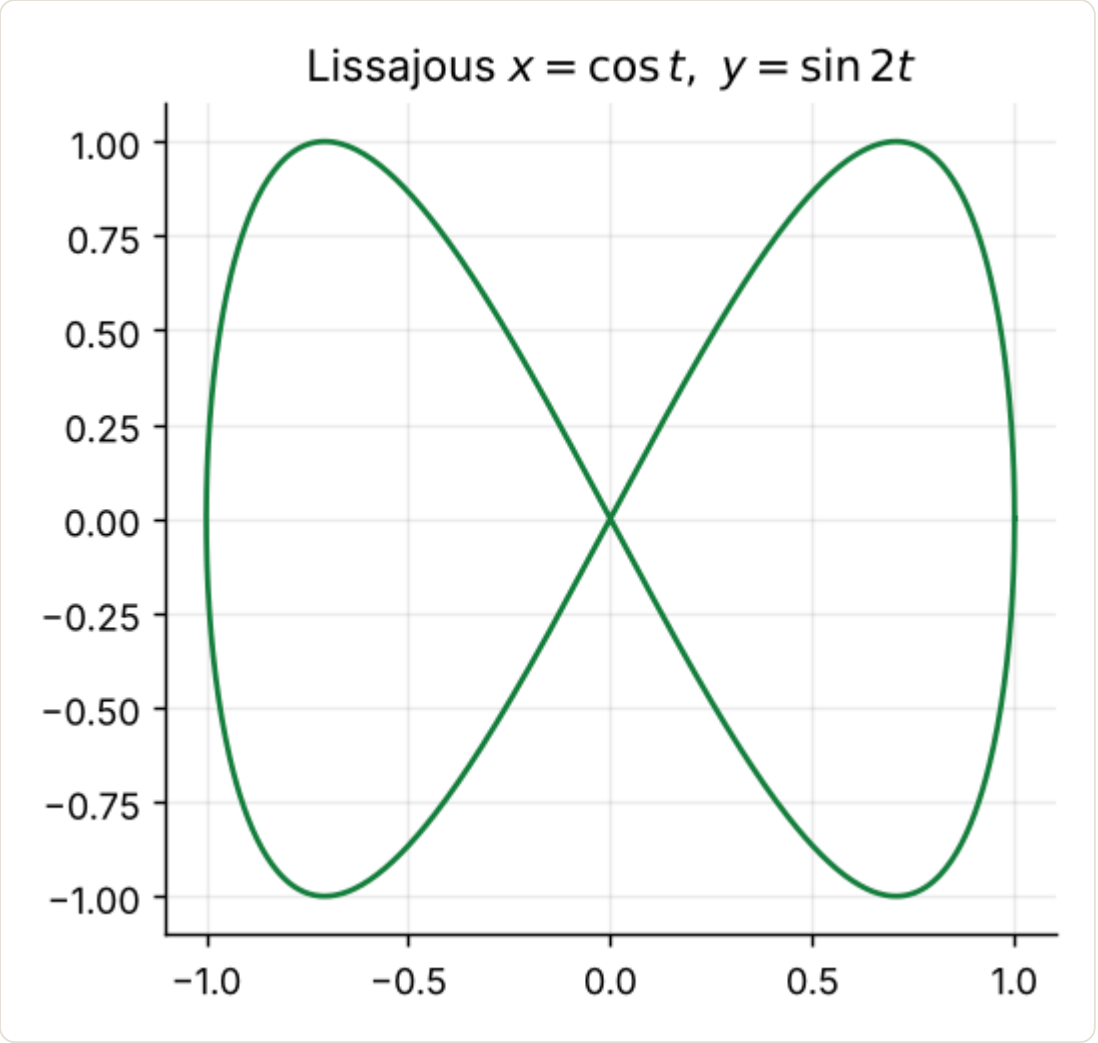
4. Menghilangkan parameter: kiat praktis

- **Persamaan linear dalam t**: selesaikan salah satu persamaan untuk t, substitusikan ke yang lain (hasilnya garis atau parabola, bergantung pangkatnya).
- **Memuat $\cos t, \sin t$**: gunakan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (lingkaran/elips). Bila memuat $\sec t, \tan t$, gunakan $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ (hiperbola).
- **Memuat e^t**: ingat $e^{2t} = (e^t)^2$ dan $e^{-t} = 1/e^t$; sering menghasilkan kurva rasional seperti $y = 1/x$.
- **Memuat $\cosh t, \sinh t$**: gunakan $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, cabang hiperbola.

Tidak semua parametrisasi bisa dihilangkan parameternya secara bersih. Sikloid (Bagian 5) adalah contohnya: persamaan Cartesiusnya sangat rumit, sedangkan bentuk parametriknya sederhana.

5. Menggambar dengan alat bantu grafik

Kalkulator grafik dan perangkat lunak (termasuk Python/matplotlib yang dipakai untuk gambar di situs ini) menggambar kurva parametrik dengan menghitung banyak titik dan menyambungnya secara berurutan. Parametrik juga memudahkan penggambaran relasi yang sulit diselesaikan untuk y. Misalnya $x = y^4 - 3y^2$: cukup tetapkan $y = t$ lalu $x = t^4 - 3t^2$; kita tidak perlu memecahkan y sebagai empat fungsi terpisah. Secara umum, kurva $x = h(y)$ dapat ditulis $x = h(t),\ y = t$, dan grafik $y = f(x)$ dapat ditulis $x = t,\ y = f(t)$.



Kurva Lissajous $x = \cos t,\ y = \sin 2t$: hasil dua gerak harmonik dengan frekuensi berbeda.

Kurva yang rumit seperti Lissajous $x = a\sin nt,\ y = b\cos t$ praktis mustahil digambar tangan; di sinilah komputer berguna. Kegunaan penting lain: *computer-aided design* (CAD) memakai kurva parametrik khusus, yaitu kurva Bézier, untuk mendefinisikan bentuk bodi mobil dan huruf pada printer laser.

6. Sikloid

DEFINISI

Sikloid adalah lintasan sebuah titik P pada keliling lingkaran yang menggelinding tanpa selip sepanjang garis lurus.

Menurunkan persamaannya

Misalkan lingkaran berjari-jari r menggelinding di sepanjang sumbu x, dan P awalnya di titik asal. Pilih parameter θ = sudut putar lingkaran (dalam radian) setelah menggelinding.

1. Karena tidak selip, panjang busur yang sudah menyentuh garis sama dengan jarak yang ditempuh: titik singgung berada di $x = r\theta$.
2. Maka pusat lingkaran ada di $C = (r\theta,\ r)$.
3. Posisi P relatif terhadap pusat: P telah berputar sebesar θ dari posisi terendahnya, sehingga selisih koordinatnya adalah $(-r\sin\theta,\ -r\cos\theta)$.

Dengan menjumlahkan,

$$\boxed{x = r(\theta - \sin\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta)}$$

Satu busur sikloid dihasilkan oleh satu putaran penuh, yaitu $0 \le \theta \le 2\pi$. Rumus ini juga berlaku untuk θ di luar interval itu (Latihan di buku meminta pembuktian untuk $\pi/2 < \theta < \pi$).



Sikloid dan posisi lingkaran pada $\theta = 2.2$.

Sejarah dan sifat menarik

- **Brakistokron**: dari semua kurva yang menghubungkan titik A ke titik B yang lebih rendah (tidak tepat di bawah A), kurva yang membuat partikel meluncur paling cepat di bawah gravitasi adalah busur sikloid terbalik (soal yang diajukan Johann Bernoulli tahun 1696).
- **Tautokron**: pada sikloid terbalik, waktu meluncur ke dasar tidak bergantung dari titik awal. Huygens memakai ini untuk merancang bandul jam yang periodenya tidak bergantung amplitudo.
- Galileo sudah mempelajarinya dan menyarankan bentuk sikloid untuk lengkung jembatan.

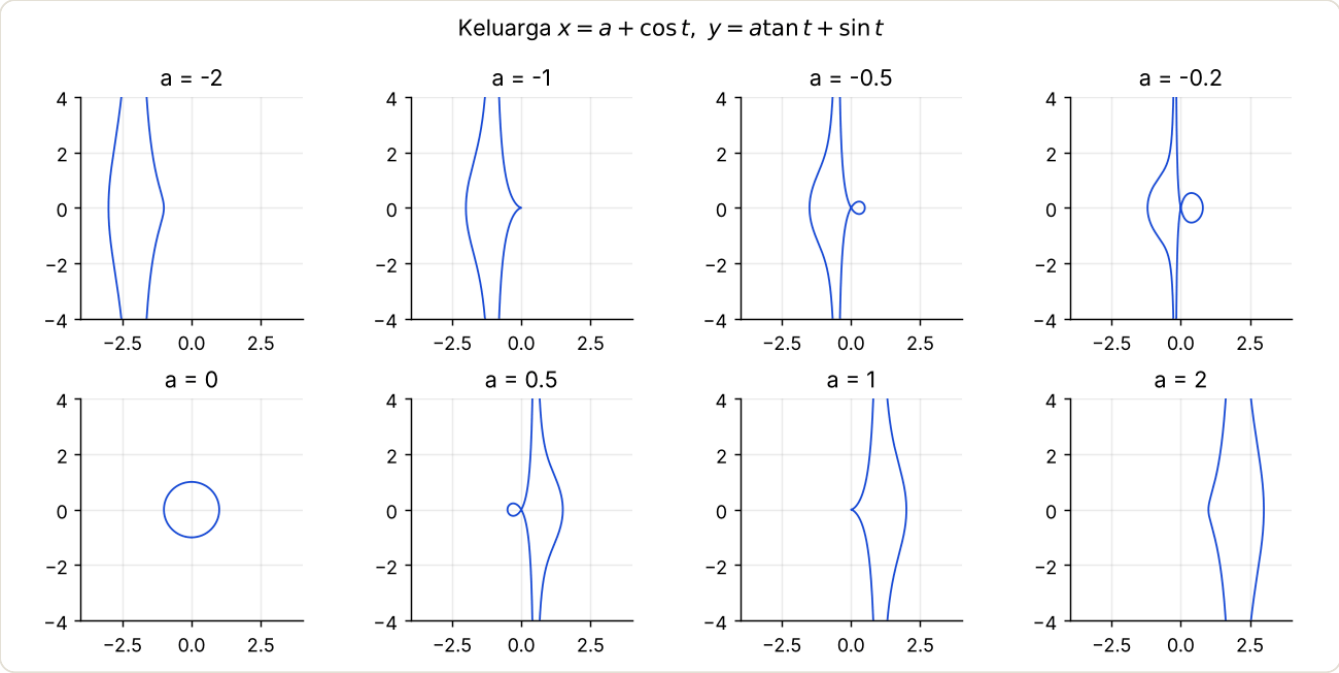
7. Keluarga kurva parametrik

Dengan mengubah konstanta dalam persamaan, kita mendapat *keluarga* kurva. Mengamati bagaimana bentuk berubah terhadap konstanta adalah latihan penting untuk intuisi.

CONTOH 6 — KONKOID NICOMEDES

Keluarga $x = a + \cos t,\ y = a\tan t + \sin t$. Hasil pengamatan dari grafik:

- Semua anggota (kecuali $a = 0$) memiliki dua cabang yang mendekati asimtot vertikal $x = a$.
- Untuk $|a| > 1$ kedua cabang mulus; makin besar $|a|$, makin kurang melengkung.
- Untuk $|a| = 1$, salah satu cabang punya *ujung runcing* (cusp).
- Untuk $0 < |a| < 1$, muncul *simpul* (loop) yang mengecil menjadi cusp saat $|a| \to 1$, dan membesar saat $a \to 0$.
- Untuk $a = 0$ kedua cabang menyatu menjadi lingkaran satuan (Contoh 2).
- Kurva dengan $a > 0$ adalah pencerminan terhadap sumbu y dari kurva dengan $-a$. Buktinya: ganti a dengan $-a$ dan t dengan $\pi - t$; karena $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\tan(\pi - t) = -\tan t$, dan $\sin(\pi - t) = \sin t$, titik (x, y) berubah menjadi $(-x, y)$.



Delapan anggota keluarga konkoid pada jendela $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

Nama "konkoid" berasal dari kemiripan cabang luar dengan cangkang kerang (*concha*).

8. Ringkasan teknik

Tujuan	Alat
Parametrisasi lingkaran/elips	$x = h + a\cos t,\ y = k + b\sin t$
Ruas garis dari (x_1, y_1) ke (x_2, y_2)	$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t,\ 0 \le t \le 1$
Grafik $y = f(x)$	$x = t,\ y = f(t)$
Sikloid jari-jari r	$x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$
Trokoid (titik pada jarak d dari pusat)	$x = r\theta - d\sin\theta,\ y = r - d\cos\theta$

Coba kalkulator Python pada menu atas untuk menghitung panjang dan luas kurva parametrik setelah Anda memahami bagian ini.

10.2 Kalkulus pada Kurva Parametrik

Setelah kita bisa menyatakan kurva secara parametrik, pertanyaan alaminya: bagaimana menghitung garis singgung, luas, panjang kurva, dan luas permukaan putar tanpa terlebih dahulu menghilangkan parameter? Jawabannya adalah menurunkan semua rumus yang sudah kita kenal ke dalam bahasa parameter t.

1. Garis singgung

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ keduanya terdiferensialkan, dan y juga terdiferensialkan sebagai fungsi x. Aturan rantai memberi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Jika $dx/dt \neq 0$, kita selesaikan untuk dy/dx:

RUMUS (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{bila } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Interpretasi fisis: dx/dt dan dy/dt adalah kecepatan horizontal dan vertikal partikel. Kemiringan garis singgung adalah rasio keduanya. Dari sini:

- **Tangen horizontal** terjadi bila $dy/dt = 0$ *dan* $dx/dt \neq 0$.
- **Tangen vertikal** terjadi bila $dx/dt = 0$ *dan* $dy/dt \neq 0$.
- Bila keduanya nol, belum bisa disimpulkan apa-apa; gunakan limit (misalnya aturan l'Hôpital) seperti pada sikloid di bawah.

Turunan kedua

Kecekungan ditentukan oleh d^2y/dx^2. Terapkan Rumus (1) pada fungsi dy/dx (bukan pada y):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

JEBAKAN YANG SANGAT SERING TERJADI

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$

Anda harus mendiferensialkan *hasil bagi* $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ terhadap t, baru dibagi lagi dengan dx/dt.

CONTOH 1 — KURVA YANG MEMOTONG DIRINYA SENDIRI

Kurva C: $x = t^2,\ y = t^3 - 3t$.

(a) Dua garis singgung di (3, 0). $y = t(t^2 - 3) = 0$ bila $t = 0$ atau $t = \pm\sqrt{3}$. Titik $(3, 0)$ memenuhi $x = t^2 = 3$, yaitu $t = \pm\sqrt{3}$: kurva melewati titik ini dua kali (memotong dirinya). Hitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}.$$

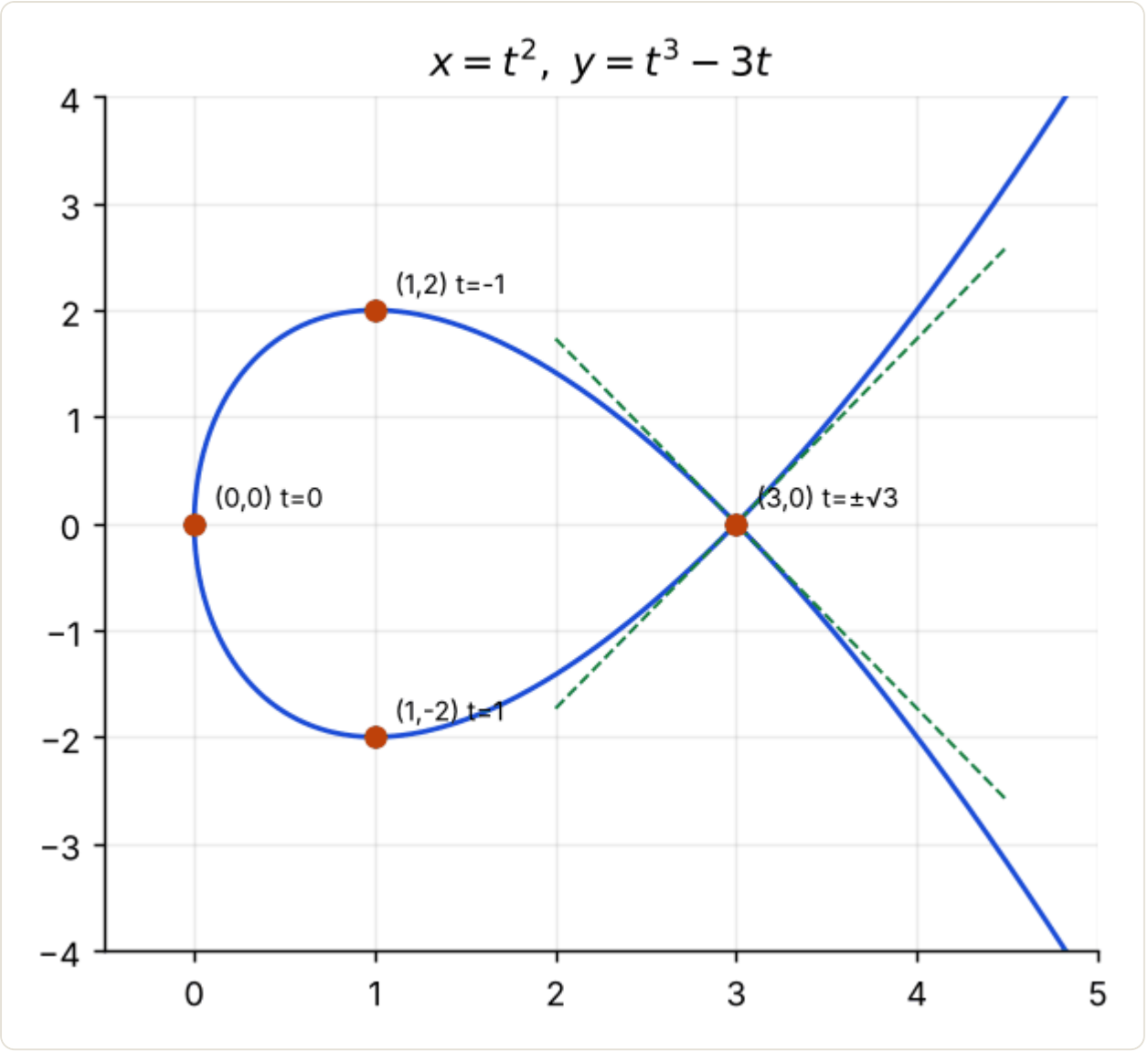
Untuk $t = \sqrt{3}$: kemiringan $= \dfrac{9 - 3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; untuk $t = -\sqrt{3}$: kemiringan $= -\sqrt{3}$. Maka garis singgungnya $y = \sqrt{3}\,(x - 3)$ dan $y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$.

(b) Tangen horizontal/vertikal. Horizontal: $dy/dt = 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ (di sini $dx/dt = 2t \neq 0$), titik $(1, -2)$ dan $(1, 2)$. Vertikal: $dx/dt = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ (di sini $dy/dt = -3 \neq 0$), titik $(0, 0)$.

(c) Kecekungan. Pertama $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t^2 - 3}{2t}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2t}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2t^2} = \dfrac{3(t^2 + 1)}{2t^2}$.
Dibagi $dx/dt = 2t$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}.$$

Positif (cekung ke atas) untuk $t > 0$; negatif (cekung ke bawah) untuk $t < 0$.



Simpul di $(3, 0)$ dengan dua garis singgungnya (putus-putus), tangen horizontal di $(1, \pm 2)$, tangen vertikal di titik asal.

CONTOH 2 — GARIS SINGGUNG SIKLOID

Sikloid $x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

Di $\theta = \pi/3$: $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1-\cos = \frac{1}{2}$, kemiringan $= \sqrt{3}$. Titiknya $\left(r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}),\ \frac{r}{2}\right)$, sehingga

$$y - \tfrac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \tfrac{\pi r}{3} + \tfrac{\sqrt{3}\,r}{2}\right) \implies y = \sqrt{3}\,x - \tfrac{\pi r}{\sqrt{3}} + \tfrac{3r}{2} + \tfrac{r}{2},$$

yaitu $\sqrt{3}\,x - y = r\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$.

Tangen horizontal: $\sin\theta = 0$ dan $1-\cos\theta \neq 0$, yaitu $\theta = (2n+1)\pi$ — titik puncak $((2n+1)\pi r,\ 2r)$.

Di $\theta = 2n\pi$ kedua turunan nol (ujung runcing di permukaan tanah). Dengan l'Hôpital,

$$\lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to 2n\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty,$$

jadi garis singgungnya vertikal pada titik-titik runcing itu.

2. Luas di bawah kurva parametrik

Luas di bawah $y = F(x)$ (≥ 0) dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $x = f(t),\ y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, maka substitusi $x = f(t),\ dx = f'(t)\,dt$ memberi

RUMUS (2)

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt \quad (\text{atau } \int_\beta^\alpha \text{ bila } f \text{ menurun}).$$

Batas t diambil dari kondisi: $x = a$ terjadi di salah satu ujung interval, $x = b$ di ujung lainnya. Bila kurva berjalan dari kanan ke kiri, urutan batasnya terbalik, sehingga hasil integral mungkin negatif; luas yang sebenarnya adalah nilai mutlaknya.

CONTOH 3 — LUAS SATU BUSUR SIKLOID

Satu busur: $0 \le \theta \le 2\pi$, $y = r(1-\cos\theta)$, $dx = r(1-\cos\theta)\,d\theta$.

$$A = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\, r(1-\cos\theta)\,d\theta = r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta.$$

Gunakan $\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$:

$$A = r^2\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{3}{2}-2\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

Luas ini **tiga kali luas lingkaran pembangkit** (πr^2). Galileo menebaknya; pembuktian pertama diberikan Roberval dan Torricelli.



CONTOH 4 — LUAS ELIPS

Elips $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. Separuh atas: $0 \le t \le \pi$, tetapi saat t naik x *menurun* dari a ke $-a$. Jadi luas separuh atas $= \int_{x=-a}^{a} y\,dx = \int_{t=\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = ab\cdot\tfrac{\pi}{2}$. Dua kali itu memberi luas elips $= \pi ab$.

3. Panjang busur

Untuk kurva $y = F(x)$ dengan F' kontinu, $L = \int_a^b \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $(f(t), g(t))$ dengan $f'(t) > 0$ (sehingga dari kiri ke kanan), maka dengan Rumus (1) dan substitusi

$dx = f'(t)dt$:

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{g'}{f'}\right)^2}\, f'\, dt = \int \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt.$$

TEOREMA (3)

Jika C diberikan oleh $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \le t \le \beta$, dengan f', g' kontinu dan C ditelusuri **tepat satu kali**, maka

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Mengapa rumus ini masuk akal

Bagi $[\alpha, \beta]$ menjadi n bagian sama panjang, hubungkan titik-titik $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ dengan poligon. Panjang tiap sisi $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Dengan Teorema Nilai Rata-rata, $\Delta x_i = f'(t_i^*)\Delta t$ dan $\Delta y_i = g'(t_i^{**})\Delta t$ untuk titik-titik t_i^*, t_i^{**} dalam subinterval yang sama. Jadi panjang poligon $= \sum \sqrt{f'(t_i^*)^2 + g'(t_i^{**})^2}\, \Delta t$, yang menyerupai jumlah Riemann dan menuju integral di atas bila $n \to \infty$ (kekontinuan f', g' menjamin t_i^* dan t_i^{**} boleh dianggap sama pada limitnya). Secara simbolik $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt$.

AWAS: TELUSURI SEKALI SAJA

Untuk $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$, integral memberi $\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$ (benar). Untuk $x = \sin 2t,\ y = \cos 2t$ pada interval yang sama integralnya $\int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$ — dua kali keliling, karena lingkaran dilalui dua kali. Integral selalu mengukur *jarak tempuh* partikel, bukan panjang himpunan titik.

CONTOH 5 — PANJANG SATU BUSUR SIKLOID

$\dfrac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta),\ \dfrac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$. Maka

$$\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = r\sqrt{2-2\cos\theta}.$$

Karena $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, kita peroleh $\sqrt{2-2\cos\theta} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2\left|\sin\tfrac{\theta}{2}\right| = 2\sin\tfrac{\theta}{2}$ untuk $0 \le \theta \le 2\pi$. Jadi

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\Big[-2\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2r(2+2) = 8r.$$

Panjang satu busur sikloid adalah **delapan kali jari-jari** lingkaran pembangkit (dibuktikan Christopher Wren tahun 1658).

4. Luas permukaan benda putar

Jika kurva $x = f(t),\ y = g(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, diputar mengelilingi sumbu x, dengan f', g' kontinu dan $g(t) \ge 0$, maka luas permukaannya

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int 2\pi y\,ds.$$

Jika diputar mengelilingi sumbu y (dengan $x \ge 0$), ganti y dengan x: $S = \int 2\pi x\,ds$. Idenya: setiap potongan busur ds menyapu pita sempit dengan keliling $2\pi y$ dan lebar ds.

CONTOH 6 — LUAS PERMUKAAN BOLA

Bola jari-jari r dihasilkan oleh pemutaran setengah lingkaran $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ 0 \le t \le \pi$ mengelilingi sumbu x. Karena $ds = r\,dt$,

$$S = \int_0^\pi 2\pi(r\sin t)\,r\,dt = 2\pi r^2\big[-\cos t\big]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

5. Ringkasan rumus

Besaran	Rumus parametrik
Kemiringan	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$
Turunan kedua	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{dx/dt}$
Luas	$\int y\,dx = \int g(t)f'(t)\,dt$
Panjang	$\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$
Luas permukaan (sumbu x)	$\int 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$

Anda dapat memeriksa Contoh 3 dan 5 secara numerik dengan kalkulator Python: pilih "Luas di bawah kurva parametrik" dengan $x(t) = t - \sin(t),\ y(t) = 1 - \cos(t)$, batas 0 sampai $2 * pi$ (hasil $3\pi \approx 9.4248$).

10.3 Koordinat Kutub

1. Sistem koordinat kutub

Koordinat Cartesius menyatakan titik lewat dua jarak berarah dari dua sumbu tegak lurus. Newton memperkenalkan cara lain yang jauh lebih alami untuk persoalan berpusat: lingkaran, spiral, orbit planet, gelombang yang merambat keluar dari sumber.

DEFINISI

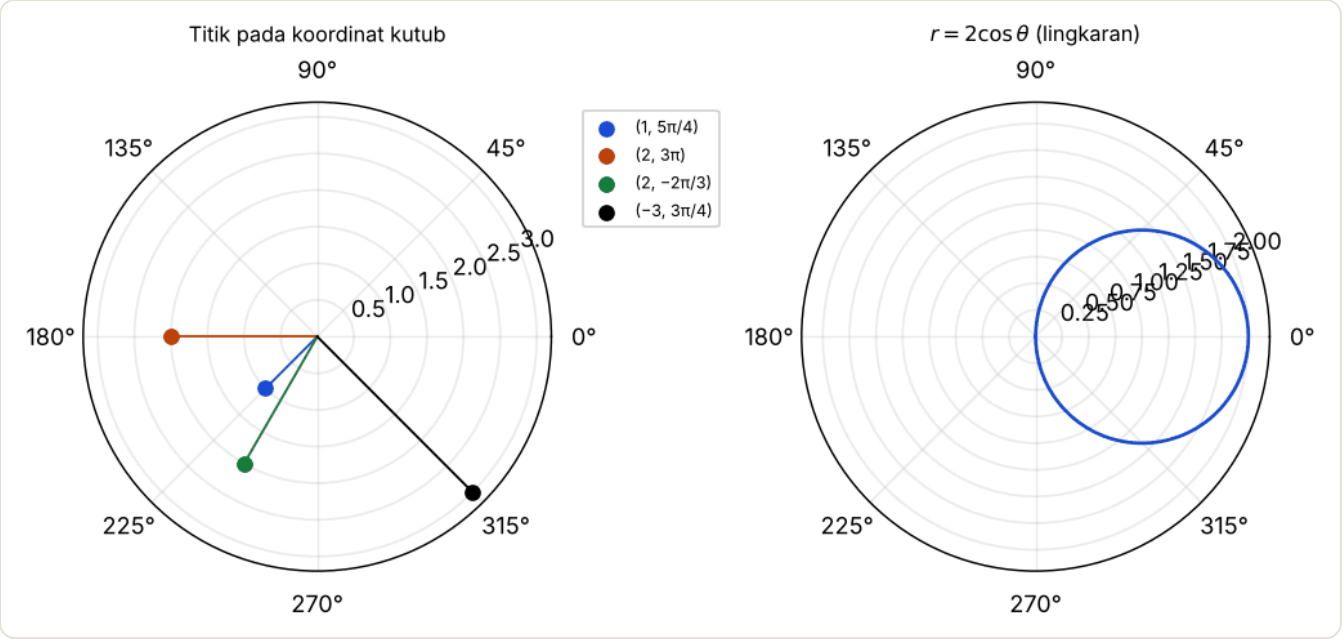
Pilih sebuah titik O (disebut **kutub** atau titik asal) dan sebuah sinar dari O (disebut **sumbu kutub**, biasanya digambar horizontal ke kanan, sehingga berimpit dengan sumbu x positif). Untuk titik P lain, misalkan r = jarak OP dan θ = sudut dari sumbu kutub ke garis OP (positif bila berlawanan arah jarum jam, negatif bila searah). Pasangan (r, θ) disebut **koordinat kutub** P. Kutub sendiri adalah $(0, \theta)$ untuk sembarang θ.

Memperluas ke r negatif

Kita sepakati bahwa $(-r, \theta)$ adalah titik yang terletak pada garis lurus yang sama melalui O dengan (r, θ), dengan jarak yang sama dari O, tetapi di sisi *berlawanan* dari kutub. Dengan kata lain, $(-r, \theta)$ dan $(r, \theta + \pi)$ adalah titik yang sama. Jadi $r < 0$ berarti "mundur" sejauh $|r|$ dari arah θ.

CONTOH 1 — MENGGAMBAR TITIK

(a) $(1, \frac{5\pi}{4})$: sudut di kuadran III, jarak 1. (b) $(2, 3\pi)$: 3π = satu setengah putaran, tepat arah negatif sumbu x; jarak 2 sehingga di $(-2, 0)$ Cartesius. (c) $(2, -\frac{2\pi}{3})$: berputar 120° searah jarum jam (kuadran III). (d) $(-3, \frac{3\pi}{4})$: sudut 135° ada di kuadran II, tetapi r negatif sehingga titik berada di sisi berlawanan, yaitu kuadran IV.



Keempat titik pada Contoh 1 (kiri), dan lingkaran $r = 2\cos\theta$ (kanan).

Satu titik, banyak representasi

Berbeda dengan Cartesius, setiap titik punya tak hingga banyak koordinat kutub. Titik (r, θ) juga dinyatakan oleh

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{dan} \quad (-r, \theta + (2n+1)\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Contoh: $(1, \frac{5\pi}{4}) = (1, -\frac{3\pi}{4}) = (1, \frac{13\pi}{4}) = (-1, \frac{\pi}{4})$. Konsekuensi: mencari titik potong dua kurva kutub memerlukan kehati-hatian ekstra (Bagian 10.4).

2. Hubungan dengan koordinat Cartesius

Letakkan kutub di titik asal dan sumbu kutub pada sumbu x positif. Dari segitiga siku-siku pada gambar standar:

RUMUS KONVERSI

$$(1) \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad\qquad (2) \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Persamaan (1) berlaku untuk semua r dan θ (termasuk $r < 0$).

CONTOH 2 — KUTUB KE CARTESIUS

$(2, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Jadi $(1, \sqrt{3})$.

CONTOH 3 — CARTESIUS KE KUTUB

Titik $(1, -1)$: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Dari $\tan\theta = -1$ ada dua sudut dalam $[0, 2\pi)$: $\frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4}$. Titik berada di kuadran IV, sehingga $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (atau $-\frac{\pi}{4}$). Satu jawaban: $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$; jawaban lain: $(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

CATATAN

Persamaan $\tan\theta = y/x$ tidak menentukan θ secara tunggal (nilai tangen berulang tiap π). Periksa kuadran yang benar, jangan hanya memakai $\arctan(y/x)$ mentah. Khusus $x = 0$, tangen tak terdefinisi: $\theta = \pm\pi/2$ sesuai tanda y.

3. Kurva kutub

Grafik persamaan kutub $r = f(\theta)$ (atau lebih umum $F(r, \theta) = 0$) terdiri atas semua titik yang *memiliki sedikitnya satu* representasi kutub yang memenuhi persamaan itu.

CONTOH 4 — $R = 2$ DAN $\Theta = 1$

$r = 2$: semua titik berjarak 2 dari kutub, yaitu lingkaran berpusat di O berjari-jari 2. Umumnya $r = a$ adalah lingkaran jari-jari $|a|$.
$\theta = 1$ (radian): semua titik dengan sudut 1, yaitu garis lurus melalui O yang membentuk sudut 1 radian dengan sumbu kutub; titik dengan $r > 0$ berada di kuadran I, yang $r < 0$ di kuadran III.

CONTOH 5 — $R = 2\,\mathrm{COS}\,\Theta$

Dengan tabel: $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ memberi $r = 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0$; bila θ dilanjutkan ke π, r negatif dan titiknya jatuh kembali pada lingkaran yang sama, jadi cukup $0 \le \theta \le \pi$.
Dengan konversi: kalikan kedua ruas dengan r: $r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$, lingkaran berpusat $(1, 0)$ berjari-jari 1.
Geometri: bila P pada lingkaran dan $Q = (2, 0)$ ujung diameter, sudut OPQ adalah sudut siku-siku (sudut keliling pada setengah lingkaran), sehingga $OP = OQ\cos\theta = 2\cos\theta$.

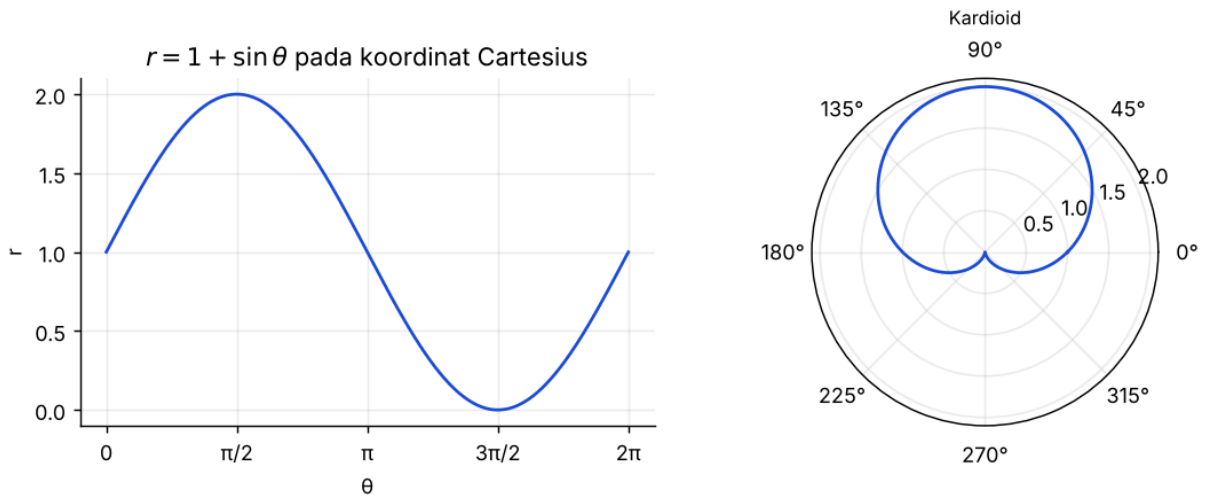
Membuat sketsa: baca dulu dari grafik Cartesius

Cara paling dapat diandalkan untuk kurva kutub tanpa komputer: gambar r terhadap θ pada koordinat Cartesius biasa, lalu "baca" bagaimana r naik/turun saat θ bergerak, dan terjemahkan menjadi gerak sepanjang sinar yang berputar.

CONTOH 6 — KARDIOID $R = 1 + \SIN \Theta$

- $\theta : 0 \to \pi/2$: r naik dari 1 ke 2.
- $\theta : \pi/2 \to \pi$: r turun dari 2 ke 1.
- $\theta : \pi \to 3\pi/2$: r turun dari 1 ke 0 (kurva kembali ke kutub dengan "ujung runcing").
- $\theta : 3\pi/2 \to 2\pi$: r naik dari 0 ke 1.

Bentuknya seperti hati (*kardia* = jantung), makanya disebut kardioid.



Kiri: r sebagai fungsi θ; kanan: kurva kutubnya.

CONTOH 7 — MAWAR BERDAUN EMPAT $R = \COS 2\Theta$

Pada $0 \le \theta \le \pi/4$, r turun dari 1 ke 0 (daun pertama di kuadran I). Pada $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$, r negatif dari 0 ke -1: titik berada di sisi berlawanan (kuadran III), sehingga daun kedua terbentuk di kuadran III, bukan II. Kelanjutan analog membentuk empat daun. Secara umum $r = \cos n\theta$ dan $r = \sin n\theta$ menghasilkan mawar berdaun n bila n ganjil dan $2n$ bila n genap.

4. Simetri

Bila persamaan tidak berubah jika…	maka kurva simetris terhadap…
$\theta \to -\theta$	sumbu kutub (sumbu x)
$r \to -r$, atau $\theta \to \theta + \pi$	kutub (putaran $180°$)
$\theta \to \pi - \theta$	garis $\theta = \pi/2$ (sumbu y)

Contoh: $r = 2\cos\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu kutub; $r = 1 + \sin\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu y (karena $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$); mawar $r = \cos 2\theta$ juga simetris terhadap kutub. Dengan simetri, cukup gambar sebagian lalu cerminkan.

5. Garis singgung kurva kutub

Untuk $r = f(\theta)$, jadikan θ parameter: $x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta$. Aturan perkalian dan rumus parametrik memberi

RUMUS (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}.$$

- Tangen horizontal: pembilang $= 0$ (penyebut $\neq 0$).
- Tangen vertikal: penyebut $= 0$ (pembilang $\neq 0$).
- **Di kutub** ($r = 0$) rumus menjadi $dy/dx = \tan\theta$ bila $dr/d\theta \neq 0$: garis singgung di kutub adalah garis $\theta = \theta_0$ di mana $r(\theta_0) = 0$. Misalnya pada $r = \cos 2\theta$, $r = 0$ di $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, jadi garis $y = x$ dan $y = -x$ menyinggung kurva di titik asal.

CONTOH 8 — KARDIOID $R = 1 + \mathrm{SIN}\,\Theta$

$dr/d\theta = \cos\theta$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin}$$

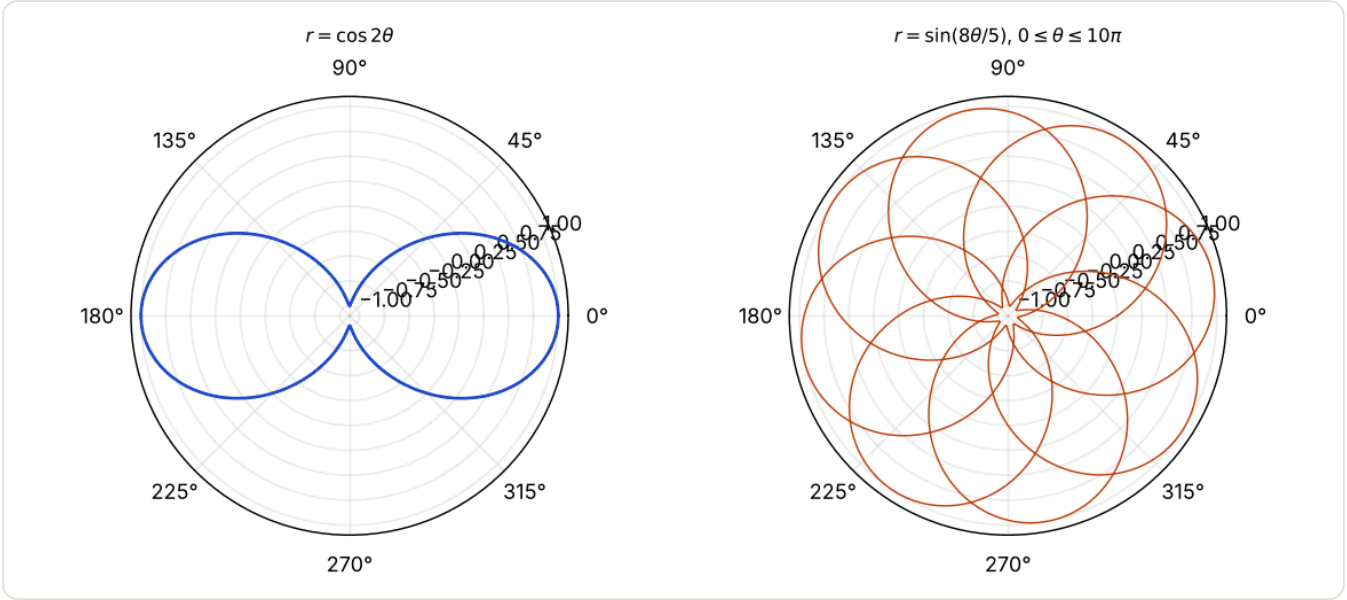
(a) Di $\theta = \pi/3$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pembilang $= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, penyebut $= (1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\sqrt{3})$. Setelah disederhanakan kemiringannya adalah -1 (perhitungannya: pembilang $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, penyebut $\frac{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, rasio $= -1$).
(b) Horizontal: pembilang nol, $\cos\theta = 0$ atau $1 + 2\sin\theta = 0$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; namun di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ penyebut juga nol (faktor $1+\sin\theta$), jadi nilai itu dikeluarkan dan ditinjau terpisah. Titik horizontal yang valid: $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, yaitu $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$. Vertikal: penyebut nol dari faktor $1 - 2\sin\theta$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, titik $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$ dan $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$. Di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (kutub) pembilang dan penyebut keduanya nol; dengan l'Hôpital limit $dy/dx \to \infty$, jadi ada garis singgung vertikal di kutub.

6. Menggambar dengan komputer

Bila alat tidak punya perintah kutub langsung, ubah ke parametrik: $x = f(t)\cos t,\ y = f(t)\sin t$. Tentukan dulu rentang t agar seluruh kurva tergambar.

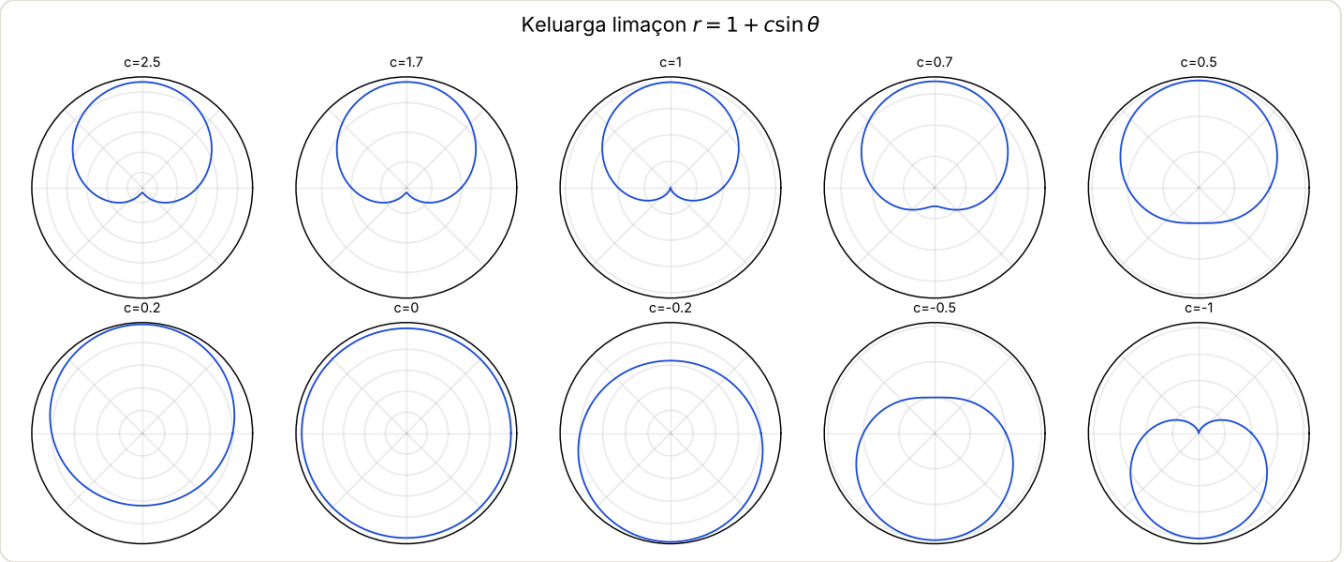
CONTOH 9 — $R = \mathrm{SIN}(8\Theta/5)$

Setelah n putaran penuh ($\theta \to \theta + 2n\pi$), nilai r menjadi $\sin\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right)$. Kurva mulai mengulang jika pergeseran sudut itu kelipatan 2π, yaitu $\frac{16n\pi}{5} = 2\pi k$, atau $\frac{8n}{5} = k$ bilangan bulat. Nilai n positif terkecil yang memenuhi adalah $n = 5$, sehingga cukup menggambar $0 \le \theta \le 10\pi$. Hasilnya mawar dengan 16 daun.



Keluarga limaçon $r = 1 + c\sin\theta$

- $c > 1$: ada simpul dalam yang mengecil saat $c \downarrow 1$.
- $c = 1$: kardioid.
- $\frac{1}{2} < c < 1$: ujung runcing kardioid melembut menjadi "lekukan" (dimple) di dekat kutub, yaitu di bagian bawah untuk $r = 1 + c\sin\theta$.
- $0 < c \le \frac{1}{2}$: bentuk oval yang makin bulat saat $c \to 0$.
- $c = 0$: lingkaran $r = 1$. Untuk $c < 0$ bentuknya adalah pencerminan terhadap sumbu horizontal.



Kata "limaçon" berarti siput (Prancis). Lintasan Mars dilihat dari Bumi dimodelkan oleh limaçon berloop.

Batas $c = \frac{1}{2}$ antara "berlekuk" dan "oval" dapat dibuktikan. Di titik bawah $\theta = \frac{3\pi}{2}$ kita punya $r = 1 - c$, $r' = 0$, $r'' = c$. Rumus kelengkungan kurva kutub (pembilang: $r^2 + 2r'^2 - rr''$) memberi pembilang $(1-c)^2 - (1-c)c = (1-c)(1-2c)$, yang berganti tanda tepat di $c = \frac{1}{2}$ (untuk $0 < c < 1$). Artinya di bawah $c = \frac{1}{2}$ kurva cembung di titik itu (oval), di atasnya cekung (lekukan).

10.4 Luas dan Panjang Kurva dalam Koordinat Kutub

1. Luas daerah kutub

Dasar dari semuanya adalah luas *juring* (sektor) lingkaran. Juring berjari-jari r dengan sudut pusat θ (radian) memiliki luas

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta, \tag{1}$$

karena luasnya sebanding dengan sudut pusat: $\dfrac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2$.

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah daerah yang dibatasi kurva $r = f(\theta)$ dan dua sinar $\theta = a$ dan $\theta = b$, dengan f kontinu dan positif serta $0 < b - a \le 2\pi$. Bagi $[a, b]$ menjadi n bagian sama lebar $\Delta\theta$. Sinar-sinar pembagi memecah $\mathcal{R}$ menjadi n irisan tipis. Irisan ke-i dihampiri juring berjari-jari $f(\theta_i^*)$ dan sudut $\Delta\theta$, maka luasnya $\approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$. Menjumlahkan lalu mengambil limit $n \to \infty$ menghasilkan integral:

RUMUS LUAS

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

Bayangkan sinar yang berputar dari $\theta = a$ ke $\theta = b$ menyapu daerah itu.

CONTOH 1 — SATU DAUN MAWAR $R = \COS 2\Theta$

Daun di sisi kanan disapu sinar dari $\theta = -\frac{\pi}{4}$ sampai $\frac{\pi}{4}$ (karena $r \ge 0$ di sana dan $r = 0$ di kedua ujungnya). Dengan simetri terhadap sumbu x:

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\,d\theta = \left[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]$$

Karena keempat daun kongruen, luas seluruh mawar $= 4 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Kerjakan juga dengan alat: kalkulator Python, pilih *Luas daerah kutub*, $r(t) = \cos(2 * t)$, batas $-pi/4$ sampai $pi/4$, hasil $\approx 0.3927 = \pi/8$.

CONTOH 2 — LUAS KARDIOID UTUH

$r = 1 + \sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta - 2\cos\theta + \tfrac{\theta}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}\cdot 3\pi = \tfrac{3}{2}$$

2. Luas di antara dua kurva kutub

Bila $\mathcal{R}$ dibatasi kurva dalam $r = g(\theta)$ dan kurva luar $r = f(\theta)$ untuk $a \le \theta \le b$ (dengan $f \ge g \ge 0$), luasnya adalah luas daerah luar dikurangi luas daerah dalam:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta.$$

CONTOH 3 — DI DALAM LINGKARAN, DI LUAR KARDIOID

Cari luas daerah di dalam $r = 3\sin\theta$ dan di luar $r = 1 + \sin\theta$.

Langkah 1: titik potong. $3\sin\theta = 1 + \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}$. Itulah batas a, b.

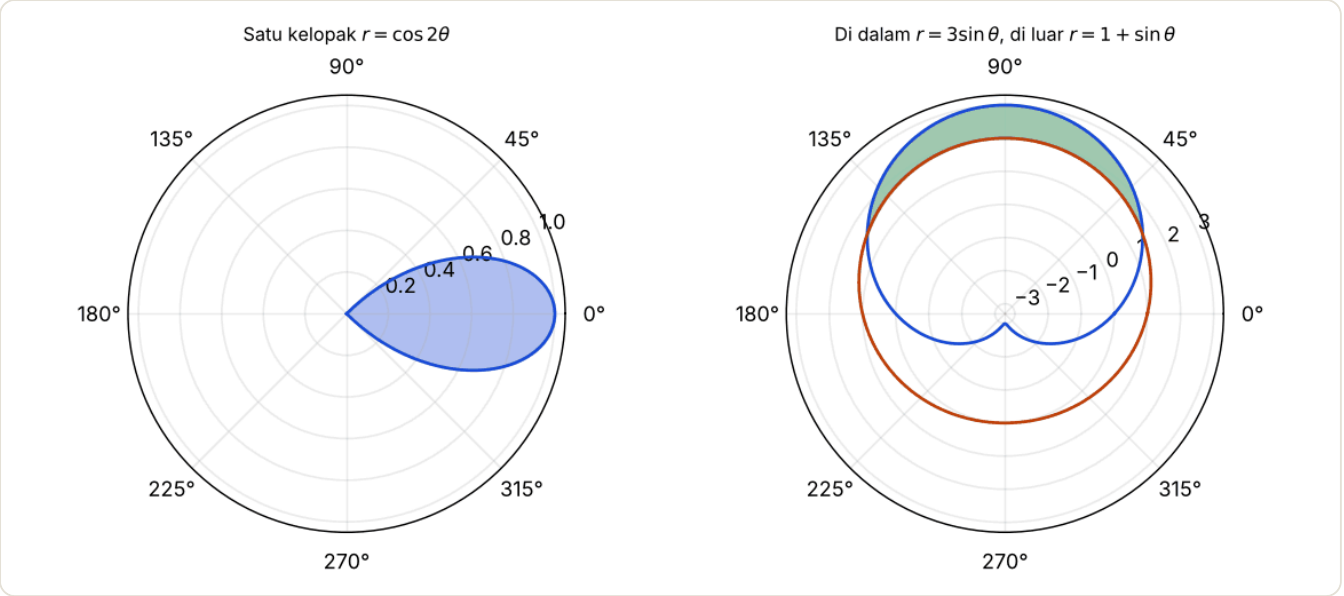
Langkah 2: integral. Pada $\tfrac{\pi}{6} \le \theta \le \tfrac{5\pi}{6}$, lingkaran adalah kurva luar. Karena daerah simetris terhadap sumbu y ($\theta = \pi/2$), hitung separuh lalu gandakan:

$$A = 2\cdot\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(9\sin^2\theta - (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\right) d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1)\, d\theta$$

Gunakan $\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$: integran menjadi $3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta$, sehingga

$$A = \left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(\tfrac{3\pi}{2} + 0\right) - \left(\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \pi.$$

(Perhatikan: di $\theta = \pi/6$, $-2\sin\tfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ dan $2\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, sehingga saling menghapus.) Luas $= \pi$.



Kiri: satu daun $r = \cos 2\theta$. Kanan: daerah di dalam lingkaran dan di luar kardioid pada Contoh 3.

PERINGATAN: TITIK POTONG KURVA KUTUB

Karena satu titik memiliki banyak representasi, menyelesaikan $f(\theta) = g(\theta)$ *tidak* selalu menemukan semua titik potong. Pada Contoh 3, lingkaran dan kardioid memotong di $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ dan $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ *dan juga di kutub*. Kutub tidak ditemukan dari penyelesaian persamaan karena kutub bukan (r, θ) yang sama untuk kedua kurva: lingkaran mencapai kutub di $\theta = 0, \pi$ ($3\sin\theta = 0$), sedangkan kardioid mencapainya di $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Pikirkan dua titik yang bergerak sepanjang kurva masing-masing saat θ naik: mereka tidak *bertabrakan* di kutub karena tiba pada waktu berbeda, tetapi kurvanya tetap berpotongan di sana.

Saran: selalu gambar kedua kurva (dengan komputer bila perlu), dan periksa kutub secara terpisah.

CONTOH 4 — SEMUA TITIK POTONG $R = \COS 2\Theta$ DAN $R = \frac{1}{2}$

Dari $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ diperoleh $2\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, jadi $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$: empat titik. Dari gambar ada empat titik lagi, yaitu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Titik-titik ini ditemukan lewat simetri, atau dengan menulis lingkaran sebagai $r = -\frac{1}{2}$ dan menyelesaikan $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Total delapan titik potong.

3. Panjang kurva kutub

Jadikan θ parameter: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, r = f(\theta)$. Turunkan:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

Kuadratkan dan jumlahkan; suku silang $\mp 2r\,\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta$ saling menghapus dan $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2.$$

Dengan rumus panjang kurva parametrik (Bagian 10.2) kita dapatkan

RUMUS PANJANG

$$L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

CONTOH 5 — KELILING KARDIOID

$r=1+\sin\theta$, $\dfrac{dr}{d\theta}=\cos\theta$:

$$r^2+r'^2=1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2+2\sin\theta.$$

Integral $\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\sin\theta}\,d\theta$ dapat dihitung dengan mengalikan dan membagi dengan $\sqrt{2-2\sin\theta}$, atau dengan identitas setengah-sudut ($1+\sin\theta=2\sin^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$). Hasilnya $L=8$. Periksa numerik di kalkulator Python (hasil ≈ 7.9999999).

CONTOH 6 — SPIRAL $R=\Theta$

Di sini $r=\theta$ dan $dr/d\theta=1$, jadi

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\Big[\tfrac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\big)\Big]_0^{\pi}=\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\pi$$

(Antiturunan $\int\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$ diperoleh dengan substitusi trigonometri $\theta=\tan u$.)

4. Luas permukaan benda putar (kurva kutub)

Jika kurva $r=f(\theta)$, $a\le\theta\le b$, diputar mengelilingi sumbu kutub (sumbu x), maka dengan $y=r\sin\theta$ dan elemen busur kutub di atas,

$$S=\int_a^b 2\pi\, r\sin\theta\,\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

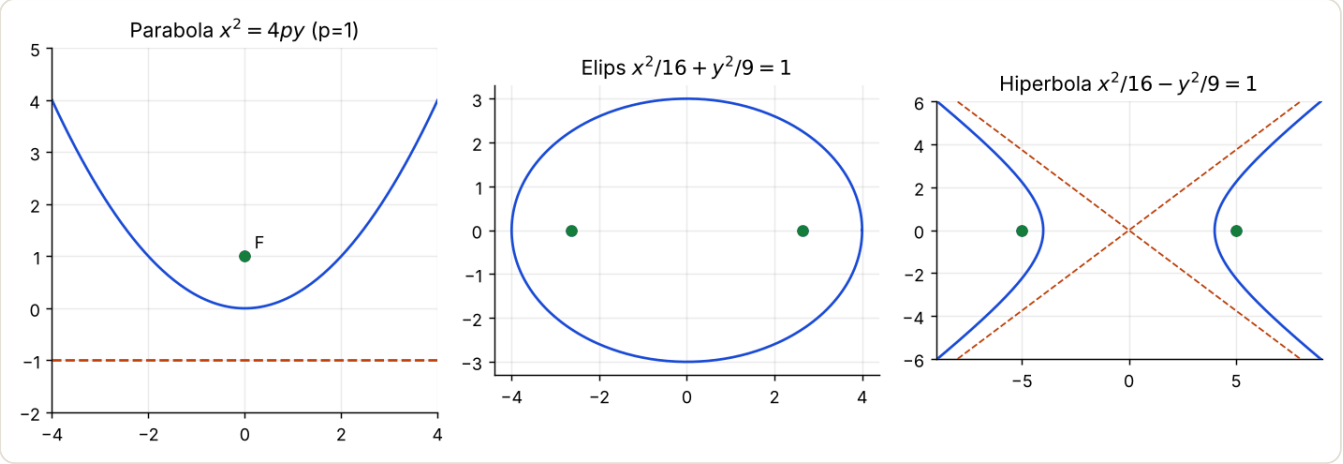
Untuk diputar mengelilingi sumbu y, ganti $\sin\theta$ dengan $\cos\theta$ (karena $x=r\cos\theta$).

5. Ringkasan

Besaran	Rumus
Luas daerah sampai kutub	$\frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta$
Luas antara dua kurva	$\frac{1}{2}\int_a^b (r_{luar}^2 - r_{dalam}^2)\,d\theta$
Panjang kurva	$\int_a^b \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$
Luas permukaan putar (sumbu kutub)	$\int_a^b 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$

10.5 Irisan Kerucut

Parabola, elips, dan hiperbola disebut **irisan kerucut** (*conic sections*) karena masing-masing adalah hasil perpotongan sebuah kerucut dengan sebuah bidang, dengan kemiringan bidang yang menentukan jenisnya. Dalam bagian ini kita memberi definisi geometris yang berdiri sendiri (tanpa kerucut) dan menurunkan persamaan bakunya.



Parabola, elips, dan hiperbola beserta fokusnya (titik hijau).

1. Parabola

DEFINISI

Parabola adalah himpunan titik di bidang yang berjarak sama dari sebuah titik tetap F (**fokus**) dan sebuah garis tetap (**direktriks**). Titik tengah antara fokus dan direktriks (pada garis tegak lurus direktriks melalui F) terletak pada parabola dan disebut **puncak**. Garis tegak lurus direktriks melalui fokus disebut **sumbu** parabola.

Menurunkan persamaan

Letakkan puncak di titik asal dan direktriks mendatar: fokus $F(0, p)$, direktriks $y = -p$. Titik $P(x, y)$ memenuhi $|PF| =$ jarak ke direktriks:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Kuadratkan: $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$, sehingga

PERSAMAAN BAKU

$$x^2 = 4py \quad (\text{fokus } (0,p),\ \text{direktriks } y=-p).$$

Terbuka ke atas bila $p>0$, ke bawah bila $p<0$. Bila x dan y ditukar: $y^2=4px$, fokus $(p,0)$, direktriks $x=-p$; terbuka ke kanan bila $p>0$, ke kiri bila $p<0$.

Ekivalen dengan $y=ax^2$ dengan $a=\dfrac{1}{4p}$.

CONTOH 1

Parabola $y^2+10x=0$. Tulis $y^2=-10x$, cocokkan dengan $y^2=4px$: $4p=-10 \Rightarrow p=-\frac{5}{2}$. Fokus $(-\frac{5}{2},0)$, direktriks $x=\frac{5}{2}$, terbuka ke kiri.

Parabola dipakai pada lampu depan mobil, teleskop pantul, dan jembatan gantung. Sifat pantulnya: sinar yang sejajar sumbu dipantulkan melewati fokus (dan sebaliknya).

2. Elips

DEFINISI

Elips adalah himpunan titik P yang jumlah jaraknya ke dua titik tetap F_1, F_2 (**fokus**) konstan: $|PF_1|+|PF_2|=2a$ (dengan $2a>|F_1F_2|$).

Hukum pertama Kepler: orbit planet berupa elips dengan Matahari di salah satu fokus.

Menurunkan persamaan

Letakkan fokus di $(\pm c,0)$. Syaratnya $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Pindahkan satu akar dan kuadratkan:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \;\Rightarrow\; x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2}$$

Sederhanakan: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. Kuadratkan lagi: $a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$, sehingga $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Dari segitiga F_1F_2P kita tahu $2c<2a$, jadi $a^2-c^2>0$; definisikan $b^2=a^2-c^2$. Pembagian dengan a^2b^2 memberi

PERSAMAAN BAKU ELIPS

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a\geq b>0, \quad c^2=a^2-b^2.$$

Fokus $(\pm c,0)$, titik puncak $(\pm a,0)$, sumbu mayor panjang $2a$ (sepanjang sumbu x), sumbu minor panjang $2b$ (titik $(0,\pm b)$). Bila fokus pada sumbu y: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, fokus $(0,\pm c)$, puncak $(0,\pm a)$.

Bila $c=0$ (dua fokus berimpit), $a=b$ dan elips menjadi lingkaran jari-jari a.

CONTOH 2 — DARI PERSAMAAN KE ELEMEN ELIPS

$9x^2+16y^2=144$. Bagi dengan 144: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $a=4,\ b=3$. $c^2=16-9=7$, fokus $(\pm\sqrt{7},0)$, puncak $(\pm 4,0)$, titik potong sumbu y: $(0,\pm 3)$.

CONTOH 3 — DARI ELEMEN KE PERSAMAAN

Fokus $(0,\pm 2)$, puncak $(0,\pm 3)$: fokus di sumbu y, $c=2,\ a=3, b^2=9-4=5$. Persamaan $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$, atau $9x^2+5y^2=45$.

Sifat pantul: cahaya atau bunyi dari satu fokus dipantulkan ke fokus lain. Prinsip ini dipakai pada litotripsi (penghancur batu ginjal dengan gelombang kejut) dan pada *whispering gallery*.

3. Hiperbola

DEFINISI

Hiperbola adalah himpunan titik P yang *selisih* jaraknya ke dua fokus F_1, F_2 konstan: $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$.

Turunannya paralel dengan elips (dengan selisih menggantikan jumlah, dan $c>a$): dengan fokus $(\pm c,0)$ dan $b^2=c^2-a^2$,

PERSAMAAN BAKU HIPERBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

Titik puncak $(\pm a, 0)$, fokus $(\pm c, 0)$, asimtot $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Tidak ada titik potong sumbu y (karena $-y^2/b^2 = 1$ mustahil). Hiperbola memiliki dua cabang, $x \geq a$ dan $x \leq -a$. Bila fokus pada sumbu y: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, fokus $(0, \pm c)$, asimtot $y = \pm \dfrac{a}{b} x$.

Cara menggambar: gambar dulu persegi panjang dengan sisi $2a$ dan $2b$ berpusat di titik pusat, tarik diagonalnya sebagai asimtot, lalu lukis cabang yang bersinggungan dengan puncak dan mendekati asimtot.

CONTOH 4

$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. $a = 4,\ b = 3,\ c = 5$. Fokus $(\pm 5, 0)$, puncak $(\pm 4, 0)$, asimtot $y = \pm \frac{3}{4} x$.

CONTOH 5

Puncak $(0, \pm 1)$, asimtot $y = \pm 2x$. Fokus pada sumbu y, $a = 1$; asimtot $y = \pm \frac{a}{b} x \Rightarrow \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. $c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, fokus $(0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$; persamaan $y^2 - 4x^2 = 1$.

Hiperbola muncul dalam hukum Boyle, hukum Ohm, kurva penawaran dan permintaan, dan sistem navigasi LORAN (stasiun radio di titik A, B; selisih waktu tiba sinyal $\Rightarrow$ selisih jarak $\Rightarrow$ kapal berada pada satu cabang hiperbola dengan fokus A, B).

4. Irisan kerucut yang digeser

Untuk menggeser pusat/puncak ke (h, k), ganti x dengan $x - h$ dan y dengan $y - k$ pada semua persamaan baku (lihat Lampiran C buku).

CONTOH 6 — ELIPS DARI FOKUS DAN PUNCAK

Fokus $(-1, 2), (5, 2)$, puncak $(-2, 2), (6, 2)$. Pusat adalah titik tengah: $(2, 2)$. Panjang sumbu mayor $= 8 \Rightarrow a = 4$; jarak fokus $= 6 \Rightarrow c = 3$; $b^2 = 16 - 9 = 7$. Persamaan:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1.$$

CONTOH 7 — MELENGKAPKAN KUADRAT

$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$. Kelompokkan: $9(x^2 - 8x) - 4(y^2 - 2y) = -176$. Lengkapkan kuadrat: $9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 = -176 + 144 - 4 = -36$. Bagi dengan -36 :

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1.$$

Hiperbola dengan fokus pada garis vertikal $x = 4$: $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13}$, pusat $(4, 1)$; puncak $(4, 4), (4, -2)$; fokus $(4, 1 \pm \sqrt{13})$; asimtot $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$.

5. Pendekatan numerik untuk keliling elips

Keliling elips $x = a\sin\theta,\ y = b\cos\theta$ adalah integral eliptik $L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta$ dengan $e = c/a$ — tidak punya antiturunan elementer. Gunakan integral numerik (Simpson). Dengan kalkulator Python: panjang kurva parametrik $x = 3\cos(t),\ y = 2\sin(t)$, 0 sampai $2 * pi$, memberi ≈ 15.865.

6. Ringkasan

	Parabola	Elips	Hiperbola
Definisi	$\lvert PF\rvert = d(P, \ell)$	$\lvert PF_1\rvert + \lvert PF_2\rvert = 2a$	$\lvert\lvert PF_1\rvert - \lvert PF_2\rvert\rvert = 2a$
Persamaan baku	$x^2 = 4py$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hubungan	—	$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$
Eksentrisitas e	1	$c/a < 1$	$c/a > 1$

10.6 Irisan Kerucut dalam Koordinat Kutub

Pada subbab sebelumnya parabola didefinisikan lewat fokus dan direktriks, sedangkan elips dan hiperbola lewat dua fokus. Di sini ketiganya disatukan dalam satu definisi tunggal berbasis *satu fokus, satu direktriks, dan satu bilangan* (eksentrisitas). Bila fokus diletakkan di kutub, hasilnya adalah persamaan kutub yang sangat sederhana dan sangat cocok untuk gerak planet, satelit, dan komet.

1. Teorema fokus–direktriks

TEOREMA

Misalkan F titik tetap (fokus), ℓ garis tetap (direktriks), dan $e > 0$ bilangan tetap (**eksentrisitas**). Himpunan semua titik P yang memenuhi

$$\frac{|PF|}{|P\ell|} = e$$

(rasio jarak ke fokus terhadap jarak ke direktriks sama dengan e) adalah irisan kerucut:

- elips bila $e < 1$,
- parabola bila $e = 1$,
- hiperbola bila $e > 1$.

Bukti

Untuk $e = 1$, syarat itu menjadi $|PF| = |P\ell|$, yaitu definisi parabola.

Umumnya, letakkan F di titik asal dan direktriks ℓ pada garis $x = d$ ($d > 0$), tegak lurus sumbu kutub. Untuk $P(r, \theta)$: $|PF| = r$ dan $|P\ell| = d - r\cos\theta$. Syarat $|PF| = e|P\ell|$ menjadi

$$r = e\,(d - r\cos\theta). \tag{2}$$

Kuadratkan dan konversi ke Cartesius ($r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$): $x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2d^2 - 2e^2dx + e^2x^2$, yaitu

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2.$$

Bila $e \neq 1$, lengkapkan kuadrat untuk x:

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 \Big/ \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1. \tag{3}$$

Untuk $e < 1$ penyebut kedua positif: persamaan elips dengan pusat $(h, 0)$, $h = -\dfrac{e^2 d}{1-e^2}$ dan

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}.$$

Maka $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{e^4 d^2}{(1-e^2)^2}$, sehingga $c = \dfrac{e^2 d}{1-e^2} = |h|$: fokus (titik asal) berjarak c dari pusat — sesuai fokus elips pada Bagian 10.5. Selain itu $\dfrac{c}{a} = e$, yaitu **eksentrisitas elips** $= c/a$. Untuk $e > 1$, penyebut kedua negatif dan (3) adalah persamaan hiperbola dengan $e = c/a$ pula. ■

2. Persamaan kutub irisan kerucut

Dari (2): $r + er\cos\theta = ed$, sehingga $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$. Letak direktriks yang lain memberi variasi tanda dan fungsi:

TEOREMA (PERSAMAAN KUTUB KONIK)

Persamaan kutub berbentuk

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{atau} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$$

adalah irisan kerucut dengan eksentrisitas e dan fokus di kutub.

BENTUK	DIREKTRIKS
$R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$	$X = D$ **(DI KANAN FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$	$X = -D$ **(DI KIRI FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$	$Y = D$ **(DI ATAS FOKUS)**
$R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$	$Y = -D$ **(DI BAWAH FOKUS)**

Untuk menurunkan versi lain, ulangi derivasi tadi dengan jarak ke direktriks yang sesuai, mis. direktriks $y = d$: $|P\ell| = d - r\sin\theta$, menghasilkan $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$.

CONTOH 1 — PARABOLA

Fokus di titik asal, direktriks $y = -6$. Direktriks di bawah fokus: bentuk $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$, $e = 1,\ d = 6$: $r = \dfrac{6}{1 - \sin\theta}$.

CONTOH 2 — MENGENALI KONIK DARI PERSAMAAN

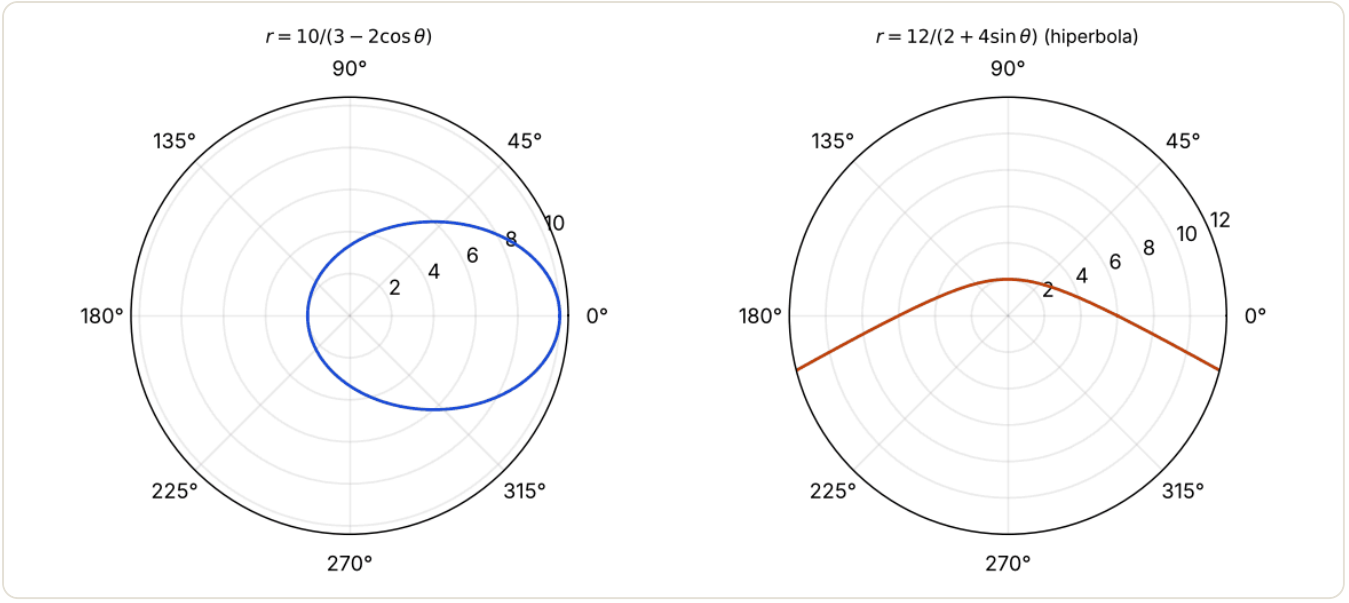
$r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$. Bagi pembilang dan penyebut dengan 3 agar penyebut berbentuk $1 \pm e\cos\theta$:

$$r = \frac{10/3}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}.$$

Jadi $e = \frac{2}{3} < 1$: elips; $ed = \frac{10}{3} \Rightarrow d = 5$; direktriks $x = -5$ (tanda minus). Puncak: $\theta = 0 \to r = 10$, titik $(10, 0)$; $\theta = \pi \to r = 2$, titik $(-2, 0)$ Cartesius. Panjang sumbu mayor $= 10 + 2 = 12$, $a = 6$; cek $e = c/a$ dengan $c = \frac{12}{2} - 2 = 4$: $4/6 = \frac{2}{3}$ ✓.

CONTOH 3 — HIPERBOLA

$r = \dfrac{12}{2 + 4\sin\theta} = \dfrac{6}{1 + 2\sin\theta}$: $e = 2 > 1$ hiperbola, $ed = 6 \Rightarrow d = 3$, direktriks $y = 3$. Puncak muncul di $\theta = \frac{\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{3} = 2$, yaitu titik $(0, 2)$; dan di $\theta = \frac{3\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{1-2} = -6$, yaitu titik kutub $(-6, \frac{3\pi}{2}) = (6, \frac{\pi}{2})$, atau $(0, 6)$ di Cartesius. Jadi dua puncaknya $(0, 2)$ dan $(0, 6)$; pusat hiperbola $(0, 4)$, $a = 2$, dan fokus (titik asal) berjarak $c = 4$ dari pusat sehingga $e = c/a = 2$ ✓. Asimtot sejajar sinar $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (nilai θ yang membuat $1 + 2\sin\theta = 0$).

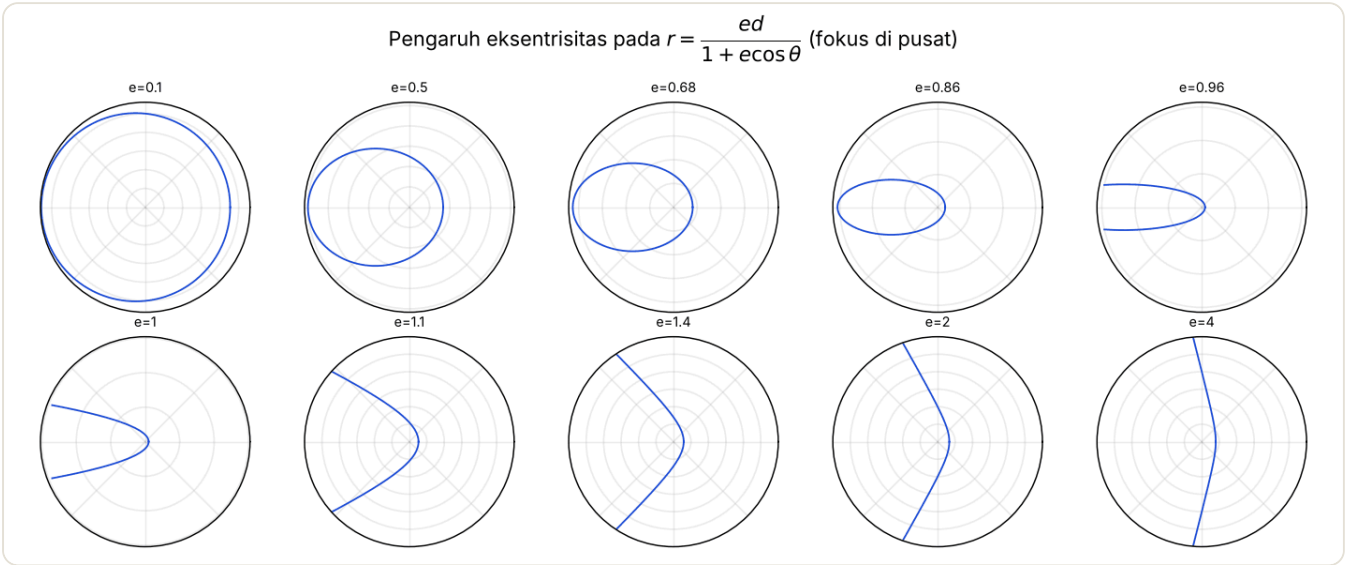


Memutar konik

Grafik $r = f(\theta - \alpha)$ adalah grafik $r = f(\theta)$ yang diputar berlawanan arah jarum jam sebesar α terhadap titik asal. Jadi elips Contoh 2 yang diputar $\frac{\pi}{4}$ adalah $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$, berputar di sekitar fokus kirinya. Bandingkan dengan persamaan Cartesius yang akan sangat panjang.

Pengaruh eksentrisitas

Untuk e mendekati 0, elips hampir lingkaran. Saat $e \to 1^-$ elips makin memanjang, lalu pada $e = 1$ menjadi parabola dan untuk $e > 1$ menjadi hiperbola yang cabangnya makin "lancip" (makin lurus) seiring e membesar.



3. Hukum Kepler

TIGA HUKUM KEPLER (1609, 1619)

1. Planet mengitari Matahari dalam orbit elips dengan Matahari di salah satu fokus.
2. Garis yang menghubungkan Matahari dan planet menyapu luas yang sama dalam waktu yang sama.
3. Kuadrat periode revolusi sebanding dengan pangkat tiga panjang sumbu mayor orbit.

Hukum-hukum ini juga berlaku untuk bulan, komet, dan satelit buatan yang dipengaruhi satu gaya gravitasi pusat. Pada Bab 13.4 hukum-hukum ini akan diturunkan dari hukum Newton.

Persamaan orbit dengan a dan e

Dalam astronomi lebih mudah memakai sumbu semimayor a dan eksentrisitas e. Dari $a^2 = \dfrac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$ diperoleh $ed = a(1-e^2)$, jadi persamaan orbit (Matahari di kutub, direktriks $x = d$):

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}}$$

Titik terdekat (**perihelion**) saat $\theta = 0$: $r_{\min} = a(1-e)$. Titik terjauh (**aphelion**) saat $\theta = \pi$: $r_{\max} = a(1+e)$. (Karena $\dfrac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e)$ dan $\dfrac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e)$.)

CONTOH 4 — ORBIT BUMI

$e \approx 0.017$, panjang sumbu mayor $2a \approx 2.99 \times 10^8$ km, jadi $a \approx 1.495 \times 10^8$ km. Persamaan orbit:

$$r = \frac{1.495 \times 10^8 (1 - 0.017^2)}{1 + 0.017\cos\theta} \approx \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017\cos\theta}.$$

Perihelion: $a(1-e) \approx 1.47 \times 10^8$ km. Aphelion: $a(1+e) \approx 1.52 \times 10^8$ km. Selisihnya hanya sekitar 3%, sehingga orbit Bumi hampir lingkaran.

CONTOH 5 — JARAK APHELION MERKURIUS

Bila $e = 0.206$ dan jarak minimum 4.6×10^7 km, maka $a(1-e) = 4.6 \times 10^7 \Rightarrow a = \dfrac{4.6 \times 10^7}{0.794} \approx 5.79 \times 10^7$ km, dan jarak maksimum $a(1+e) \approx 5.79 \times 10^7 \times 1.206 \approx 6.99 \times 10^7$ km.

CONTOH 6 — EKSENTRISITAS DARI DATA JARAK

Perihelion dan aphelion Pluto: 4.43×10^9 dan 7.37×10^9 km. Dari $\dfrac{r_{\max}}{r_{\min}} = \dfrac{1+e}{1-e} = \dfrac{7.37}{4.43} \approx 1.664$: $1 + e = 1.664 - 1.664e \Rightarrow e = \dfrac{0.664}{2.664} \approx 0.249$.

4. Ringkasan

- Satu definisi menyatukan tiga konik: $|PF|/|P\ell| = e$.
- Persamaan kutub dengan fokus di kutub: $r = \dfrac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ atau $\dfrac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$.
- Untuk orbit elips: $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$; perihelion $a(1-e)$, aphelion $a(1+e)$.
- Rotasi sebesar α: ganti θ dengan $\theta - \alpha$.

Dengan ini Bab 10 selesai. Lanjut ke Bab 11.1 — Barisan.

Bab 11: Barisan dan Deret Tak Hingga

11.1 Barisan

1. Apa itu barisan?

Barisan adalah daftar bilangan yang ditulis dalam urutan tertentu:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

a_1 disebut suku pertama, a_2 suku kedua, dan secara umum a_n adalah suku ke-n. Kita hanya membahas barisan *tak hingga*: setiap suku a_n memiliki penerus a_{n+1}.

Karena untuk tiap bilangan bulat positif n ada tepat satu bilangan a_n, barisan sama saja dengan **fungsi** dengan daerah asal bilangan bulat positif; kita menulis a_n sebagai pengganti $f(n)$. Notasi barisan: $\{a_n\}$ atau $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Indeks tidak harus mulai dari 1; misalnya $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$.

CONTOH 1 — TIGA CARA MENYEBUT BARISAN

NOTASI	RUMUS SUKU KE-N	SUKU-SUKU
$\left\{\dfrac{N}{N+1}\right\}$	$A_N = \dfrac{N}{N+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
$\left\{\dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}\right\}$	$A_N = \dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}$	$-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$
$\{\sqrt{N-3}\}_{N=3}^{\infty}$	$A_N = \sqrt{N-3}$	$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
$\{\cos \frac{N\pi}{6}\}_{N=0}^{\infty}$	$A_N = \cos \frac{N\pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots$

Mencari rumus dari pola

CONTOH 2

Cari rumus suku ke-n dari $\frac{3}{5},\ -\frac{4}{25},\ \frac{5}{125},\ -\frac{6}{625},\ \frac{7}{3125},\dots$

- Pembilang: 3, 4, 5, 6, 7, … naik 1 mulai dari 3, jadi $n+2$.
- Penyebut: pangkat 5, yaitu 5^n.
- Tanda: positif untuk $n=1$, lalu bergantian, sehingga faktor $(-1)^{n-1}$ (atau $-(-1)^n$).

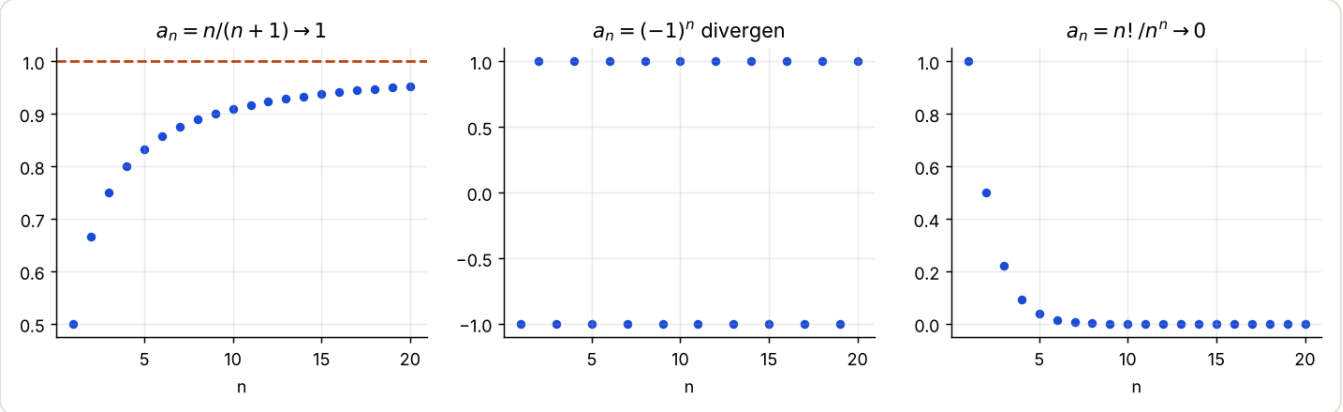
Jawab: $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{5^n}$.

Barisan yang tidak punya rumus sederhana

- p_n = populasi dunia pada 1 Januari tahun ke-n.
- a_n = angka desimal ke-n dari bilangan $e = 2.7182818\dots$; barisannya terdefinisi dengan baik: $7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \dots$
- **Barisan Fibonacci**, didefinisikan *rekursif*: $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 3)$, menghasilkan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Muncul dari soal pembiakan kelinci oleh Fibonacci (abad ke-13).

2. Menggambar barisan

Barisan dapat digambar pada garis bilangan (titik-titik $a_1, a_2, \dots$) atau pada bidang (grafik berupa titik-titik terpisah (n, a_n)). Pada gambar kanan di bawah, $a_n = n/(n+1)$ tampak mendekati 1.



Kiri: konvergen ke 1. Tengah: berosilasi (divergen). Kanan: $n!/n^n \to 0$.

3. Limit barisan

DEFINISI (INTUITIF)

Barisan $\{a_n\}$ memiliki limit L, ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ atau $a_n \to L$, bila suku a_n dapat dibuat sedekat yang kita mau ke L dengan mengambil n cukup besar. Bila limit ada, barisan **konvergen**; bila tidak, barisan **divergen**.

DEFINISI (PRESISI, E–N)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat N sehingga

$$n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Artinya: seberapa sempit pun interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, semua suku mulai dari a_{N+1} berada di dalamnya. ε yang lebih kecil umumnya menuntut N yang lebih besar.

JEMBATAN DENGAN LIMIT FUNGSI

Definisi ini hampir identik dengan limit fungsi di tak hingga; satu-satunya beda adalah n bilangan bulat. Karena itu:

Teorema 3. Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $f(n) = a_n$ untuk bilangan bulat n, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ini memungkinkan penggunaan aturan l'Hôpital untuk barisan: terapkan pada fungsi $f(x)$ yang bersesuaian, lalu simpulkan untuk a_n. (Kebalikannya tidak benar: $\sin(n\pi) \to 0$ tetapi $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ tidak ada.)

Hasil dasar: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ untuk $r > 0$.

Limit tak hingga. $\lim a_n = \infty$ berarti untuk setiap M ada N sehingga $n > N \Rightarrow a_n > M$. Barisan itu divergen, tetapi dengan cara khusus ("divergen ke ∞").

4. Hukum limit untuk barisan

Bila $\{a_n\}, \{b_n\}$ konvergen dan c konstanta:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

- $\lim ca_n = c \lim a_n$, $\lim c = c$
- $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$ bila $\lim b_n \neq 0$
- $\lim a_n^p = (\lim a_n)^p$ bila $p > 0$ dan $a_n > 0$

TEOREMA APIT (SQUEEZE)

Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq n_0$ dan $\lim a_n = \lim c_n = L$, maka $\lim b_n = L$.

TEOREMA 6 (NILAI MUTLAK)

Jika $\lim |a_n| = 0$ maka $\lim a_n = 0$. (Karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, lalu apit.)

TEOREMA 7 (FUNGSI KONTINU)

Jika $\lim a_n = L$ dan f kontinu di L, maka $\lim f(a_n) = f(L)$.

5. Contoh-contoh perhitungan

CONTOH 3 — BAGI DENGAN PANGKAT TERTINGGI

$\lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+1/n} = \dfrac{1}{1+0} = 1$. Ini mengonfirmasi tebakan dari grafik.

$\lim \dfrac{3n^2 - n}{5n^2 + 4} = \lim \dfrac{3 - 1/n}{5 + 4/n^2} = \dfrac{3}{5}$.

CONTOH 4 — LIMIT TAK HINGGA

$a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$. Bagi dengan n: $\dfrac{1}{\sqrt{10/n^2 + 1/n}}$. Penyebut menuju 0 (positif), pembilang 1, jadi $a_n \to \infty$. Barisan divergen.

CONTOH 5 — MEMAKAI L'HÔPITAL

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Pakai fungsi $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$. Maka $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

CONTOH 6 — BARISAN YANG BEROSILASI

$a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ Suku bolak-balik antara -1 dan 1 tak hingga kali, tidak mendekati satu bilangan; **divergen**.

CONTOH 7 — LEWAT NILAI MUTLAK

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$. Dengan Teorema 6, $a_n \to 0$. Walaupun tanda berganti, magnitudonya mengecil.

CONTOH 8 — TEOREMA 7

$$\lim \sin \frac{\pi}{n} = \sin\left(\lim \frac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

CONTOH 9 — BARISAN FAKTORIAL

$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Tulis

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n}\right).$$

Tanda kurung berisi faktor-faktor ≤ 1, jadi $0 < a_n \leq \dfrac{1}{n}$. Dari Teorema Apit ($\frac{1}{n} \to 0$): $a_n \to 0$.

PELAJARAN PENTING

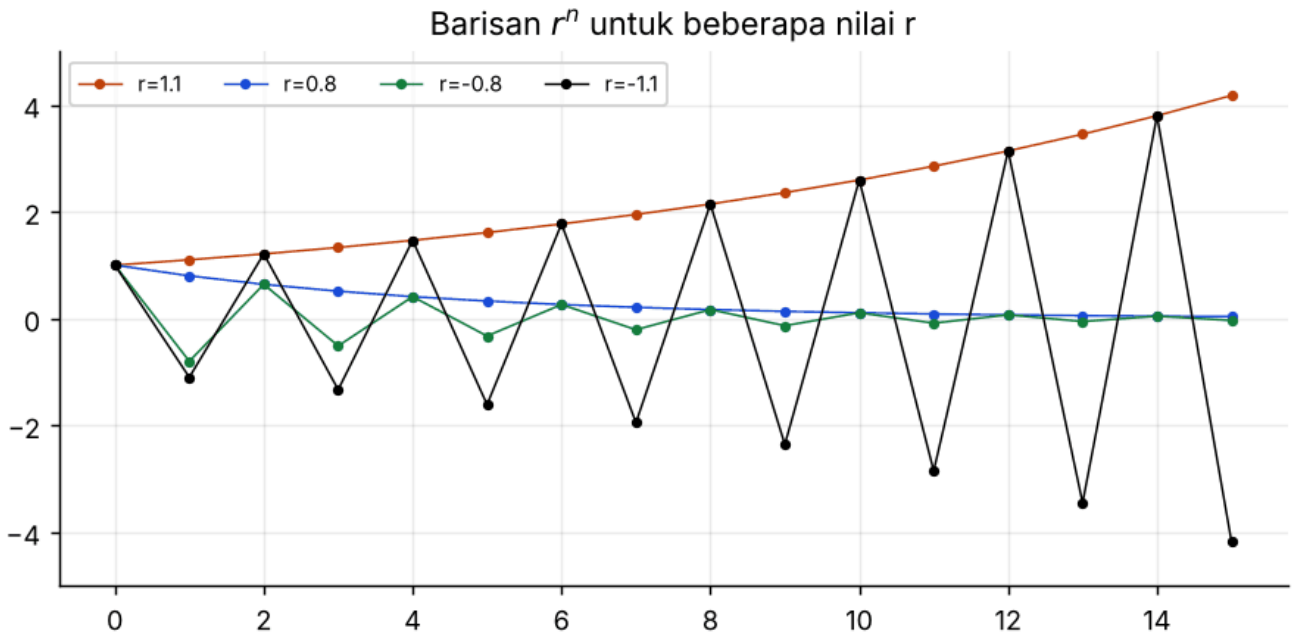
Pada tingkat n besar, n^n tumbuh jauh lebih cepat dibanding $n!$, dan $n!$ lebih cepat dibanding a^n untuk semua a, dan a^n lebih cepat dibanding pangkat n^p, yang lebih cepat dibanding $\ln n$. Hierarki: $\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

6. Barisan geometri r^n

CONTOH 10 — KAPAN $\{R^N\}$ KONVERGEN?

- $r > 1$: $r^n \to \infty$ (diverge).
- $r = 1$: $1, 1, 1, \cdots \to 1$.
- $0 < r < 1$: $r^n \to 0$ (karena $r^n = e^{n \ln r}$ dan $\ln r < 0$).
- $r = 0$: barisan nol, $\to 0$.
- $-1 < r < 0$: $|r|^n \to 0$, jadi $r^n \to 0$ (Teorema 6).
- $r = -1$: $-1, 1, -1, \ldots$ divergen.
- $r < -1$: $|r^n| \to \infty$ dengan tanda berganti; divergen.

Ringkasan: $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \\ 1 & r = 1 \end{cases}$, dan divergen untuk semua r lain. Maka $\{r^n\}$ konvergen **jika dan hanya jika** $-1 < r \leq 1$.



7. Barisan monoton dan terbatas

DEFINISI

- $\{a_n\}$ **naik** jika $a_n < a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$; **turun** jika $a_n > a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$. Naik atau turun disebut **monoton**.
- $\{a_n\}$ **terbatas di atas** jika ada M dengan $a_n \leq M$ untuk semua n; **terbatas di bawah** jika ada m dengan $m \leq a_n$; **terbatas** jika keduanya.

Contoh: $\{n\}$ terbatas di bawah (oleh 1) tetapi tidak di atas. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ terbatas karena $0 < a_n < 1$.

Membuktikan monoton

Dua cara: (i) bandingkan a_{n+1} dengan a_n lewat aljabar (selisih atau rasio); (ii) bentuk fungsi $f(x)$ dengan $f(n) = a_n$ lalu periksa f'.

CONTOH 11 — $\{\frac{3}{N+5}\}$ TURUN

Penyebut $n+6 > n+5$, jadi $\dfrac{3}{n+6} < \dfrac{3}{n+5}$: $a_{n+1} < a_n$.

CONTOH 12 — $A_N = \dfrac{N}{N^2+1}$ TURUN

Cara 1. Perlu $\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{n}{n^2+1}$. Kalikan silang (semua penyebut positif): $(n+1)(n^2+1) < n\big((n+1)^2+1\big) \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 0 < n^2+n-1$, yang benar untuk $n \geq 1$.

Cara 2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ untuk $x > 1$; f turun pada $[1,\infty)$, jadi $f(n+1) < f(n)$.

8. Teorema Barisan Monoton

TEOREMA 12

Setiap barisan **monoton dan terbatas** adalah konvergen.

Bukti (untuk barisan naik)

Dasarnya adalah **Aksioma Kelengkapan** bilangan real: setiap himpunan tak kosong yang terbatas di atas punya *batas atas terkecil* (supremum). Aksioma ini menyatakan bahwa garis bilangan tidak berlubang.

Misalkan $\{a_n\}$ naik dan terbatas di atas. Himpunan $S = \{a_n : n \geq 1\}$ tak kosong dan terbatas di atas, jadi punya batas atas terkecil L. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ bukan batas atas S (karena L terkecil), sehingga ada N dengan $a_N > L - \varepsilon$. Karena barisan naik, untuk semua $n > N$ berlaku $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$. Di sisi lain $a_n \leq L$. Jadi $|a_n - L| < \varepsilon$ untuk $n > N$, artinya $\lim a_n = L$. Untuk barisan turun terbatas di bawah, argumen serupa dengan batas bawah terbesar. ■

CATATAN

- Terbatas tidak cukup: $\{(-1)^n\}$ terbatas tetapi divergen.
- Monoton tidak cukup: $\{n\}$ monoton tetapi divergen.
- Teorema ini memberi *keberadaan* limit, bukan nilainya. Pada bab-bab berikut ia dipakai berulang kali untuk deret.

CONTOH 13 — BARISAN REKURSIF

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ (metode Newton untuk $\sqrt{2}$). Suku-sukunya:
$1,\ 1.5,\ 1.41\overline{6},\ 1.414215\ldots$

- **Terbatas di bawah.** Untuk $a > 0$, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2}$ (AM–GM). Jadi $a_n \geq \sqrt{2}$ untuk semua $n \geq 2$.
- **Turun mulai $n = 2$.** Bila $a_n \geq \sqrt{2}$, maka $\frac{2}{a_n} \leq a_n$, sehingga $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n$.

Menurut Teorema 12 (berlaku juga bila monoton baru mulai dari suku kedua), barisan konvergen. Bila limitnya L, dari rekursi $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$ (positif karena $a_n \geq \sqrt{2}$).

Untuk mengamati konvergensi numerik dari barisan dengan rumus eksplisit, coba mode "Suku-suku barisan" pada kalkulator Python, misalnya $a(n) = n/(n+1)$ dengan n dari 1 sampai 12.

9. Ringkasan

- Barisan = fungsi dari bilangan bulat positif; limit berarti a_n mendekati L untuk n besar.
- Hukum limit, Teorema Apit, dan kekontinuan fungsi bekerja seperti pada limit fungsi.
- Untuk $\lim$ yang melibatkan $\frac{\infty}{\infty}$, pakai l'Hôpital pada fungsi padanannya.

- $\{r^n\}$ konvergen $\iff -1 < r \leq 1$.
- Monoton + terbatas $\Rightarrow$ konvergen (Teorema 12).

Materi 11.2 dst. (deret, uji konvergensi, deret pangkat, Taylor) belum ada di berkas yang Anda unggah.

11.2 Deret

Pada subbab sebelumnya kita mempelajari barisan: daftar bilangan yang tak berujung. Sekarang kita bertanya sesuatu yang lebih berani: apa artinya *menjumlahkan* semua anggota daftar itu? Menjumlahkan tak hingga banyak bilangan terdengar mustahil, tetapi justru dari pertanyaan inilah lahir deret pangkat, deret Taylor, dan banyak sekali metode hampiran dalam sains. Kuncinya sederhana: kita tidak pernah benar-benar menjumlahkan tak hingga suku; kita menjumlahkan sebanyak-banyaknya suku pertama, lalu melihat *ke mana jumlah itu menuju*.

1. Deret dan jumlah parsial

Diberikan barisan $\{a_n\}$. Ekspresi formal

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

disebut **deret tak hingga** (singkatnya deret). Bilangan a_n disebut suku ke-n. Karena tak mungkin menjumlahkan semuanya sekaligus, kita membentuk barisan baru dari jumlah suku-suku awal:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \ldots, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

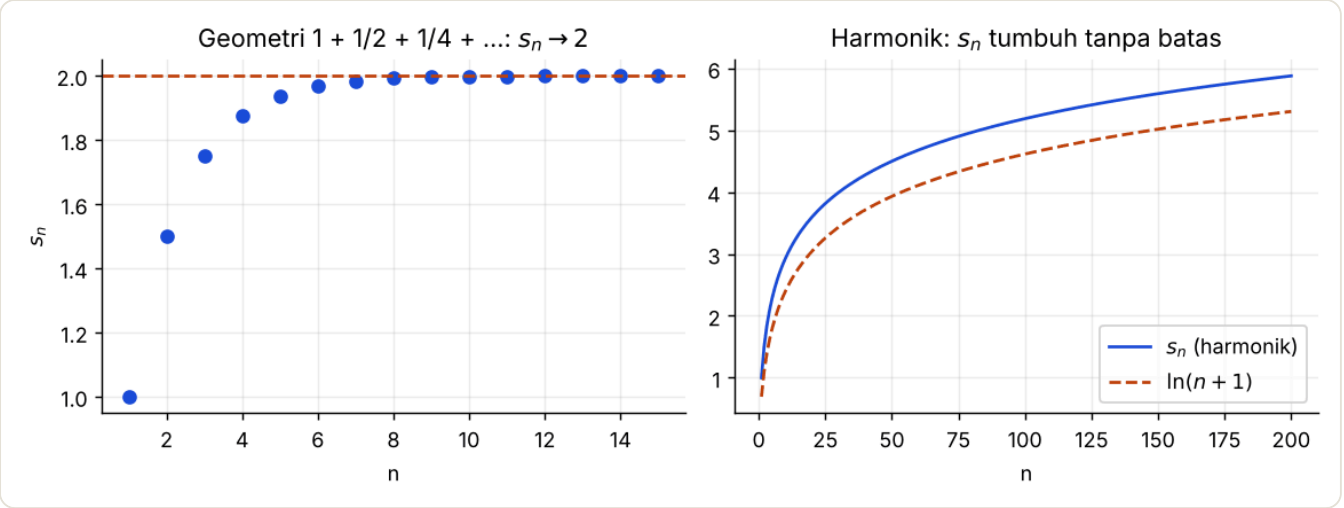
Bilangan s_n disebut **jumlah parsial ke-n**.

DEFINISI — KEKONVERGENAN DERET

Deret $\sum a_n$ disebut **konvergen** bila barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ konvergen, yaitu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ada sebagai bilangan real. Bilangan s disebut **jumlah** deret dan kita tulis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Bila $\{s_n\}$ divergen, deretnya **divergen** dan tidak punya jumlah.

Jadi "jumlah tak hingga" adalah *limit* dari jumlah hingga. Seluruh teori deret pada dasarnya adalah teori barisan $\{s_n\}$. Perhatikan perbedaan peran: $\{a_n\}$ adalah barisan suku, $\{s_n\}$ adalah barisan jumlah parsial; keduanya sering dikacaukan.

Indeks awal tidak harus 1. Deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ atau $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ diperlakukan sama. Mengubah (atau membuang) sejumlah *berhingga* suku di awal tidak mengubah apakah deret konvergen atau tidak (hanya mengubah nilai jumlahnya); ini sangat berguna pada uji-uji di subbab berikutnya.



Kiri: jumlah parsial deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ mendekati 2 dan tidak pernah melampauinya. Kanan: jumlah parsial deret harmonik terus naik, mengikuti $\ln(n+1)$, sehingga tidak terbatas.

2. Deret geometri

Deret yang setiap suku diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan konstanta r (rasio) disebut deret geometri:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} \qquad (a \neq 0).$$

Penurunan jumlah. Untuk $r \neq 1$, kalikan $s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ dengan r:

$$r s_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Kurangkan kedua persamaan: semua suku tengah saling meniadakan, tersisa $s_n - r s_n = a - ar^n$, sehingga

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Bila $|r| < 1$, maka $r^n \to 0$ dan $s_n \to \dfrac{a}{1-r}$. Bila $|r| > 1$, r^n tak terbatas sehingga s_n divergen. Bila $r = 1$, $s_n = na \to \pm\infty$; bila $r = -1$, s_n berayun antara a dan 0: divergen.

TEOREMA — DERET GEOMETRI

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ **konvergen jika** $|r| < 1$ dengan jumlah

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\text{suku pertama}}{1 - \text{rasio}},$$

dan **divergen jika** $|r| \geq 1$.

Rumus "suku pertama dibagi satu kurang rasio" adalah salah satu rumus yang paling sering dipakai dalam seluruh bab ini. Perhatikan bahwa "suku pertama" harus benar-benar suku yang pertama kali muncul pada indeks awal yang digunakan.

CONTOH 1 — GEOMETRI DENGAN RASIO NEGATIF

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\tfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Suku pertama $a = 3$, rasio $r = -\frac{2}{5}$ dengan $|r| = \frac{2}{5} < 1$, jadi konvergen:

$$\sum = \frac{3}{1-(-2/5)} = \frac{3}{7/5} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1429.$$

Jumlah parsial berayun di sekitar $15/7$: $s_1 = 3,\ s_2 = 1{,}8,\ s_3 = 2{,}28,\ s_4 = 2{,}088, \ldots$

CONTOH 2 — MENGUBAH DESIMAL BERULANG MENJADI PECAHAN

Nyatakan $0{,}4272727\ldots = 0{,}4\overline{27}$ sebagai pecahan.

Pisahkan bagian yang tidak berulang: $0{,}4 + 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \cdots$. Mulai dari suku kedua, ini deret geometri dengan $a = 0{,}027$ dan $r = 0{,}01$:

$$0{,}027 + 0{,}00027 + \cdots = \frac{0{,}027}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}027}{0{,}99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Maka $0{,}4\overline{27} = \dfrac{4}{10} + \dfrac{3}{110} = \dfrac{44+3}{110} = \dfrac{47}{110}$. Cek: $47/110 = 0{,}427272\ldots$

CONTOH 3 — BOLA MEMANTUL

Bola dijatuhkan dari ketinggian 10 m. Setiap kali menumbuk lantai, bola memantul setinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian sebelumnya. Berapa total jarak yang ditempuh bola sampai berhenti (secara idealisasi)?

Jarak awal turun: 10 m. Setelah itu, setiap pantulan ke-k mencapai tinggi $10(3/4)^k$ dan jarak naik-turunnya adalah dua kalinya. Jadi

$$D = 10 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\tfrac{3}{4}\right)^{k} = 10 + 2\cdot\frac{10\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 10 + 2\cdot 30 = 70 \text{ m}.$$

Suku pertama deret di dalam adalah $10\cdot\frac{3}{4} = 7{,}5$, bukan 10: itu sebabnya kita harus teliti menetapkan "suku pertama".

CONTOH 4 — GEOMETRI BERGANTUNG X

Untuk x apa saja deret $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$ konvergen, dan berapa jumlahnya?

Deretnya $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n$: geometri dengan $a=1$, $r=\dfrac{x-2}{3}$. Konvergen bila $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1$, yaitu $|x-2|<3$ atau $-1<x<5$, dengan jumlah

$$\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{3}{5-x}.$$

Untuk x di luar selang itu (termasuk ujung $x=-1$ dan $x=5$ karena $|r|=1$), deret divergen. Ini cuplikan pertama dari *deret pangkat* yang kita pelajari di subbab 11.8.

3. Deret teleskop

Tidak semua deret konvergen bersifat geometri. Kadang suku-suku jumlah parsial saling menghapus secara beruntun ("melipat" seperti teleskop). Triknya biasanya pecahan parsial.

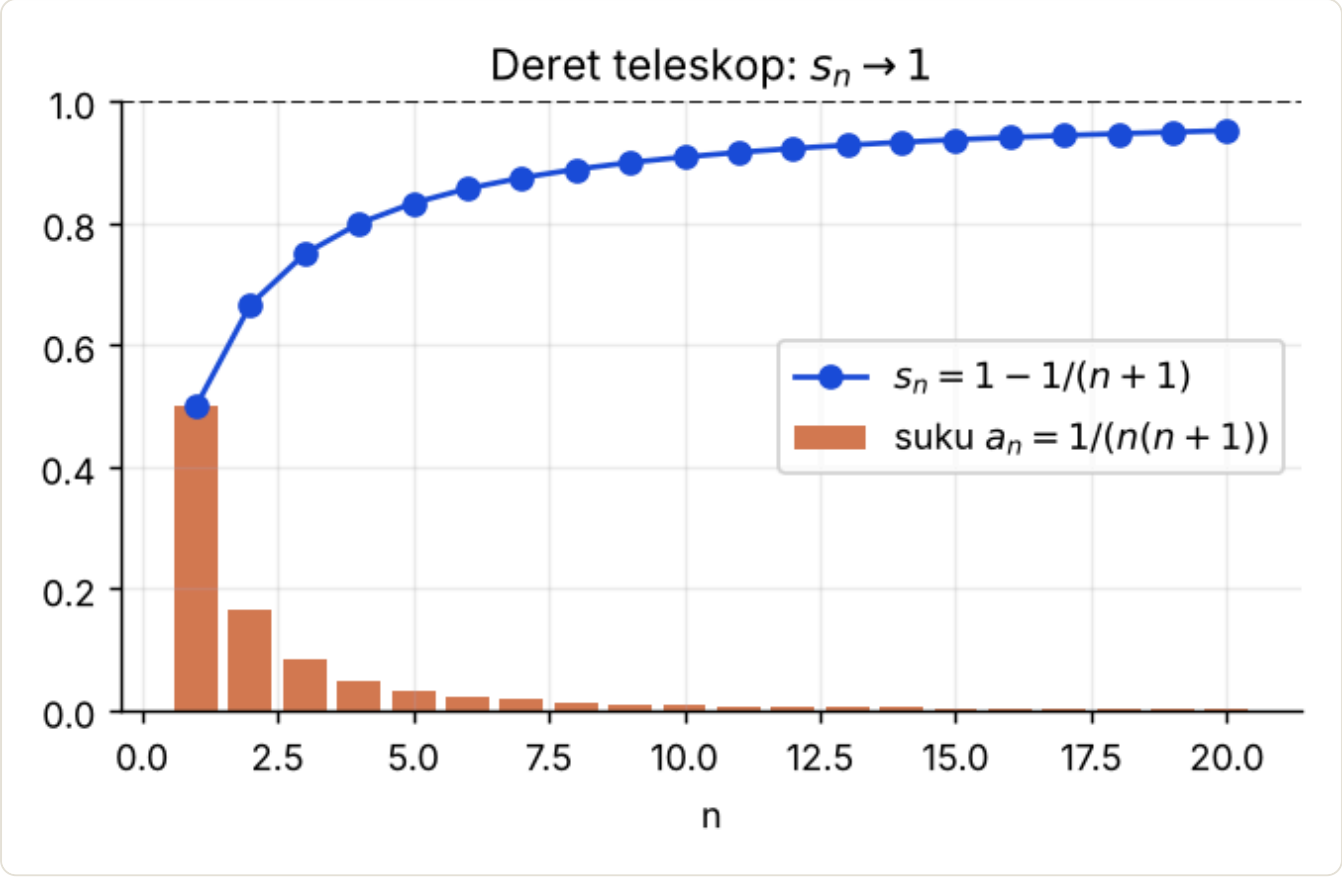
CONTOH 5 — TELESKOP DENGAN PECAHAN PARSIAL

Tentukan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Uraikan $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Maka

$$s_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Karena $s_n \to 1$, deretnya konvergen dengan jumlah 1.



Batang: suku $a_n = 1/(n(n+1))$. Titik: jumlah parsial $1 - 1/(n+1)$ yang mendekati 1.

CONTOH 6 — TELESKOP DENGAN SELISIH DUA LANGKAH

Hitung $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Faktorkan $n^2-1=(n-1)(n+1)$ dan uraikan $\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.
Sekarang suku yang saling hapus berjarak dua langkah:

$$s_N=\frac{1}{2}\left[\left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N-1}-\tfrac{1}{N+1}\right)\right].$$

Yang bertahan hanyalah 1 dan $\frac{1}{2}$ di depan, serta $-\frac{1}{N}$ dan $-\frac{1}{N+1}$ di belakang:

$$s_N=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

CONTOH 7 — TELESKOP YANG DIVERGEN

Selidiki $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\!\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Tulis $\ln\!\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$. Maka $s_n=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty$. Deretnya *divergen*, meskipun sukunya $\ln(1+1/n)\to 0$. Contoh ini akan kita pakai untuk menunjukkan bahwa suku menuju nol tidak cukup untuk kekonvergenan.

4. Deret harmonik: suku menuju nol, tetapi deret divergen

Deret harmonik $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ adalah contoh paling terkenal. Sukunya mengecil menuju nol, tetapi jumlahnya tidak terbatas.

TEOREMA — DERET HARMONIK DIVERGEN

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergen.

Bukti (pengelompokan ala Oresme). Perhatikan jumlah parsial dengan banyak suku pangkat dua:

$$s_2=1+\tfrac{1}{2},\qquad s_4=1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)>1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)=1+\tfrac{2}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > s_4 + 4 \cdot \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{3}{2}.$$

Secara umum, kelompok $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}$ memiliki 2^{k-1} suku, masing-masing paling sedikit $\frac{1}{2^k}$, sehingga jumlah kelompok itu $\geq \frac{1}{2}$. Dengan induksi, $s_{2^k} \geq 1 + \dfrac{k}{2}$. Barisan $\{s_{2^k}\}$ tak terbatas, maka $\{s_n\}$ (yang naik) tak terbatas dan divergen. $\blacksquare$

Divergensinya sangat lambat: untuk melampaui 100 dibutuhkan lebih dari $e^{100} \approx 2{,}7 \times 10^{43}$ suku. Inilah alasan mengapa pengamatan numerik saja tidak boleh dipercaya untuk memutuskan kekonvergenan.

5. Uji divergensi (uji suku ke-n)

Bila deret $\sum a_n$ konvergen, jumlah parsialnya mendekati s, sehingga s_n dan s_{n-1} keduanya mendekati s. Suku $a_n = s_n - s_{n-1}$ pun harus mendekati $s - s = 0$.

TEOREMA

Jika $\sum a_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kontraposisinya adalah alat praktis:

UJI DIVERGENSI

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada atau tidak sama dengan 0, maka $\sum a_n$ **divergen**.

JEBAKAN YANG PALING SERING

Kebalikannya **salah**: $a_n \to 0$ *tidak* menjamin $\sum a_n$ konvergen. Deret harmonik $\sum 1/n$ dan deret $\sum \ln(1 + 1/n)$ pada Contoh 7 adalah dua contoh tandingnya. Uji divergensi hanya bisa membuktikan divergen; bila $a_n \to 0$, ia tidak berkata apa-apa dan kita harus memakai uji lain.

CONTOH 8 — MEMAKAI UJI DIVERGENSI

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$: $a_n \to \tfrac{1}{2} \neq 0$, divergen.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$: $a_n \to e \neq 0$, divergen.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}$: a_n berayun antara -1 dan 1, limitnya tidak ada, divergen.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2-3n+7}$: $a_n \to 1 \neq 0$, divergen.

6. Sifat aljabar deret

TEOREMA — KELINEARAN

Bila $\sum a_n = A$ dan $\sum b_n = B$ konvergen dan c konstanta, maka $\sum ca_n = cA$, $\sum(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Buktinya langsung: jumlah parsial deret gabungan adalah gabungan jumlah parsial, lalu gunakan sifat limit barisan. Dua konsekuensi yang perlu diingat: (i) konvergen $\pm$ konvergen adalah konvergen; (ii) konvergen $\pm$ divergen adalah *divergen* (bila tidak, selisihnya akan konvergen, kontradiksi). Namun divergen $\pm$ divergen tidak dapat ditebak: $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = \sum 0$ konvergen.

CONTOH 9 — MEMECAH MENJADI DUA GEOMETRI

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$.

Pisahkan menjadi $\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Mulai dari $n=1$:

$$\frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

CONTOH 10 — BILA SATU BAGIAN DIVERGEN

Apakah $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$ konvergen?

Bagian pertama konvergen (geometri, jumlah 1), bagian kedua divergen (harmonik). Jumlah konvergen dan divergen adalah divergen, jadi deret itu divergen.

7. Ringkasan

- $\sum a_n$ konvergen $\iff$ barisan jumlah parsial s_n konvergen; jumlah deret adalah $\lim s_n$.
- Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen untuk $|r|<1$ dengan jumlah $\frac{a}{1-r}$; divergen untuk $|r|\geq 1$.
- Teleskop: uraikan suku menjadi selisih, tuliskan s_n, lihat apa yang bertahan.
- Harmonik $\sum 1/n$ divergen walaupun $a_n \to 0$.
- Uji divergensi: $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ divergen. Tidak dapat dipakai untuk membuktikan kekonvergenan.
- Kelinearan hanya berlaku bila kedua deret konvergen.

Pada subbab berikutnya kita mulai memutuskan kekonvergenan deret yang jumlah parsialnya tidak punya rumus tertutup, dimulai dengan Uji Integral.

11.3 Uji Integral dan Taksiran Jumlah

Pada 11.2 kita hanya bisa memutuskan kekonvergenan deret bila jumlah parsial s_n punya rumus tertutup (deret geometri, teleskop). Sebagian besar deret tidak sebaik itu. Misalnya, tidak ada rumus sederhana untuk $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, padahal kita ingin tahu apakah deretnya konvergen. Subbab ini memakai **integral** sebagai alat bantu: bila suku deret berasal dari fungsi positif yang menurun, luas di bawah kurva "terjepit" oleh jumlah deret.

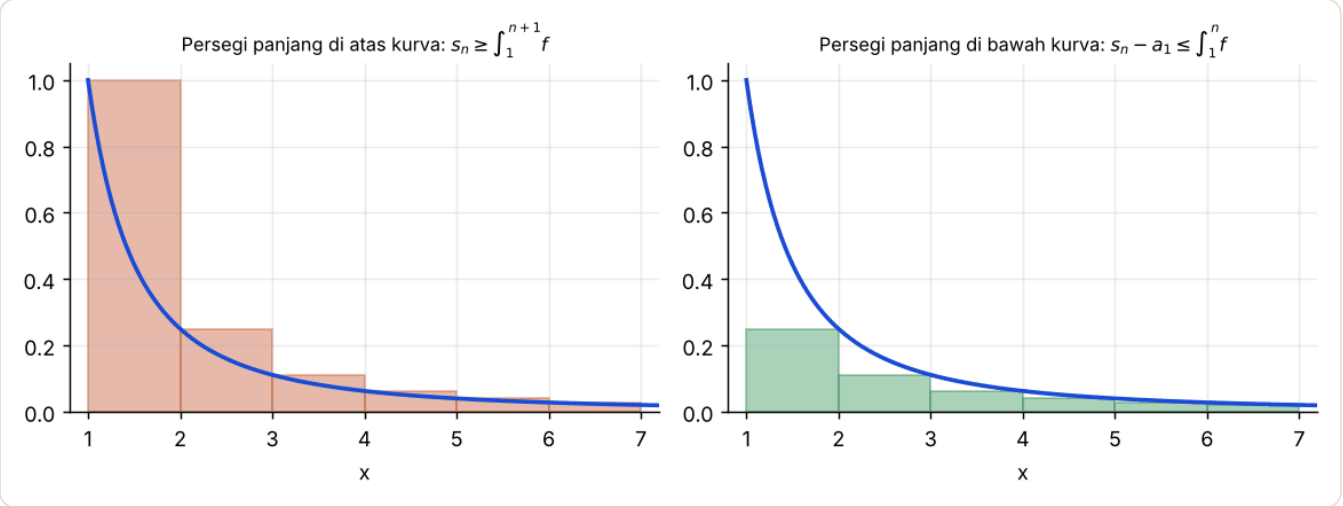
1. Gagasan: membandingkan deret dengan luas

Tinjau deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, sehingga $f(n) = \frac{1}{n^2}$. Gambarkan persegi panjang dengan alas 1 dan tinggi $f(n)$, mulai dari $x = n$ ke kanan. Karena f menurun, tiap persegi panjang berada di atas kurva, sehingga jumlah luasnya (yaitu s_n) lebih besar dari luas di bawah kurva:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \;\geq\; \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx.$$

Sebaliknya, bila persegi panjang digeser agar mulai dari $x = k - 1$ (ujung kanannya menyentuh kurva), mereka berada di bawah kurva:

$$s_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leq\; \int_{1}^{n} f(x)\,dx.$$



Kiri: persegi panjang di atas kurva, $s_n \geq \int_1^{n+1} f$. Kanan: persegi panjang di bawah kurva, $s_n - a_1 \leq \int_1^{n} f$.

Jadi jika integral $\int_1^{\infty} f$ berhingga, jumlah parsial terbatas di atas dan deret konvergen; bila integralnya tak hingga, $s_n \to \infty$ dan deret divergen. Itu isi uji berikut.

2. Uji integral

TEOREMA (UJI INTEGRAL)

Misalkan f kontinu, positif, dan menurun pada $[1, \infty)$, dan $a_n = f(n)$. Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergen.}$$

Dengan kata lain, deret dan integral tak wajar itu *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen*.

Bukti

(Integral konvergen $\Rightarrow$ deret konvergen). Dari ketaksamaan kedua di atas, $s_n \le a_1 + \int_1^n f \le a_1 + \int_1^{\infty} f =: M$. Karena $a_n > 0$, barisan $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas oleh M, jadi konvergen menurut Teorema Barisan Monoton (11.1).

(Integral divergen $\Rightarrow$ deret divergen). Dari ketaksamaan pertama, $s_n \ge \int_1^{n+1} f \to \infty$, maka $s_n \to \infty$. $\blacksquare$

CATATAN PENTING

- Fungsi tidak perlu menurun mulai dari $x = 1$; cukup menurun pada $[N, \infty)$ untuk suatu N, sebab membuang berhingga banyak suku tidak mengubah kekonvergenan.
- Uji ini hanya menyatakan **kekonvergenan**, *bukan nilai* jumlah deret. $\int_1^{\infty} f$ umumnya berbeda dari $\sum a_n$.
- Batas bawah integral boleh disesuaikan dengan indeks awal deret.
- Syarat "positif" dan "menurun" harus diperiksa, misalnya dengan $f'(x) < 0$.

3. Deret-p

TEOREMA

Deret-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \le 1$.

Bukti. Bila $p \le 0$, suku $\frac{1}{n^p} \not\to 0$, jadi divergen menurut uji divergensi. Bila $p > 0$, $f(x) = x^{-p}$ positif, kontinu, dan menurun pada $[1, \infty)$. Untuk $p \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p<1, \end{cases}$$

dan untuk $p=1$, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim \ln t = \infty$. Uji integral menyelesaikan bukti. ■

Kasus khusus yang perlu dihafal: $p=1$ (harmonik, divergen), $p=2$ ($\sum 1/n^2$, konvergen), $p=\frac{1}{2}$ ($\sum 1/\sqrt{n}$, divergen), $p=1{,}001$ (konvergen, walaupun sangat lambat).

4. Contoh uji integral

CONTOH 1 — $\sum \frac{1}{N^2+1}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ positif, kontinu, menurun ($f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0$). Maka

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty}\arctan t - \arctan 1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Integral konvergen, sehingga deret konvergen. (Nilai integral $\pi/4\approx 0{,}785$ berbeda dari jumlah deret $\approx 1{,}0767$, sesuai catatan di atas.)

CONTOH 2 — $\sum \frac{\ln N}{N^2}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Turunannya $f'(x)=\dfrac{x^2\cdot\frac{1}{x}-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$, negatif bila $\ln x>\frac{1}{2}$, yaitu $x>\sqrt{e}\approx 1{,}65$. Jadi f menurun untuk $x\ge 2$; gunakan batas bawah 2 (atau 1, hasilnya sama konvergen). Dengan integral parsial ($u=\ln x,\ dv=x^{-2}dx$):

$$\int_1^{t}\frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^{t} = 1-\frac{\ln t+1}{t}\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ 1.$$

Integral konvergen, maka deret konvergen.

CONTOH 3 — $\sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N \operatorname{LN} N}$ (DIVERGEN SANGAT LAMBAT)

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ positif dan menurun pada $[2, \infty)$. Dengan substitusi $u = \ln x$:

$$\int_2^t \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \;\to\; \infty.$$

Deret divergen. Walaupun suku-sukunya menuju nol lebih cepat dari $1/n$, $\ln(\ln n)$ tumbuh sangat lambat: karena $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} \approx \ln(\ln N) + 0{,}79$, untuk mencapai jumlah 10 dibutuhkan N sekitar 10^{4300} suku.

CONTOH 4 — $\sum NE^{-N^2}$

$f(x) = xe^{-x^2}$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < 0$ untuk $x \geq 1$. $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^{\infty} = \dfrac{1}{2e}$, konvergen. Maka deret konvergen. Lebih jauh, $\sum \leq a_1 + \int_1^{\infty} f = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \approx 0{,}552$; nilai sebenarnya $\approx 0{,}4049$.

CONTOH 5 — KAPAN UJI INTEGRAL TIDAK COCOK

Untuk $\sum \dfrac{\cos^2 n}{1 + n^2}$, fungsi $\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$ tidak menurun (ia berosilasi), jadi uji integral tidak berlaku. Deret ini ditangani dengan uji perbandingan: $0 \leq \frac{\cos^2 n}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$, dan deret terakhir konvergen (Contoh 1). Lihat 11.4.

5. Menaksir jumlah deret

Seandainya kita tahu sebuah deret konvergen ke s, berapa jauh jumlah parsial s_n dari s? Galat (sisa) adalah

$$R_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Dengan gambar persegi panjang yang sama, tetapi mulai dari $x = n$ (bukan dari 1), kita peroleh jepitan untuk sisa:

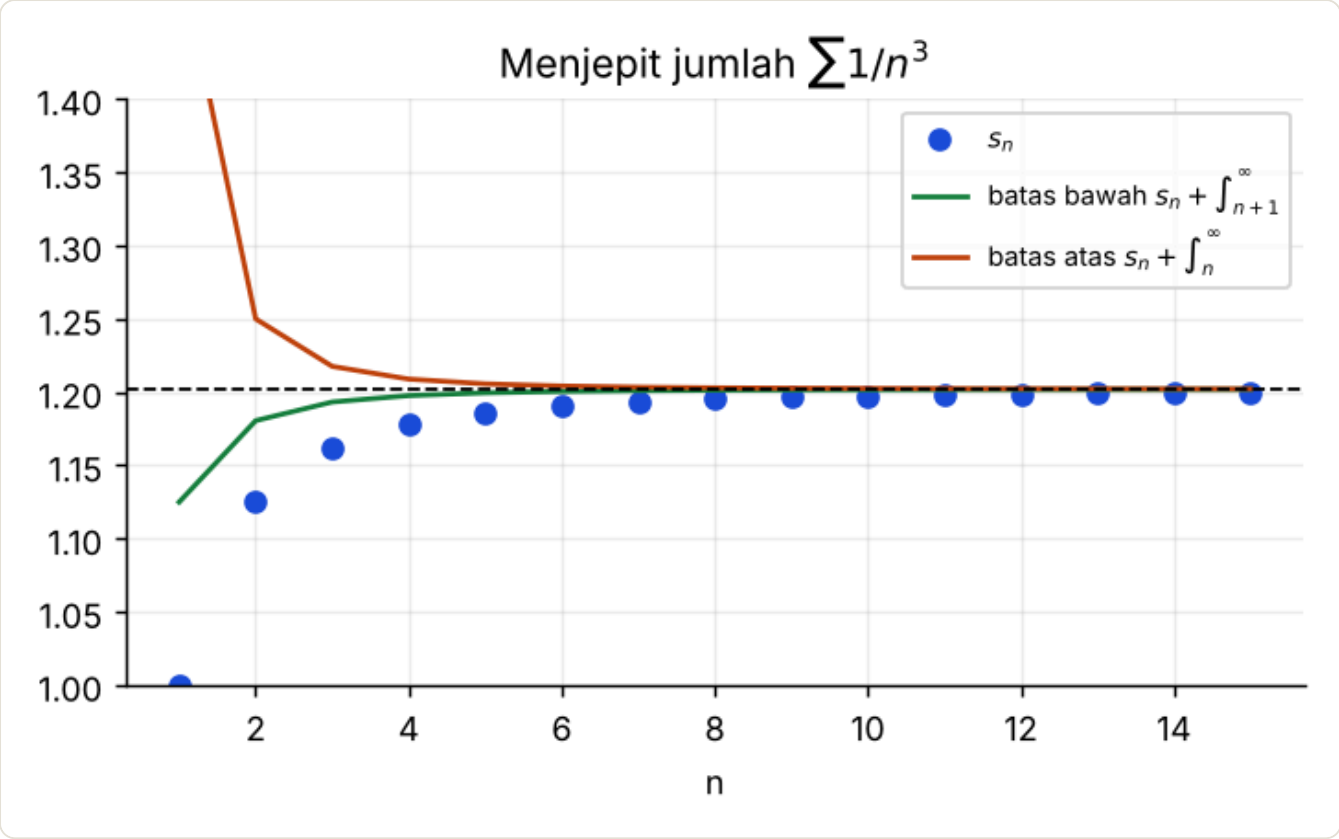
TAKSIRAN SISA (UJI INTEGRAL)

Jika f kontinu, positif, menurun pada $[n, \infty)$, dan $\sum a_k$ konvergen, maka

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; R_n \;\le\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Akibatnya, menambahkan batas-batas ini ke s_n menjepit jumlah sebenarnya:

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; s \;\le\; s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$



Batas bawah dan atas yang menjepit jumlah $\sum 1/n^3$ makin rapat ketika n bertambah.

CONTOH 6 — MENAKSIR $\sum \frac{1}{N^3}$ DENGAN $N = 10$

Jumlah parsial: $s_{10} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{1000} \approx 1{,}197532$. Karena $\int_n^{\infty} x^{-3}dx = \dfrac{1}{2n^2}$:

$$\text{batas atas: } \frac{1}{2\cdot 10^2} = 0{,}005, \qquad \text{batas bawah: } \frac{1}{2\cdot 11^2} \approx 0{,}004132.$$

Jadi $1{,}197532 + 0{,}004132 \le s \le 1{,}197532 + 0{,}005$, yaitu $1{,}201664 \le s \le 1{,}202532$. Kita bisa memakai titik tengah $s \approx 1{,}2021$ dengan galat maksimum $< 0{,}0005$. (Nilai sebenarnya $1{,}2020569\ldots$)

CONTOH 7 — BERAPA SUKU YANG DIBUTUHKAN?

Berapa suku $\sum \frac{1}{n^4}$ perlu dijumlahkan agar galat $< 10^{-5}$? Dari $R_n \le \int_n^\infty x^{-4}dx = \dfrac{1}{3n^3}$, kita perlu $\dfrac{1}{3n^3} < 10^{-5} \iff n^3 > 33\,333{,}3 \iff n \ge 33$ (karena $32^3 = 32\,768 < 33\,333$ dan $33^3 = 35\,937$). Dengan $n = 33$: $s_{33} \approx 1{,}082314$, sedangkan nilai eksak $\pi^4/90 \approx 1{,}082323$; selisihnya $\approx 9 \times 10^{-6} < 10^{-5}$. ✓

CONTOH 8 — TAKSIRAN UNTUK $\sum \frac{1}{N^2}$ DAN HARMONIK

(a) $\sum \frac{1}{n^2}$ dengan $n = 10$: $s_{10} \approx 1{,}549768$, $\int_{11}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{11}$, $\int_{10}^\infty = \frac{1}{10}$. Maka $1{,}6407 \le s \le 1{,}6498$; nilai eksak $\pi^2/6 \approx 1{,}6449$ ✓. Konvergensinya lambat: galat $R_n \approx 1/n$, sehingga butuh seribu suku untuk tiga desimal.

(b) Harmonik: untuk deret divergen, ketaksamaan yang sama memberi $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$. Jadi H_{1000} ada di antara $6{,}91$ dan $7{,}91$ (nilai sebenarnya $\approx 7{,}485$). Deret harmonik tumbuh seperti $\ln n$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap $\sum a_n = \int_1^\infty f$. Hanya *sifat* konvergen/divergennya yang sama.
- Memakai uji integral pada fungsi yang tidak menurun atau bernilai negatif.
- Menyimpulkan konvergen dari $a_n \to 0$. Harmonik menuju 0 tetapi divergen.
- Mengira $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p = 1$; batasnya *tegas* $p > 1$.

7. Ringkasan

- Uji integral: f positif, kontinu, menurun $\Rightarrow \sum f(n)$ dan $\int^\infty f$ sama-sama konvergen/divergen.
- Deret-p: konvergen $\iff p > 1$.
- Sisa: $\int_{n+1}^\infty f \le R_n \le \int_n^\infty f$; gunakan untuk menaksir jumlah dan menentukan banyak suku.

Lanjut ke 11.4 Uji Perbandingan, yang memanfaatkan deret-p dan geometri sebagai pembanding.

11.4 Uji Perbandingan

Uji integral hanya cocok bila suku deret mudah diintegralkan. Deret seperti $\sum \frac{1}{2^n+1}$ atau $\sum \frac{n+1}{n^3-2}$ lebih mudah ditangani bila kita *membandingkannya* dengan deret yang kekonvergenannya sudah kita kenal. Pembanding utama kita: **deret geometri** ($\sum r^n$) dan **deret-p** ($\sum 1/n^p$).

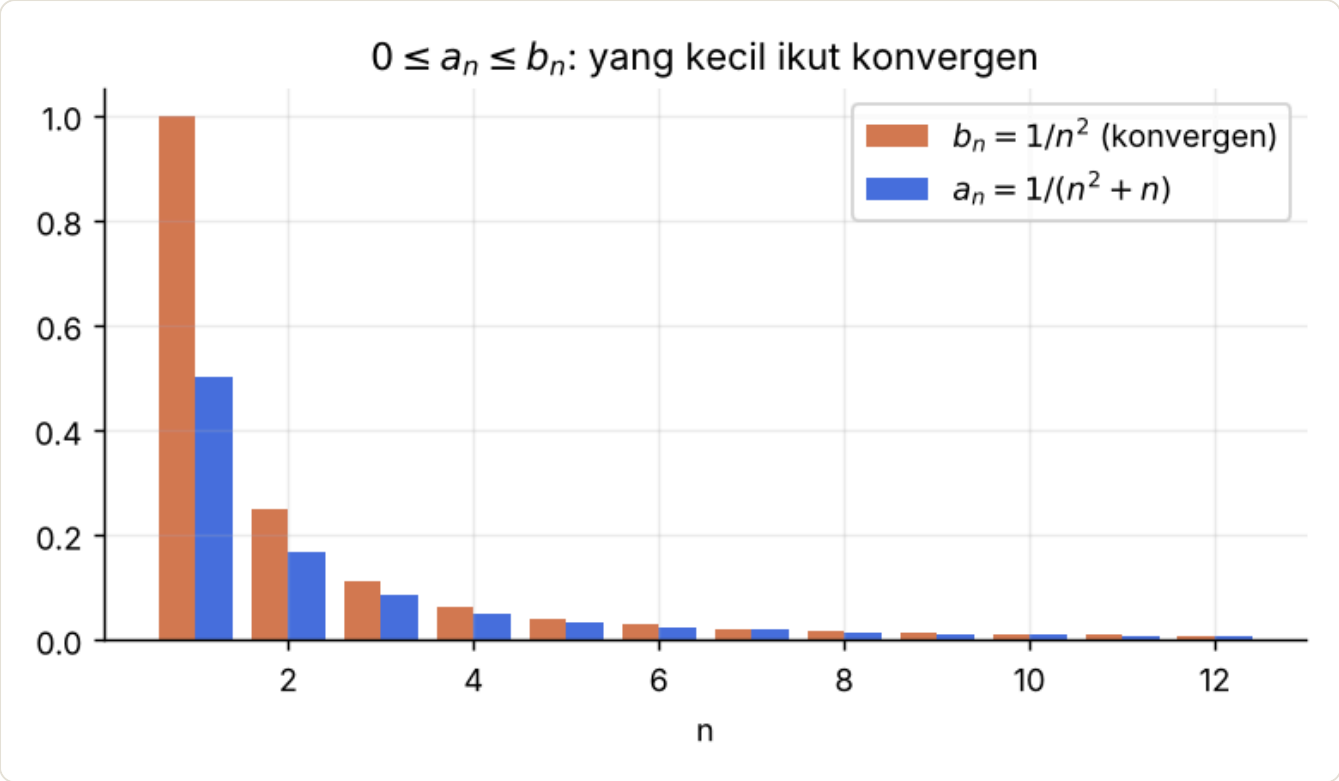
1. Uji perbandingan langsung

TEOREMA (UJI PERBANDINGAN)

Misalkan $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ deret dengan suku positif.

1. Jika $\sum b_n$ konvergen dan $a_n \le b_n$ untuk semua n, maka $\sum a_n$ konvergen.
2. Jika $\sum b_n$ divergen dan $a_n \ge b_n$ untuk semua n, maka $\sum a_n$ divergen.

Intuisi. Deret yang "lebih kecil" dari deret berjumlah hingga pasti berjumlah hingga; deret yang "lebih besar" dari deret yang meledak pasti meledak.



Batang biru (a_n) selalu di bawah batang oranye (b_n) dan $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum a_n$ konvergen.

Bukti (bagian 1)

Misalkan $s_n = \sum_{k \le n} a_k$, $t_n = \sum_{k \le n} b_k$ dan $t = \sum b_k$. Karena suku positif, s_n naik, dan $s_n \le t_n \le t$. Jadi $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas, sehingga konvergen (Teorema Barisan Monoton). Bagian 2 adalah kontrapositifnya: bila $\sum a_n$ konvergen, maka $\sum b_n \le \sum a_n$ juga konvergen, kontradiksi dengan divergensi $\sum b_n$. ■

> **CATATAN**
>
> Pertidaksamaan cukup berlaku untuk $n \ge N$ (suatu N), karena berhingga banyak suku awal tidak memengaruhi kekonvergenan. Arah pertidaksamaan harus **cocok** dengan sifat pembanding: "lebih kecil dari yang konvergen" atau "lebih besar dari yang divergen". Dua kombinasi lainnya tidak menghasilkan kesimpulan.

Contoh

CONTOH 1 — $\sum \frac{5}{2N^2+4N+3}$

Untuk $n \ge 1$, $2n^2 + 4n + 3 > 2n^2$, sehingga $\dfrac{5}{2n^2+4n+3} < \dfrac{5}{2n^2} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$. Deret $\frac{5}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ konvergen (deret-p, $p = 2$). Jadi deret asal konvergen.

CONTOH 2 — $\sum \frac{\ln N}{N}$ ($N \ge 3$)

Untuk $n \ge 3$, $\ln n > 1$, jadi $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$. Karena harmonik divergen, deret asal divergen.

CONTOH 3 — $\sum \frac{1}{2^N+1}$

$\dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$ dan $\sum (\frac{1}{2})^n$ geometri konvergen ($r = \frac{1}{2}$). Maka konvergen.

CONTOH 4 — $\sum \frac{\sin^2 N}{N^2}$

Suku tak negatif dan $\sin^2 n \le 1$, jadi $\dfrac{\sin^2 n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Konvergen.

CONTOH 5 — PEMBANDINGAN YANG SALAH ARAH

Untuk $\sum \dfrac{1}{2^n - 1}$, kita punya $\dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{1}{2^n}$, tetapi pembanding konvergen: arahnya *tidak cocok* (lebih besar dari yang konvergen tidak menyimpulkan apa-apa). Perlu uji lain, yaitu uji perbandingan limit di bawah.

2. Uji perbandingan limit

Pada Contoh 5, deret $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ jelas "berperilaku seperti" $\sum \frac{1}{2^n}$ untuk n besar. Uji berikut menjadikan intuisi itu tepat tanpa perlu mencari pertidaksamaan.

TEOREMA (UJI PERBANDINGAN LIMIT)

Misalkan $a_n, b_n > 0$ dan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad 0 < c < \infty.$$

Maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

Bukti

Pilih bilangan m, M dengan $0 < m < c < M$. Karena $a_n / b_n \to c$, ada N sehingga $m < \frac{a_n}{b_n} < M$ untuk $n > N$, yaitu $m b_n < a_n < M b_n$. Bila $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum M b_n$ konvergen, dan $a_n < M b_n$ memberi $\sum a_n$ konvergen (uji perbandingan). Bila $\sum b_n$ divergen, $\sum m b_n$ divergen dan $a_n > m b_n$ memberi $\sum a_n$ divergen. $\blacksquare$

CARA MEMILIH B_N

Ambil *suku dominan* pada pembilang dan penyebut (pangkat tertinggi), dan buang konstanta. Untuk $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}$, pilih $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$.

CONTOH 6 — $\sum \frac{1}{2^N - 1}$

Ambil $b_n = \frac{1}{2^n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^n}{2^n - 1} = \dfrac{1}{1 - 2^{-n}} \to 1$. Limit positif dan berhingga; $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ konvergen. (Nilainya $\approx 1{,}6067$.)

CONTOH 7 — $\sum \frac{2N^2+3N}{\sqrt{5+N^5}}$

Suku dominan: $\dfrac{2n^2}{n^{5/2}} = 2n^{-1/2}$. Ambil $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Maka $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(2n^2+3n)\sqrt{n}}{\sqrt{5+n^5}} = \dfrac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{n^{5/2}\sqrt{1+5/n^5}} \to 2$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{1}{2} < 1$ divergen, maka deret asal divergen.

CONTOH 8 — $\sum \frac{1}{N^{1+1/N}}$

Ambil $b_n = \frac{1}{n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n^{1/n}}$, dan $n^{1/n} = e^{(\ln n)/n} \to e^0 = 1$. Limit $= 1$; harmonik divergen, jadi deret divergen. Perhatikan: pangkat $1 + \frac{1}{n}$ selalu > 1, tetapi menuju 1 sehingga deret-p tidak berlaku (p harus konstan).

CONTOH 9 — $\sum \frac{N+5}{N^3-2N+1}$ UNTUK $N \geq 2$

Dominan: $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Rasio dengan $\frac{1}{n^2}$ menuju 1; $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka konvergen.

KASUS $C = 0$ ATAU $C = \infty$

- Jika $c = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen (a_n lebih kecil kecuali untuk faktor konstan).
- Jika $c = \infty$ dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum a_n$ divergen.

Sisanya ($c = 0$ dengan $\sum b_n$ divergen, atau $c = \infty$ dengan $\sum b_n$ konvergen) tidak memberi kesimpulan. Contoh: $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ dibanding $\frac{1}{n^2}$: $c = 0$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka konvergen.

3. Menaksir jumlah dengan perbandingan

Bila $a_n \leq b_n$ dan kita dapat menjumlahkan $\sum b_n$ secara eksak, maka galat pemotongan $\sum a_n$ dapat dibatasi oleh sisa deret pembanding: $R_n = \sum_{k>n} a_k \leq \sum_{k>n} b_k$.

CONTOH 10 — $\sum \frac{1}{3^N+1}$ DENGAN $N = 10$

$\frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}$. Sisa pembanding geometri: $\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty} 3^{-k} = \frac{3^{-11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^{-10}}{2} \approx 8{,}47 \times 10^{-6}$. Jumlah parsial $s_{10} \approx 0{,}404055$, maka jumlah sebenarnya ada di $[0{,}404055;\ 0{,}404063]$. (Nilai sebenarnya $\approx 0{,}4040633$.) Dalam hampir semua penggunaan praktis, empat desimal $0{,}4041$ sudah pasti benar.

4. Strategi memilih pembanding

Bentuk suku	Pembanding yang cocok
Rasional dalam n (polinomial/polinomial)	$\frac{1}{n^p}$, p = selisih derajat
Memuat $2^n, 3^n, \ldots$ di penyebut	geometri r^n
Akar: $\sqrt{n^k}$	$n^{k/2}$ pada suku dominan
Memuat $\sin n$, $\cos n$, $(-1)^n$	batas $\lvert\cdot\rvert \le 1$, banding langsung
Memuat $\ln n$	$\ln n < n^{\varepsilon}$ untuk n besar; bandingkan dengan deret-p

5. Kesalahan umum

- Arah yang tidak cocok (Contoh 5). Selalu cek: kecil terhadap konvergen, besar terhadap divergen.
- Uji perbandingan limit memerlukan suku **positif** dan limit c **positif berhingga**.
- Lupa bahwa $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen hanya bila $p > 1$: $p = 1$ divergen.

6. Ringkasan

- Perbandingan langsung: kecil $\le$ konvergen $\Rightarrow$ konvergen; besar $\ge$ divergen $\Rightarrow$ divergen.
- Perbandingan limit: $a_n/b_n \to c \in (0, \infty) \Rightarrow$ sifat kekonvergenan sama.
- Pembanding standar: geometri dan deret-p.
- Taksiran galat dapat memakai sisa deret pembanding.

Berikutnya 11.5 Deret Berganti Tanda, yaitu deret yang sukunya tidak semua positif.

11.5 Deret Berganti Tanda

Sampai di sini semua deret yang diuji memiliki suku positif. Deret yang sukunya bergantian positif dan negatif berperilaku jauh lebih baik: pembatalan antar suku membantu kekonvergenan. Contoh terkenalnya adalah **deret harmonik berganti tanda**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

yang konvergen walaupun deret harmonik biasa divergen.

1. Deret berganti tanda

DEFINISI

Deret berganti tanda (*alternating series*) adalah deret yang suku-sukunya berganti positif dan negatif, yaitu berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad \text{atau} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n, \quad b_n > 0.$$

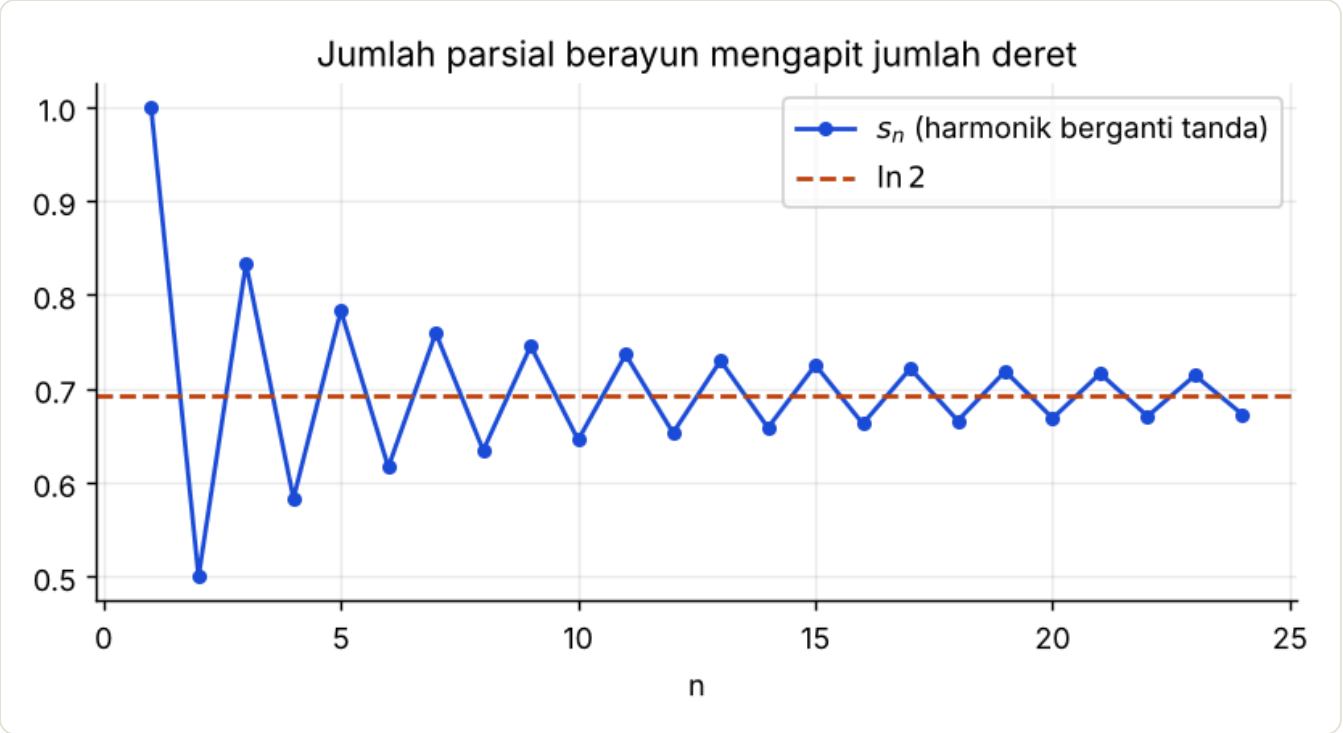
2. Uji deret berganti tanda (Leibniz)

TEOREMA

Jika deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ ($b_n > 0$) memenuhi

1. $b_{n+1} \le b_n$ untuk semua n (barisan b_n menurun), dan
2. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$,

maka deret itu konvergen.



Jumlah parsial s_n berayun naik-turun dan mengapit $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

Mengapa ini benar

Perhatikan jumlah parsial:

- Jumlah parsial genap: $s_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n})$. Tiap kurung ≥ 0, jadi s_{2n} **naik**. Sekaligus $s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - b_{2n} \leq b_1$, jadi s_{2n} **terbatas** oleh b_1. Maka $s_{2n} \to s$ (Teorema Barisan Monoton).
- Jumlah parsial ganjil: $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$, dan $b_{2n+1} \to 0$, maka $s_{2n+1} \to s + 0 = s$.

Kedua subbarisan (genap dan ganjil) menuju s yang sama, sehingga $s_n \to s$. ■

Secara geometris, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots$ turun dari atas, $s_2 < s_4 < \cdots$ naik dari bawah, dan jumlah deret s selalu *terjepit* di antara dua jumlah parsial berurutan.

PERINGATAN

- Kedua syarat harus dipenuhi. Bila $b_n \not\to 0$, deret divergen menurut uji divergensi.
- Syarat menurun cukup berlaku untuk $n \geq N$ (suatu N).
- Uji ini hanya menyatakan **konvergen**; bila syaratnya gagal, uji ini *tidak* menyimpulkan divergen.

3. Contoh

CONTOH 1 — HARMONIK BERGANTI TANDA

$b_n = \frac{1}{n}$: menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Nilainya $\ln 2 \approx 0{,}6931$; lihat nanti di 11.10.)

CONTOH 2 — SYARAT $B_N \to 0$ GAGAL

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3n}{4n-1}$. Di sini $b_n = \dfrac{3n}{4n-1} \to \dfrac{3}{4} \neq 0$. Maka $\lim a_n$ tidak ada (a_n berayun mendekati $\pm\frac{3}{4}$), dan deret divergen menurut uji divergensi.

CONTOH 3 — MEMERIKSA MENURUN DENGAN TURUNAN

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$. Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$. Maka $f'(x) = \dfrac{2x(x^3+1) - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0$ bila $x^3 > 2$, yaitu $x > 1{,}26$. Jadi b_n menurun untuk $n \geq 2$. Juga $b_n \to 0$ (derajat penyebut lebih besar). Konvergen. (Jumlah $\approx 0{,}2396$.)

CONTOH 4 — MEMERIKSA MENURUN SECARA LANGSUNG

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (mulai dari $n = 3$). $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ untuk $x > e \approx 2{,}72$; jadi menurun untuk $n \geq 3$. Dan $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (l'Hôpital). Konvergen.

CONTOH 5 — SUKU MENGANDUNG FAKTORIAL

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$: $b_n = \dfrac{1}{n!}$ menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Jumlahnya $e^{-1} \approx 0{,}3679$; ini adalah e^x di $x = -1$, lihat 11.10.)

CONTOH 6 — MEMERIKSA B_N MENURUN LEWAT SELISIH

$\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+n}$. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+n}$, penyebut $\sqrt{n}+n$ bertambah besar bila n naik, sehingga b_n menurun; $b_n \to 0$. Konvergen.

CONTOH 7 — DERET YANG TAMPAK BERGANTI TANDA TETAPI SYARAT MENURUN GAGAL

Misalkan $\sum (-1)^n b_n$ dengan $b_n = \dfrac{1}{n}$ untuk n genap dan $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ untuk n ganjil. Maka $b_n \to 0$, tetapi b_n *tidak menurun*: misalnya $b_3 = \frac{1}{9} < b_4 = \frac{1}{4}$. Jadi uji Leibniz tidak berlaku. Dan deret ini memang **divergen**: bagian positifnya $\sum \frac{1}{2k}$ divergen, sedangkan bagian negatifnya $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ konvergen, sehingga jumlah parsialnya tak terbatas. Moral: syarat menurun bukan formalitas.

4. Taksiran jumlah deret berganti tanda

Karena jumlah s terjepit di antara s_n dan s_{n+1}, jarak $|s - s_n|$ paling besar sama dengan jarak antara keduanya, yaitu b_{n+1}.

TEOREMA (TAKSIRAN DERET BERGANTI TANDA)

Bila $s = \sum (-1)^{n-1} b_n$ memenuhi $b_{n+1} \le b_n$ dan $b_n \to 0$, maka

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}.$$

Yakni galat jumlah parsial tidak melebihi **suku pertama yang dibuang**.

CONTOH 8 — JUMLAH $\sum \frac{(-1)^N}{N!}$ DENGAN GALAT $< 0{,}01$

Cari n sehingga $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} < 0{,}01 \iff (n+1)! > 100$. Karena $4! = 24$ dan $5! = 120$, cukup $n+1 = 5$, yaitu $n = 4$. Maka

$$s_4 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} = 0{,}375.$$

Galat $\le \frac{1}{120} \approx 0{,}0083 < 0{,}01$. Memang nilai sebenarnya $0{,}3679$ berjarak $0{,}0071$ dari $0{,}375$. ✓

CONTOH 9 — $\sum \frac{(-1)^{N+1}}{N^2}$ HINGGA TIGA DESIMAL

Perlu $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} < 0{,}001 \iff (n+1)^2 > 1000 \iff n+1 \ge 32$, jadi $n = 31$. $s_{31} \approx 0{,}82297$; nilai sebenarnya $\pi^2/12 \approx 0{,}82247$, selisih $5 \times 10^{-4} < \frac{1}{32^2} \approx 9{,}8 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 10 — HARMONIK BERGANTI TANDA KONVERGEN LAMBAT

Bahkan 1000 suku hanya memberi $s_{1000} \approx 0{,}69265$ vs $\ln 2 = 0{,}69315$; galat $\approx 5 \times 10^{-4} \approx b_{1001} \approx 10^{-3}$. Deret berganti tanda dengan $b_n \sim 1/n$ memerlukan banyak suku.

TRIK

Tebakan lebih baik: nilai tengah $\frac{s_n + s_{n+1}}{2}$ biasanya jauh lebih dekat ke jumlah sebenarnya daripada s_n.

5. Kesalahan umum

- Menganggap deret berganti tanda otomatis konvergen. Contoh 2 menunjukkan sebaliknya.
- Lupa memeriksa bahwa b_n benar-benar *menurun* (bukan hanya menuju 0).
- Memakai taksiran b_{n+1} untuk deret yang bukan berganti tanda.
- Menyimpulkan divergen dari kegagalan syarat menurun (uji ini hanya cukup, bukan perlu).

6. Ringkasan

- Leibniz: b_n menurun dan $\to 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} b_n$ konvergen.
- Galat $\le$ suku pertama yang dibuang b_{n+1}.
- Harmonik berganti tanda konvergen (ke $\ln 2$), sedangkan harmonik biasa divergen; ini mengantar pada konsep kekonvergenan bersyarat di 11.6.

11.6 Kekonvergenan Mutlak, Uji Rasio dan Akar

Deret harmonik berganti tanda konvergen, tetapi deret harmonik biasa divergen. Perbedaan ini ternyata penting: ada dua "tingkat" kekonvergenan. Subbab ini merumuskannya dan memberi dua uji yang sangat kuat untuk deret dengan faktorial atau pangkat: **uji rasio** dan **uji akar**.

1. Kekonvergenan mutlak dan bersyarat

DEFINISI

- $\sum a_n$ **konvergen mutlak** (*absolutely convergent*) jika deret nilai mutlaknya $\sum |a_n|$ konvergen.
- $\sum a_n$ **konvergen bersyarat** (*conditionally convergent*) jika $\sum a_n$ konvergen tetapi $\sum |a_n|$ divergen.

Untuk deret dengan suku positif, kedua gagasan itu sama. Contoh:

- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konvergen mutlak (karena $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen).
- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergen bersyarat (konvergen menurut uji Leibniz, tetapi $\sum \frac{1}{n}$ divergen).

TEOREMA

Jika $\sum |a_n|$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen. (Kekonvergenan mutlak $\Rightarrow$ kekonvergenan.)

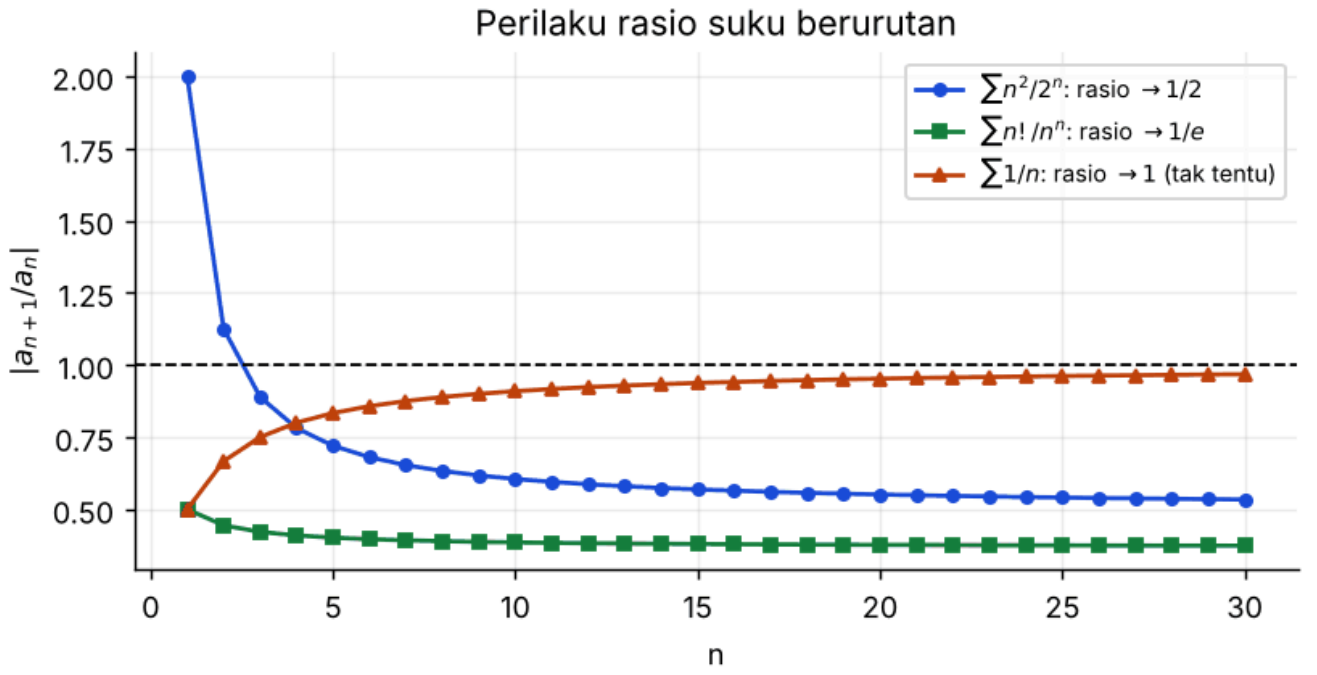
Bukti. Karena $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, maka $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$. Deret $\sum 2|a_n|$ konvergen, jadi $\sum (a_n + |a_n|)$ konvergen menurut uji perbandingan. Lalu $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ adalah selisih dua deret konvergen. ■

CONTOH 1 — $\sum \frac{\cos N}{N^2}$

Suku berganti tanda secara tak beraturan, sehingga uji Leibniz tidak berlaku. Tetapi $|\cos n| \le 1$, jadi $\left|\dfrac{\cos n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, dan $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka $\sum |\cos n/n^2|$ konvergen (uji perbandingan), dan deret asal konvergen mutlak, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}3241$.)

2. Uji rasio

Ide dasarnya dari deret geometri: bila rasio suku berurutan mendekati bilangan $L < 1$, deretnya "hampir geometri" dengan rasio L, jadi konvergen.



Rasio $|a_{n+1}/a_n|$ untuk tiga deret: menuju $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, dan 1 (tak tentu).

TEOREMA (UJI RASIO)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak (jadi konvergen).
2. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji **tidak menyimpulkan apa-apa**.

Bukti (kasus 1 dan 2)

(1) Pilih r dengan $L < r < 1$. Ada N sehingga $|a_{n+1}| < r|a_n|$ untuk $n \geq N$. Maka $|a_{N+k}| < r^k|a_N|$, dan $\sum_k r^k|a_N|$ geometri konvergen. Uji perbandingan memberi $\sum |a_n|$ konvergen.
(2) Bila $L > 1$, untuk n besar $|a_{n+1}| > |a_n|$, jadi $|a_n|$ membesar dan $a_n \not\to 0$. Deret divergen menurut uji divergensi. ■

Mengapa $L = 1$ tidak menyimpulkan. Untuk $\sum \frac{1}{n}$ (divergen) dan $\sum \frac{1}{n^2}$ (konvergen), rasio $\to 1$ pada keduanya. Jadi uji rasio tidak dapat membedakan; gunakan uji lain.

Contoh uji rasio

CONTOH 2 — $\sum (-1)^N \dfrac{N^3}{3^N}$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen mutlak. (Jumlahnya $\approx 0{,}0234$.)

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{N^N}{N!}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen. (Rasio $2{,}59$ di $n = 10$, $2{,}70$ di $n = 100$, menuju e.)

CONTOH 4 — $\sum \dfrac{2^N N!}{N^N}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n n!} = 2 \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{2}{(1+1/n)^n} \to \dfrac{2}{e} \approx 0{,}736 < 1$. Konvergen.

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{(2N)!}{(N!)^2}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4 > 1$. Divergen.

CONTOH 6 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$ DAN JUMLAHNYA

Rasio $= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \to \dfrac{1}{2}$, jadi konvergen. Jumlahnya tepat 6 (dapat diturunkan dengan deret pangkat; lihat 11.9).

CONTOH 7 — UJI RASIO GAGAL

$\sum \dfrac{1}{n^2+1}$: rasio $= \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \to 1$. Tak ada kesimpulan; gunakan perbandingan dengan $\sum \frac{1}{n^2}$.

KAPAN MEMAKAI UJI RASIO

Cocok untuk suku yang memuat **faktorial**, **pangkat** c^n, atau hasil kali, karena faktor-faktornya saling membatalkan pada a_{n+1}/a_n. Tidak berguna untuk suku rasional murni ($L = 1$ selalu).

3. Uji akar

TEOREMA (UJI AKAR)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak.
2. Jika $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji tidak menyimpulkan.

Bukti (kasus 1). Pilih r dengan $L < r < 1$. Untuk $n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, yaitu $|a_n| < r^n$. Bandingkan dengan geometri $\sum r^n$. Kasus 2: $|a_n| > 1$ tak terhingga sering, jadi $a_n \not\to 0$. ■

CONTOH 8 — $\sum \left(\frac{N}{2N+1}\right)^N$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2} < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 9 — $\sum \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N^2}$

$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen.

CONTOH 10 — $\sum \left(\frac{2N+3}{3N+2}\right)^N$

$\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2n+3}{3n+2} \to \dfrac{2}{3} < 1$. Konvergen.

HUBUNGAN RASIO DAN AKAR

Bila $\lim |a_{n+1}/a_n|$ ada, maka $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ ada dan sama. Uji akar sedikit lebih kuat, tetapi uji rasio biasanya lebih mudah dihitung. Untuk suku berbentuk $(\cdots)^n$, uji akar lebih cocok.

4. Penyusunan ulang suku (rearrangement)

Pada jumlah berhingga, urutan penjumlahan tidak berpengaruh. Pada deret tak hingga, bergantung pada jenis kekonvergenan:

- **Konvergen mutlak:** penyusunan ulang suku *tidak* mengubah jumlah (Dirichlet).
- **Konvergen bersyarat:** penyusunan ulang dapat menghasilkan jumlah berbeda, bahkan sembarang bilangan real atau divergen (Teorema Riemann).

CONTOH 11 — MENYUSUN ULANG HARMONIK BERGANTI TANDA

Jumlah aslinya $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$. Susun ulang dengan pola "dua suku positif, satu suku negatif":

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Hitungan numerik dengan dua juta kelompok memberi $\approx 1{,}03972$, yaitu $\frac{3}{2}\ln 2$. Jadi suku-suku yang sama, urutan berbeda, jumlah berbeda: $\frac{3}{2}\ln 2 \neq \ln 2$.

Alasan: $\sum_{\text{positif}} = \infty$ dan $\sum_{\text{negatif}} = -\infty$. Kita dapat "memborong" suku positif sampai melewati target, lalu suku negatif sampai di bawahnya, berulang, sehingga jumlah parsial menuju target mana saja.

5. Peta uji sejauh ini

Ciri deret	Uji
Suku tidak menuju 0	Uji divergensi
Geometri / deret-p	Rumus langsung
Teleskop	Jumlah parsial
$f(n)$ mudah diintegralkan	Uji integral
Rasional, akar, pangkat	Perbandingan / perbandingan limit
Berganti tanda	Leibniz; periksa kemutlakan
Faktorial, c^n, hasil kali	Uji rasio
Berbentuk $(\ldots)^n$	Uji akar

6. Kesalahan umum

- Menyimpulkan konvergen dari $L = 1$ pada uji rasio atau akar.
- Menganggap kekonvergenan bersyarat sama baiknya dengan mutlak: hanya yang mutlak boleh disusun ulang bebas.
- Lupa nilai mutlak pada rasio untuk deret berganti tanda.
- Salah menghitung a_{n+1}: ganti *setiap* n dengan $n + 1$, termasuk faktorial dan pangkat.

7. Ringkasan

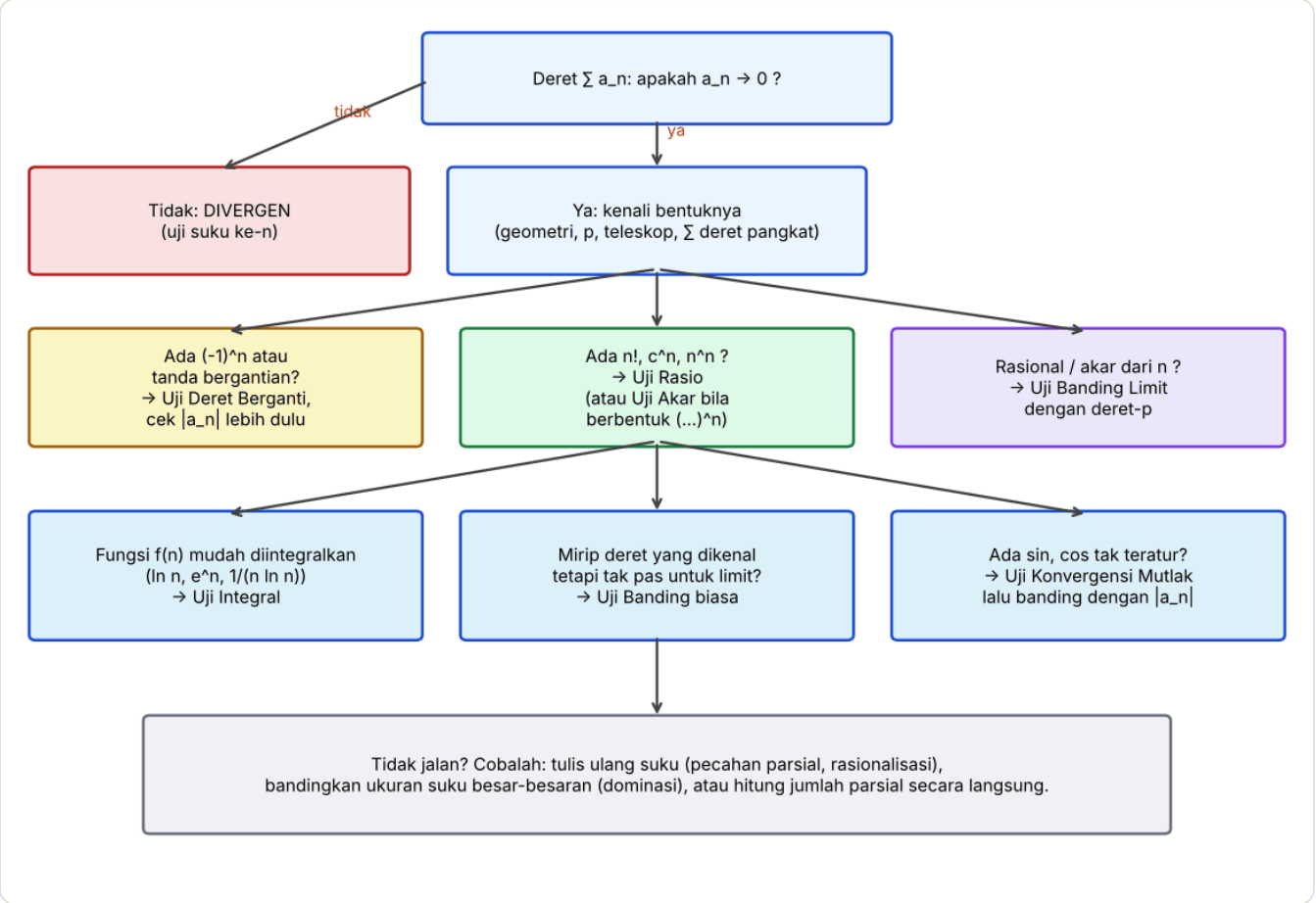
- Mutlak $\Rightarrow$ konvergen; sebaliknya tidak berlaku (harmonik berganti tanda).
- Uji rasio: $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$; < 1 konvergen mutlak, > 1 divergen, $= 1$ tak tentu.
- Uji akar: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, aturan sama.
- Penyusunan ulang aman hanya untuk deret konvergen mutlak.

Subbab berikutnya, 11.7, merangkum semua uji menjadi strategi memilih.

11.7 Strategi Menguji Deret

Kita sudah punya banyak uji kekonvergenan: uji divergensi, integral, perbandingan, perbandingan limit, Leibniz, rasio, akar, ditambah deret geometri, deret-p, dan deret teleskop. Kesulitan baru muncul: *uji mana yang dipakai untuk deret tertentu?* Tidak ada resep mekanis yang selalu benar, tetapi ada urutan pertimbangan yang hampir selalu menolong. Subbab ini merangkumnya dan melatihnya pada banyak contoh.

1. Langkah-langkah strategi



Alur keputusan: mulai dari uji divergensi, lalu kenali bentuk suku.

1. **Cek dulu apakah $a_n \to 0$.** Bila tidak (atau limit tidak ada), deret divergen menurut uji divergensi. Langkah ini cepat dan sering menyelesaikan soal.
2. **Kenali deret standar.**
   - Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen bila $|r| < 1$, jumlah $\frac{a}{1-r}$.
   - Deret-p $\sum \frac{1}{n^p}$: konvergen bila $p > 1$.
   - Teleskop: uraikan dengan pecahan parsial, lihat suku yang bertahan.

3. **Suku rasional atau memuat akar dari polinomial** $\Rightarrow$ uji perbandingan limit dengan $\frac{1}{n^p}$ dari suku dominan; bila ada pertidaksamaan jelas, perbandingan langsung.
4. **Berganti tanda** ($(-1)^n$) $\Rightarrow$ uji Leibniz; bila gagal, periksa uji rasio atau uji divergensi. Lalu periksa kemutlakan: apakah $\sum |a_n|$ konvergen?
5. **Faktorial, pangkat c^n, atau hasil kali/pembagian dalam n** $\Rightarrow$ uji rasio. Bila seluruh suku berpangkat n: uji akar.
6. **Suku $a_n = f(n)$ dengan f mudah diintegralkan dan menurun** $\Rightarrow$ uji integral (misalnya $\frac{1}{n(\ln n)^p}$, ne^{-n^2}).
7. **Bila semua gagal**: tulis ulang suku (rasionalkan akar, pecahan parsial, identitas trigonometri), atau cari batas dengan $|\sin| \le 1$, $\ln n < n^{\varepsilon}$.

DUA JEBAKAN YANG PALING SERING

- Uji rasio dan akar *gagal* ($L = 1$) untuk suku rasional murni. Jangan buang waktu; pakai perbandingan.
- Uji divergensi tidak pernah membuktikan kekonvergenan. $a_n \to 0$ hanyalah syarat perlu.

2. Contoh-contoh

Untuk tiap deret, tentukan konvergen/divergen, dan jelaskan ujinya.

CONTOH 1 — $\sum \dfrac{N-1}{3N+1}$

$\lim \dfrac{n-1}{3n+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Divergen (uji divergensi).

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{\sqrt{N^3+1}}{3N^3+4N^2+2}$

Suku dominan: $\dfrac{n^{3/2}}{3n^3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Bandingkan limit dengan $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{1}{3}$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{3}{2} > 1$ konvergen, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}591$.)

CONTOH 3 — $\sum NE^{-N^2}$

Fungsi xe^{-x^2} mudah diintegralkan: $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2e}$. Menurun untuk $x \ge 1$. Konvergen (uji integral). Uji rasio juga bisa: $\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n}e^{-2n-1} \to 0$.

CONTOH 4 — $\sum (-1)^N \dfrac{3^N}{N^2 2^N}$

Berganti tanda, tetapi $\dfrac{(3/2)^n}{n^2} \to \infty$ (eksponensial mengalahkan polinomial). Suku tidak menuju 0, jadi divergen. (Uji rasio juga memberi $L = \frac{3}{2} > 1$.)

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{N!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3N+2)}$

Faktorial dan hasil kali: uji rasio. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)}{3(n+1)+2} = \dfrac{n+1}{3n+5} \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen.

CONTOH 6 — $\sum_{N=2}^{\infty} \dfrac{1}{N(\mathrm{LN}\, N)^2}$

Uji integral: dengan $u = \ln x$, $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln x}\Big]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$. Konvergen. Bandingkan dengan $\sum \frac{1}{n \ln n}$ yang divergen: pangkat tambahan pada $\ln n$ mengubah hasil.

CONTOH 7 — $\sum \left(\dfrac{\mathrm{LN}\, N}{N}\right)^N$

Seluruh suku berpangkat n: uji akar. $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\ln n}{n} \to 0 < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 8 — $\sum N \,\mathrm{SIN}\, \dfrac{1}{N}$

$n \sin \frac{1}{n} = \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1 \neq 0$. Divergen (uji divergensi). Sebaliknya $\sum \sin \frac{1}{n}$ divergen karena $\sin(1/n)\big/\frac{1}{n} \to 1$ dan harmonik divergen (perbandingan limit).

CONTOH 9 — $\sum (-1)^N \dfrac{1}{\sqrt{N}+1}$

Berganti tanda dengan $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ menurun dan $\to 0$, jadi konvergen (Leibniz). Kemutlakan: $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ dibandingkan $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (limit 1), divergen. Jadi **konvergen bersyarat**.

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{\mathrm{COS}\, N}{N^{3/2}}$

Tanda tak beraturan. $\left|\dfrac{\cos n}{n^{3/2}}\right| \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$ dan $p = \frac{3}{2} > 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}$ (RASIONALKAN)

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$: deret teleskop dengan $s_n = \sqrt{n+1}-1 \to \infty$. Divergen. (Alternatif: dominan $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $p=\frac{1}{2}$.)

CONTOH 12 — $\sum \dfrac{2^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{2}{n+1} \to 0$. Konvergen (jumlahnya e^2-1 bila mulai dari $n=1$; lihat 11.10).

CONTOH 13 — $\sum \dfrac{\ln N}{N^2}$

$\ln n < \sqrt{n}$ untuk n cukup besar, jadi $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$, konvergen (perbandingan). Atau uji integral seperti pada 11.3.

3. Tabel ringkas

Bentuk deret	Uji pertama
$\sum ar^n$	geometri
$\sum 1/n^p$	deret-p
polinom/polinom	perbandingan limit dengan $1/n^p$
$n!$, c^n, $\binom{2n}{n}$	rasio
$(\dots)^n$	akar
$(-1)^n b_n$	Leibniz, lalu kemutlakan
$f(n)$, f mudah diintegralkan	integral
$a_n \not\to 0$	divergensi

4. Ringkasan

- Selalu mulai dengan uji divergensi dan pengenalan deret standar.

- Pilih uji berdasarkan bentuk suku: rasional (perbandingan), faktorial/eksponensial (rasio), pangkat-n (akar), berganti tanda (Leibniz), integrabel (integral).
- Bila satu uji tidak menyimpulkan, ganti uji; jangan memaksa.

Mulai 11.8, sukunya mengandung peubah x: deret pangkat.

11.8 Deret Pangkat

Sampai sekarang suku deret berupa bilangan. Bila suku-sukunya adalah fungsi dari x, deret itu mendefinisikan sebuah *fungsi* (nilainya jumlah deret untuk tiap x yang membuatnya konvergen). Kelas fungsi yang paling penting dibangun dari pangkat x, mirip polinomial berderajat tak hingga: **deret pangkat**.

1. Definisi

DEFINISI

Deret pangkat dalam x adalah deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

dengan c_n konstanta (**koefisien**). Lebih umum, **deret pangkat dalam** $(x - a)$ (atau berpusat di a):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots.$$

Untuk tiap x tetap, ini adalah deret bilangan biasa yang kekonvergenannya dapat diuji. Pertanyaan kunci: *untuk x mana deretnya konvergen?* Selalu konvergen di pusat $x = a$ (semua suku kecuali c_0 nol).

Contoh paling sederhana: deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ konvergen ke $\dfrac{1}{1-x}$ bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| \geq 1$. Jadi daerah konvergennya adalah *selang* $(-1, 1)$.

2. Uji rasio untuk deret pangkat

CONTOH 1 — $\sum N!\, X^N$

Rasio: $\left|\dfrac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$ bila $x \neq 0$. Divergen untuk semua $x \neq 0$; konvergen hanya di $x = 0$.

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{(X-3)^N}{N}$

$\left|\dfrac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x-3| \to |x-3|$. Konvergen mutlak bila $|x-3|<1$ ($2<x<4$), divergen bila $|x-3|>1$. Titik ujung:

- $x=4$: $\sum \frac{1}{n}$, harmonik, divergen.
- $x=2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen (Leibniz).

Jadi daerah konvergen adalah $[2,4)$: ujung kiri ikut, ujung kanan tidak.

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{X^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$ untuk *setiap* x. Konvergen untuk semua bilangan real. (Ini deret untuk e^x.)

3. Teorema radius kekonvergenan

TEOREMA

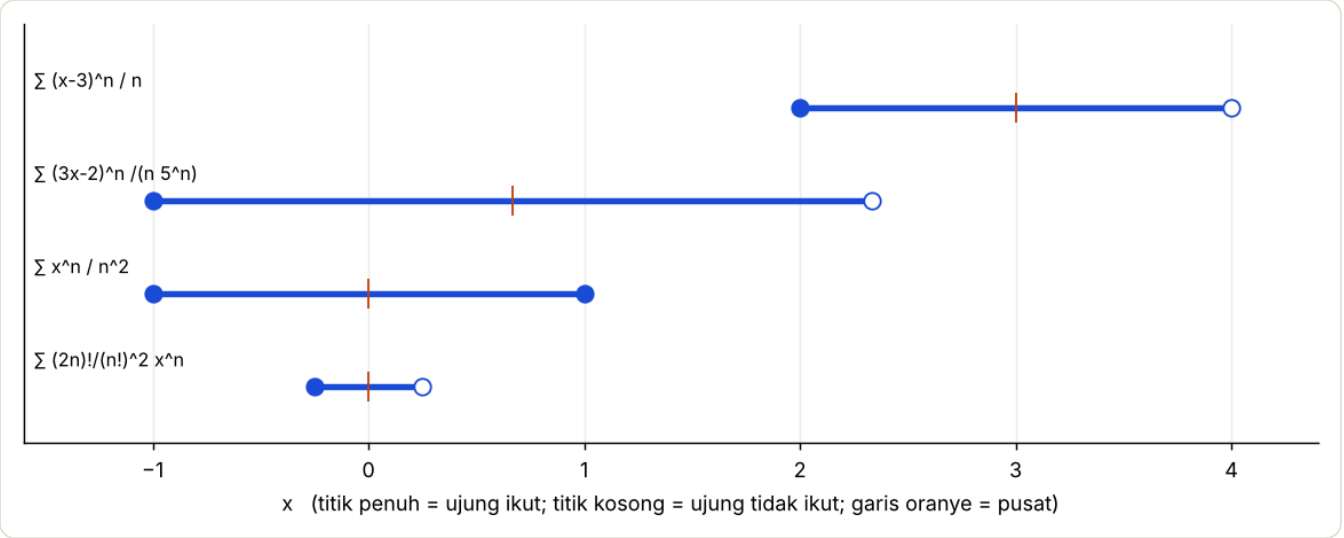
Untuk deret pangkat $\sum c_n(x-a)^n$, hanya ada tiga kemungkinan:

1. deret konvergen hanya di $x=a$;
2. deret konvergen untuk semua x;
3. ada bilangan $R>0$ sehingga deret konvergen mutlak bila $|x-a|<R$ dan divergen bila $|x-a|>R$.

Bilangan R disebut **radius kekonvergenan** ($R=0$ pada kasus 1, $R=\infty$ pada kasus 2). Himpunan x tempat deret konvergen disebut **selang kekonvergenan**: $(a-R, a+R)$ ditambah mungkin salah satu atau kedua titik ujung.

Gagasan bukti. Jika deret konvergen di $x=b$, maka suku-suku $c_n b^n$ terbatas; untuk $|x|<|b|$, $|c_n x^n| \le M\,|x/b|^n$, yaitu dibatasi oleh deret geometri konvergen. Jadi kekonvergenan di satu titik memaksa kekonvergenan mutlak di semua titik yang lebih dekat ke pusat.

Cara menghitung R. Terapkan uji rasio (atau akar) pada $|c_n(x-a)^n|$; bila $\lim\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$, maka $R = \dfrac{1}{L}$ (dengan $R=\infty$ bila $L=0$, $R=0$ bila $L=\infty$). **Titik ujung harus diperiksa tersendiri**, karena uji rasio selalu gagal di sana ($L=1$).



Selang kekonvergenan beberapa deret. Titik penuh = ujung ikut, titik kosong = tidak; garis oranye menandai pusat.

4. Contoh mencari selang

CONTOH 4 — $\sum \frac{X^N}{N^2}$

Rasio koefisien $\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, jadi $R = 1$. Ujung: $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergen. Selang $[-1, 1]$.

CONTOH 5 — $\sum \frac{(3X-2)^N}{N\,5^N}$

Uji rasio: $\frac{|3x-2|}{5} < 1 \iff |3x-2| < 5 \iff -1 < x < \frac{7}{3}$. Ujung:

- $x = -1$: $3x - 2 = -5$, deret $\sum \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen.
- $x = \frac{7}{3}$: $3x - 2 = 5$, deret $\sum \frac{1}{n}$, divergen.

Selang $[-1, \frac{7}{3})$. Perhatikan: pusatnya $x = \frac{2}{3}$ dan $R = \frac{5}{3}$ (bukan 5; faktor 3 pada $3x$ harus dikeluarkan: $|3x-2| = 3|x - \frac{2}{3}|$).

CONTOH 6 — FUNGSI BESSEL $J_0(X) = \sum \frac{(-1)^N X^{2N}}{2^{2N}(N!)^2}$

Rasio: $\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0$. Konvergen untuk semua x ($R = \infty$). Fungsi ini muncul pada getaran membran lingkaran (drum) dan penyebaran panas dalam silinder.

CONTOH 7 — KOEFISIEN BINOMIAL TENGAH, $\sum \binom{2N}{N} X^N$

Koefisien $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$; $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$, jadi $R = \frac{1}{4}$. Ujung $x = \frac{1}{4}$: suku $\binom{2n}{n}4^{-n} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (tidak menuju 0 secepat $1/n$); jumlahnya diverge karena $\sum n^{-1/2}$ divergen. Ujung $x = -\frac{1}{4}$: berganti tanda, $b_n = \binom{2n}{n}4^{-n}$ menurun (rasio $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$) dan $\to 0$, jadi konvergen. Selang $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

CONTOH 8 — HANYA ADA PANGKAT GENAP: $\sum \dfrac{X^{2N}}{4^N}$

Ini geometri dengan rasio $\dfrac{x^2}{4}$: konvergen bila $x^2 < 4$, yaitu $|x| < 2$. Ujung $x = \pm 2$: suku $= 1$, divergen. Selang $(-2, 2)$, $R = 2$. (Uji rasio pada koefisien saja salah karena banyak koefisien nol; gunakan uji rasio pada *suku*.)

5. Turunan dan integral deret pangkat

TEOREMA (DIFERENSIASI DAN INTEGRASI SUKU DEMI SUKU)

Jika $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ mempunyai radius $R > 0$, maka f terdiferensialkan pada $(a - R, a + R)$, dan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \qquad \int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Kedua deret ini mempunyai radius kekonvergenan yang *sama* dengan R (selang di titik ujung boleh berubah).

Artinya deret pangkat boleh diturunkan dan diintegralkan seperti polinomial, tetapi hanya di dalam selang $|x - a| < R$.

CONTOH 9 — TURUNAN DERET GEOMETRI

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pada $|x| < 1$. Turunkan: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. Ujung $x = \pm 1$ kini divergen (suku tidak menuju 0), jadi selang tetap $(-1, 1)$.

CONTOH 10 — TURUNAN E^X

Misalkan $f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ (Contoh 3). $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$. Jadi $f' = f$ dan $f(0) = 1$, maka $f(x) = e^x$. Ini penjelasan mengapa deret itu mewakili fungsi eksponensial.

CONTOH 11 — MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN DERET

Cari deret pangkat solusi $y'' = -y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Tulis $y = \sum c_n x^n$; $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$. Menyamakan koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = -c_n$. Dari $y(0) = 0$: $c_0 = 0$; $y'(0) = 1$: $c_1 = 1$. Maka $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{6}$, $c_5 = \frac{1}{120}$, ... yaitu $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x$.

6. Kesalahan umum

- Lupa memeriksa titik ujung selang.
- Salah mengira radius pada deret seperti $\sum (3x-2)^n$: ubah ke bentuk $|x - a| < R$.
- Memakai rasio koefisien bila ada koefisien nol; pakai rasio suku lengkap.
- Menganggap selang turunan sama persis dengan selang fungsi (titik ujung bisa berubah).

7. Ringkasan

- Deret pangkat: $\sum c_n (x-a)^n$; selang kekonvergenannya berpusat di a dengan radius $R \in [0, \infty]$.
- Hitung R dengan uji rasio/akar; periksa ujung dengan uji lain.
- Boleh diturunkan dan diintegralkan suku demi suku dalam $|x - a| < R$.

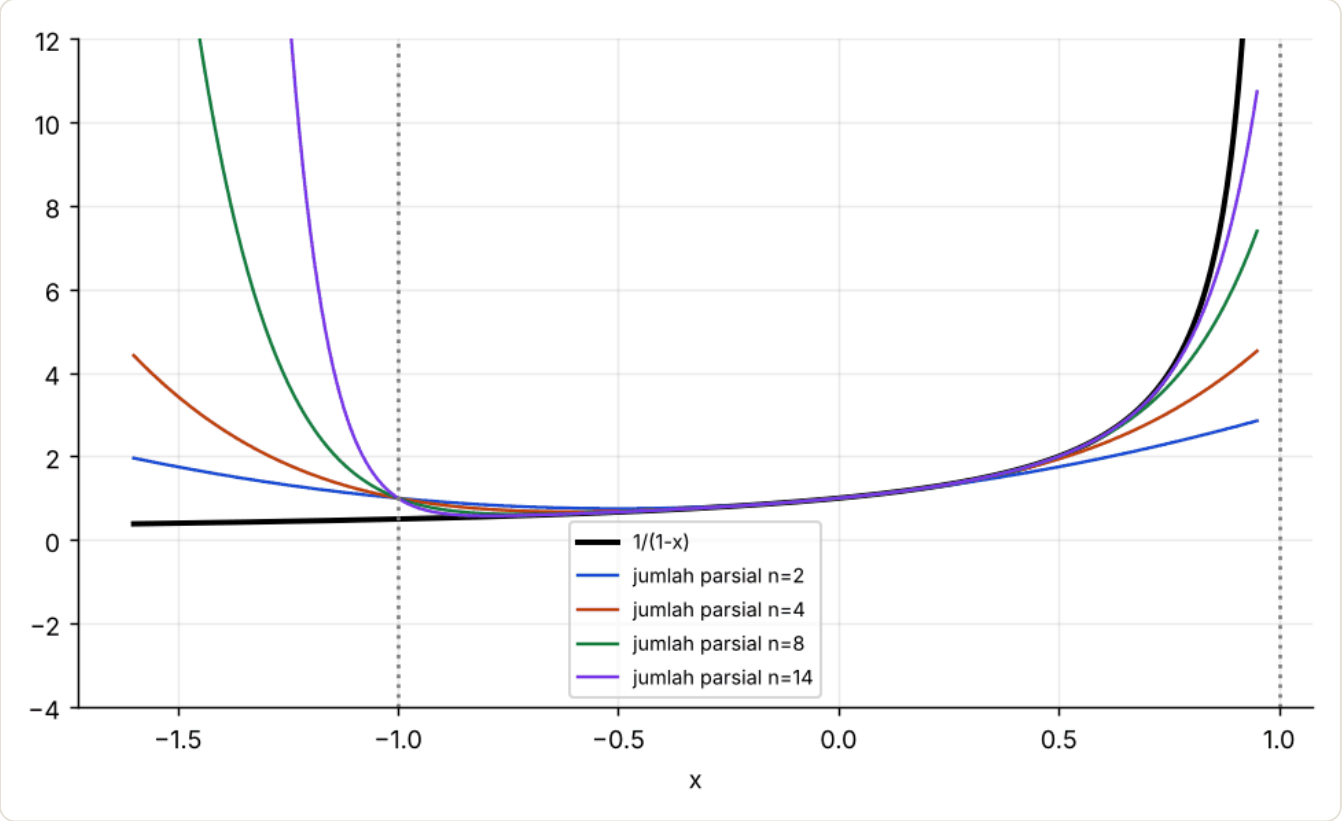
Selanjutnya 11.9: menyatakan fungsi-fungsi sebagai deret pangkat.

11.9 Representasi Fungsi sebagai Deret Pangkat

Pada 11.8 kita mulai dari deret pangkat dan bertanya fungsi apa yang diwakilinya. Sekarang kita membalik arah: *diberikan sebuah fungsi, nyatakan sebagai deret pangkat.* Alasan praktisnya kuat: deret pangkat dapat diintegralkan, diturunkan, dan dihitung nilainya dengan hanya penjumlahan dan perkalian. Pada subbab ini kita memakai satu "bahan dasar" saja: **deret geometri**, ditambah turunan dan integral suku demi suku.

1. Bahan dasar: deret geometri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$



Jumlah parsial mendekati $\frac{1}{1-x}$ di dalam $(-1, 1)$ dan menyimpang di luarnya.

Ide umum: ubah fungsi menjadi bentuk $\dfrac{\text{sesuatu}}{1-(\text{rasio})}$, lalu ganti dengan $\sum(\text{rasio})^n$. Kekonvergenan terjadi bila $|\text{rasio}| < 1$.

2. Substitusi dan perkalian

CONTOH 1 — $\dfrac{1}{1+X^2}$

Ganti x dengan $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Radius $R = 1$ (karena $|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$).

CONTOH 2 — $\dfrac{1}{2+X}$

Keluarkan faktor agar menjadi bentuk $\frac{1}{1-r}$: $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x/2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$. Konvergen bila $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, jadi $R = 2$. Nilai $R = 2$ wajar: pembagi $2 + x$ nol di $x = -2$, jarak 2 dari pusat 0.

CONTOH 3 — $\dfrac{X^3}{X+2}$

Dari Contoh 2: $\dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$. Radius tetap 2 (perkalian dengan x^3 tidak mengubah R). Tulisan beberapa suku: $\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} - \cdots$.

CONTOH 4 — PECAHAN PARSIAL: $\dfrac{3}{(1-X)(2+X)}$

Uraikan: $\dfrac{3}{(1-x)(2+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2+x}$ (cek: $\frac{(2+x)+(1-x)}{(1-x)(2+x)} = \frac{3}{\cdots}$ ✓). Deret: $\sum x^n + \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$, berlaku untuk $|x| < 1$ (irisan $|x| < 1$ dan $|x| < 2$).

3. Turunan dan integral suku demi suku

Berdasarkan 11.8, bila $f = \sum c_n x^n$ (radius R), maka f' dan $\int f$ diperoleh dengan menurunkan/mengintegralkan tiap suku, dengan radius yang sama.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1-X)^2}$

Turunkan $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x| < 1$.

CONTOH 6 — $\mathrm{LN}(1+X)$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ($|x| < 1$). Integralkan dari 0 ke x:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Konstanta integrasi nol karena $\ln 1 = 0$ di $x = 0$. Radius 1. Di $x = 1$ deret menjadi harmonik berganti tanda yang konvergen; sehingga $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ (hasil ini dibuktikan di 11.10).

CONTOH 7 — $\mathrm{ARCTAN}\,X$

Integralkan Contoh 1: $\arctan x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots$, $|x| < 1$. Di $x = 1$ deret konvergen (Leibniz). Hasilnya, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (\text{deret Gregory–Leibniz}).$$

Konvergensinya sangat lambat: 1000 suku hanya memberi akurasi sekitar 10^{-3}. Pendekatan lebih cepat: $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$, dan deret $\arctan x$ di $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ konvergen cepat.

CONTOH 8 — $\mathrm{LN}\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$

$\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2} = 2\sum x^{2n}$. Integralkan: $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$. Berguna untuk menghitung logaritma: bila $x = \frac{1}{3}$ maka $\frac{1+x}{1-x} = 2$, sehingga $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots\right) \approx 0{,}6931$ dengan beberapa suku saja.

4. Menjumlahkan deret bilangan

Bila kita tahu fungsi untuk sebuah deret pangkat, kita dapat memperoleh jumlah deret bilangan dengan mensubstitusi x.

CONTOH 9 — $\sum \dfrac{N}{2^N}$

Dari Contoh 5: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Pada $x = \frac{1}{2}$ (di dalam $|x| < 1$):

$$\sum \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2.$$

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$

Kalikan $\sum nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ dengan x setelah menurunkan: $\sum n^2 x^n = x\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \dfrac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$. Jadi $\sum \dfrac{n^2}{2^n} = 6$ (ini yang kita pakai di 11.6).

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{(-1)^N}{N\,2^N}$

Dari deret $\ln(1+x)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n} = \ln\frac{3}{2}$. Maka $\sum \dfrac{(-1)^n}{n2^n} = -\ln\frac{3}{2} \approx -0{,}4055$.

5. Mengintegralkan fungsi tanpa antiturunan elementer

CONTOH 12 — $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{DX}{1+X^4}$

Ganti x dengan x^4 pada $\frac{1}{1+u} = \sum(-u)^n$: $\frac{1}{1+x^4} = \sum(-1)^n x^{4n}$. Integralkan suku demi suku:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots$$

Deretnya berganti tanda dengan suku menurun, jadi galat $\le$ suku pertama yang dibuang. Dengan tiga suku: $0{,}5 - 0{,}00625 + 0{,}000217 \approx 0{,}49397$; galat $< \frac{1}{13\cdot 2^{13}} \approx 9{,}4 \times 10^{-6}$. (Hasil numerik $0{,}493958$.)

CONTOH 13 — ARCTAN DI TITIK TERTENTU

$\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} - \cdots \approx 0{,}4636$ (delapan suku memberi $0{,}463647$); dengan $\arctan \frac{1}{3} \approx 0{,}3217$, jumlah keduanya $0{,}7854 = \frac{\pi}{4}$ ✓.

6. Kesalahan umum

- Lupa konstanta integrasi: tentukan dengan mensubstitusi titik di mana nilainya diketahui.
- Mengubah indeks saat menurunkan: $\sum_{n=0}$ menjadi $\sum_{n=1}$ (suku konstan hilang).
- Menyatakan radius tanpa memeriksa persyaratan $|\text{rasio}| < 1$ pada bentuk yang sudah disubstitusi.
- Memakai deret di luar selang kekonvergenannya.

7. Ringkasan

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum x^n$ adalah dasar; substitusi dan manipulasi aljabar menghasilkan banyak deret lain.
- Turunan/integral suku demi suku menghasilkan $\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ dan lainnya.
- Deret pangkat memudahkan menghitung jumlah deret bilangan dan integral tanpa antiturunan elementer.

Pada 11.10 kita menemukan cara *langsung* menghitung koefisien deret dari turunan fungsi: deret Taylor.

11.10 Deret Taylor dan Maclaurin

Pada 11.9 kita memperoleh deret pangkat sebuah fungsi dengan trik aljabar yang hanya berhasil untuk fungsi tertentu. Sekarang kita berangkat dari pertanyaan umum: *jika f dapat dinyatakan sebagai deret pangkat, bagaimana koefisiennya ditentukan?* Jawabannya sangat rapi: koefisien ditentukan oleh turunan f di pusat.

1. Koefisien dari turunan

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$. Substitusi $x = a$: $f(a) = c_0$. Turunkan suku demi suku (11.8):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \Rightarrow f'(a) = c_1,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2\, c_3(x-a) + \cdots \Rightarrow f''(a) = 2c_2,$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\, c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\, c_n.$$

TEOREMA

Jika f mempunyai representasi deret pangkat di sekitar a, yaitu $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Representasi seperti itu, bila ada, **tunggal**.

2. Deret Taylor dan Maclaurin

DEFINISI

Untuk fungsi f yang mempunyai turunan semua orde di a, **deret Taylor** f di a adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

Untuk $a = 0$, disebut **deret Maclaurin**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

DUA HAL YANG HARUS DIBEDAKAN

- Deret Taylor dapat *dibentuk* dari fungsi apa pun yang cukup mulus. Pertanyaannya adalah apakah deret itu *konvergen ke* f.
- Ada fungsi mulus yang deret Taylornya konvergen tetapi ke fungsi lain. Contoh klasik: $f(x) = e^{-1/x^2}$ ($f(0) = 0$) yang semua turunannya di 0 bernilai 0, sehingga deret Maclaurinnya adalah deret nol, padahal $f(x) \neq 0$ untuk $x \neq 0$.

3. Kapan deret Taylor sama dengan fungsi?

Misalkan $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ adalah **polinomial Taylor** derajat n dan $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ adalah **sisa**. Maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$ tepat bila $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Teorema ini dibahas lebih rinci di 11.11. Dengan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ untuk semua x (suku umum deret konvergen $\sum \frac{x^n}{n!}$, jadi menuju nol), kita pakai untuk fungsi e^x, $\sin x$, $\cos x$.

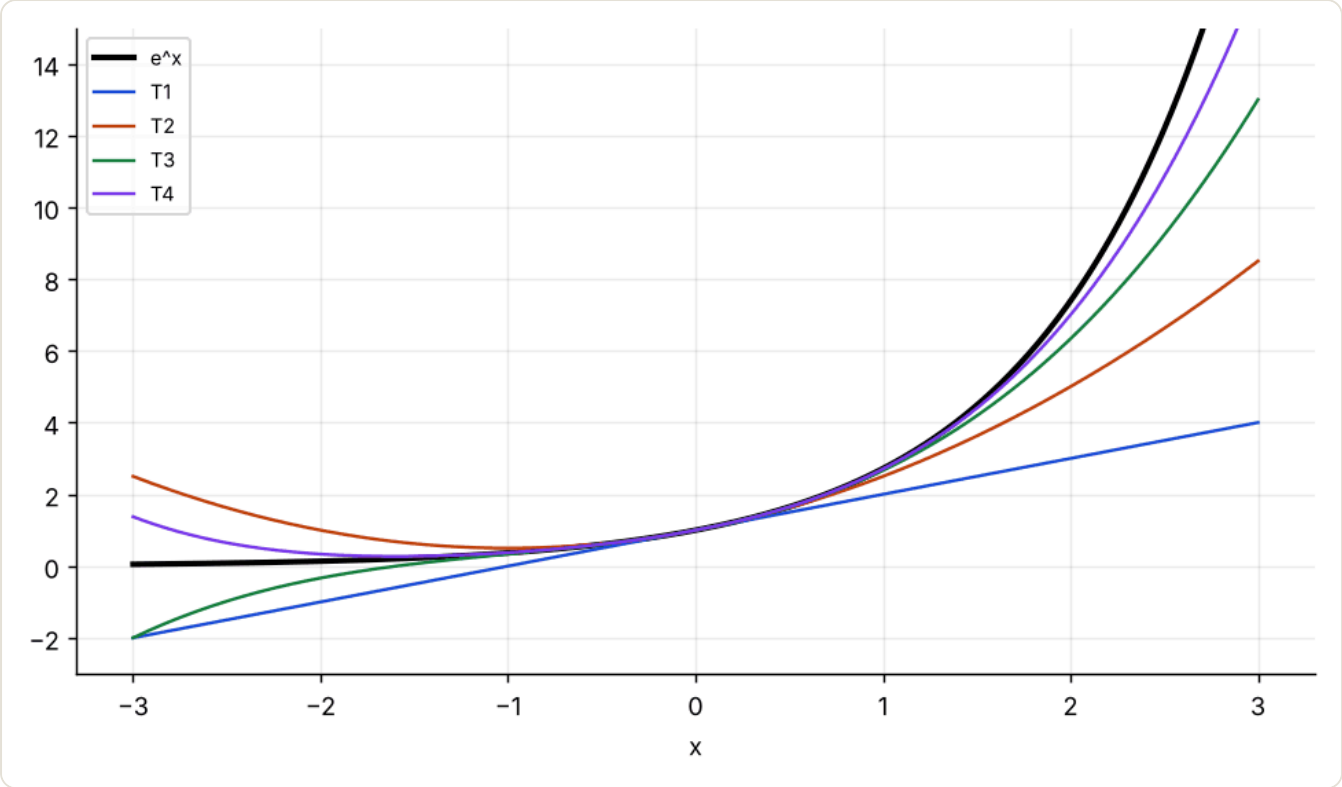
4. Deret Maclaurin yang harus dikuasai

CONTOH 1 — E^X

$f^{(n)}(x) = e^x$, jadi $f^{(n)}(0) = 1$. Maka $c_n = \frac{1}{n!}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{semua } x).$$

Untuk sembarang x, pada interval antara 0 dan x berlaku $e^t \le e^{|x|} =: M$, maka $|R_n(x)| \le \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Jadi deret konvergen ke e^x di mana-mana. Khususnya $e = \sum \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots$



Polinomial Taylor $T_1, \ldots, T_4$ menghampiri e^x makin baik di sekitar 0.

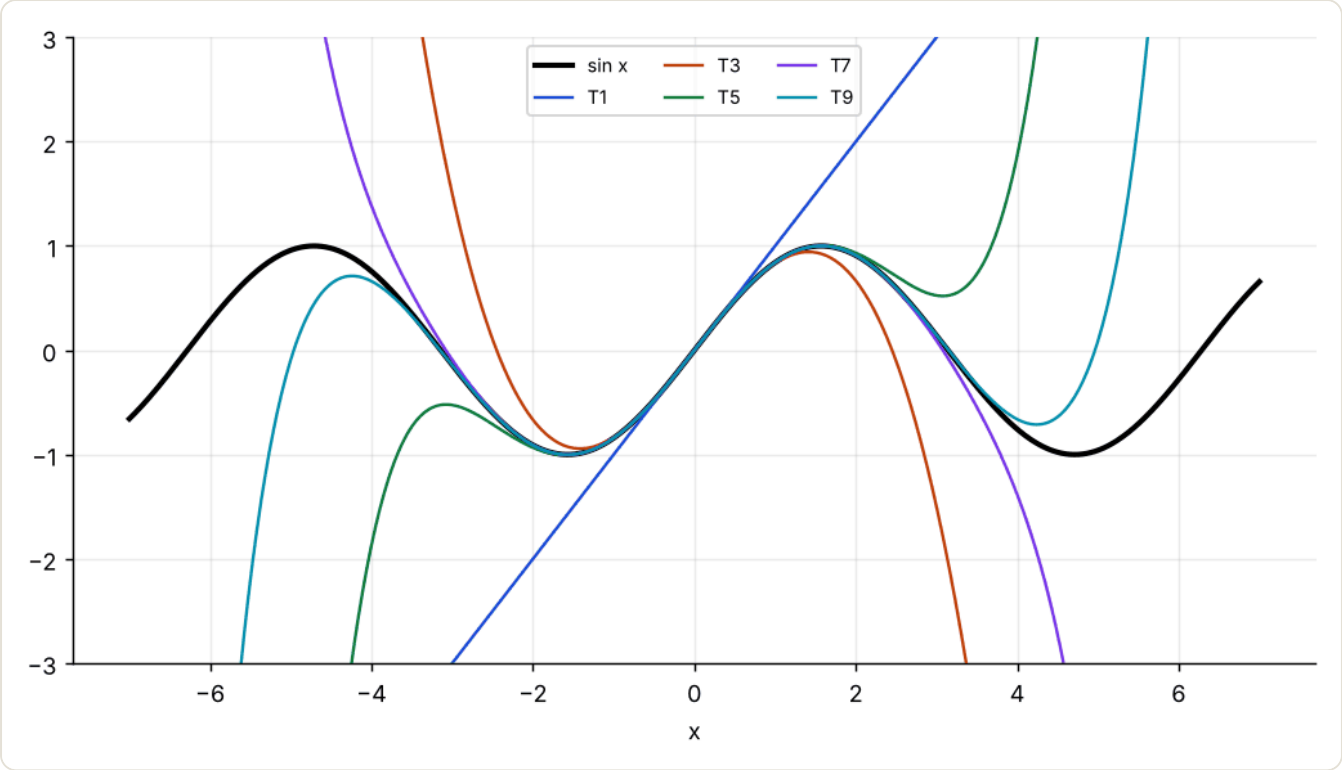
CONTOH 2 — $\sin x$ DAN $\cos x$

Turunan $\sin x$ berulang dengan periode 4: $\sin, \cos, -\sin, -\cos$; di 0 nilainya $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$. Jadi hanya pangkat ganjil yang muncul:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Karena semua turunan dibatasi oleh $M = 1$, $|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$; berlaku untuk semua x. Dengan menurunkan suku demi suku:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$



T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 dari $\sin x$; makin tinggi derajat, makin lebar selang yang cocok.

CONTOH 3 — $\ln(1+X)$ DAN $\arctan X$

Dari 11.9: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ $(-1 < x \le 1)$ dan $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1 \le x \le 1)$. Ini sekaligus deret Maclaurinnya (keunikan). Di $x = 1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ dan $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$.

5. Deret binomial

Untuk bilangan real k sembarang, $f(x) = (1+x)^k$. Turunannya: $f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$. Jadi

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots, \qquad |x| <$$

dengan $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$. Radius kekonvergenan 1 (uji rasio: $\left|\frac{k-n}{n+1}\right| |x| \to |x|$). Bila k bilangan bulat tak negatif, deret berhenti dan menjadi teorema binomial biasa.

CONTOH 4 — $\sqrt{1+X}$

$k = \frac{1}{2}$: koefisien $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{5}{128}, \ldots$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

Cek: $x = 0{,}1$: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881$; empat suku memberi $1 + 0{,}05 - 0{,}00125 + 0{,}0000625 = 1{,}0488125$ ✓.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1+X)^2}$ DAN $\dfrac{1}{\sqrt{1-X^2}}$

(a) $k = -2$: koefisien $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$, jadi $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum (-1)^n (n+1) x^n$ (sesuai 11.9).

(b) $k = -\frac{1}{2}$ dengan x diganti $-x^2$: $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$, $|x| < 1$. Integralkan: $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + \dfrac{35x^9}{1152} + \cdots$

6. Membuat deret baru dari deret yang diketahui

CONTOH 6 — SUBSTITUSI: E^{-X^2}

Ganti x dengan $-x^2$ pada deret e^x: $e^{-x^2} = \sum \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$ (semua x). Integralkan untuk fungsi galat:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

Empat suku pertama sampai $\frac{1}{216}$ memberi $0{,}74749$; galat $\le \frac{1}{5!\cdot 11} \approx 7{,}6 \times 10^{-4}$. Hasil sebenarnya $0{,}746824$; selisih $6{,}7 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 7 — PERKALIAN: $E^X \operatorname{SIN} X$

Kalikan deret dan kumpulkan pangkat yang sama:

$$\left(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} - \cdots\right) = x + x^2 + \tfrac{x^3}{3} + 0\cdot x^4 - \tfrac{x^5}{30} -$$

Koefisien x^3: $\frac{1}{2}\cdot 1$ (dari $\frac{x^2}{2}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$ ✓. Koefisien x^4: $\frac{1}{6}\cdot 1$ (dari $\frac{x^3}{6}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$ (dari $x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right)$) $= 0$ ✓.

CONTOH 8 — PEMBAGIAN: $\operatorname{TAN} X$

Tulis $\tan x = \sin x / \cos x = c_1 x + c_3 x^3 + \cdots$, lalu selesaikan $(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots)(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$. Samakan koefisien: $c_1 = 1$; $c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$; $c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120} \Rightarrow c_5 = \frac{2}{15}$. Maka

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad \left(|x| < \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Radiusnya $\frac{\pi}{2}$ karena $\tan x$ tak terdefinisi di $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Menghitung limit dengan deret

CONTOH 9 — $\lim_{X\to 0} \dfrac{X - \sin X}{X^3}$

$x - \sin x = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + \cdots$. Bagi x^3: $\dfrac{1}{6} - \dfrac{x^2}{120} + \cdots \to \dfrac{1}{6}$. (Dengan l'Hôpital perlu tiga kali; deret lebih cepat.)

CONTOH 10 — $\lim_{X\to 0} \dfrac{E^X - 1 - X}{X^2}$

$e^x - 1 - x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots$, sehingga limitnya $\dfrac{1}{2}$.

CONTOH 11 — $\lim_{X\to 0} \dfrac{\sin X - X + X^3/6}{X^5}$

Pembilang $= \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{120}$. Numerik: pada $x = 0{,}01$ hasilnya $0{,}0083333 \approx \frac{1}{120}$ ✓.

8. Menjumlahkan deret bilangan

CONTOH 12

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$: bentuk $\sin x$ dengan $x = \frac{\pi}{4}$ (karena $\frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$). Jumlah $= \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} = e^2 - 1 \approx 6{,}389$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ (lihat taksiran galat di 11.5).

9. Tabel deret Maclaurin

Fungsi	Deret	Selang
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum x^n$	$(-1,1)$
e^x	$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$
$\ln(1+x)$	$\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$(-1,1]$
$(1+x)^k$	$\sum \binom{k}{n} x^n$	$(-1,1)$

10. Kesalahan umum

- Mengira deret Taylor selalu menyamai fungsinya (periksa $R_n \to 0$ atau gunakan keunikan).
- Lupa faktor $n!$ pada penyebut koefisien.
- Menggunakan deret binomial untuk $|x| \geq 1$.
- Salah menggeser indeks saat substitusi (mis. x^2 untuk x pada e^x).

11. Ringkasan

- Koefisien Taylor: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$; representasi pangkat bila ada adalah tunggal.
- Deret Maclaurin standar: $e^x, \sin x, \cos x, \arctan x, \ln(1+x), (1+x)^k$; hafalkan.
- Substitusi, perkalian, pembagian, turunan, dan integral menghasilkan deret baru; deret juga memudahkan limit.

Berikutnya 11.11: berapa dekat polinomial Taylor ke fungsi, dan penerapannya.

11.11 Penerapan Polinomial Taylor

Pada 11.10 kita melihat bahwa deret Taylor bisa mewakili fungsi secara tepat. Dalam praktik kita hampir selalu memotong deret setelah beberapa suku dan memakai **polinomial Taylor** sebagai hampiran. Pertanyaan pentingnya: *seberapa besar galatnya, dan berapa suku yang cukup?* Subbab ini menjawabnya, lalu memakainya pada hampiran nilai, limit, dan masalah fisika.

1. Polinomial Taylor

DEFINISI

Polinomial Taylor derajat n dari f di a adalah jumlah parsial deret Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Sisa (galat) hampiran: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

- $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$: *hampiran linear* (garis singgung).
- $T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$: *hampiran kuadrat*, memperhitungkan kelengkungan.

T_n adalah polinomial berderajat $\le n$ yang nilai dan turunan $1, \ldots, n$-nya **sama** dengan f di a. Karena itu ia sangat akurat dekat a dan makin kurang akurat bila menjauh.

CONTOH 1 — T_N UNTUK $F(X) = \mathrm{LN}\, X$ DI $A = 1$

$f' = \frac{1}{x},\ f'' = -\frac{1}{x^2},\ f''' = \frac{2}{x^3},\ f^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$. Di $x = 1$: $f = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -6$. Maka

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

(Sama dengan deret $\ln(1+u)$ dengan $u = x - 1$.) Nilai $T_3(1{,}2) = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 = 0{,}18267$, sedangkan $\ln 1{,}2 = 0{,}18232$.

CONTOH 2 — T_3 UNTUK $F(X) = \cos X$ DI $A = \frac{\pi}{3}$

$f = \frac{1}{2},\ f' = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'' = -\frac{1}{2},\ f''' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Maka

$$T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3.$$

2. Seberapa baik hampiran? Sisa Taylor

TEOREMA TAYLOR (BENTUK LAGRANGE)

Jika f mempunyai turunan ke-$(n+1)$ pada interval yang memuat a dan x, maka ada bilangan z antara a dan x sehingga

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Gagasan bukti (untuk $n=1$, arah $x > a$): $R_1(a) = R_1'(a) = 0$ dan $R_1'' = f''$. Bila $|f''| \le M$, maka $|R_1'(t)| \le M(t-a)$ dengan integrasi dari a dan kemudian $|R_1(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)^2$. Pengulangan argumen ini sebanyak $n+1$ kali menghasilkan ketaksamaan umum.

Bila $R_n(x) \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$. Pembuktian pada 11.10 untuk $e^x, \sin x, \cos x$ memakai ketaksamaan ini dan fakta $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$.

3. Menghampiri nilai

CONTOH 3 — MENGHITUNG $\sin 0{,}5$

Pakai $T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ di $a = 0$:

$$T_5(0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}0208333 + 0{,}00026042 = 0{,}479427.$$

Galat: turunan ke-6 dari $\sin$ dibatasi $M = 1$, jadi $|R_5(0{,}5)| \le \dfrac{0{,}5^6}{6!} = \dfrac{1}{46\,080} \approx 2{,}2 \times 10^{-5}$. Nilai sebenarnya $0{,}4794255$; galat nyata $1{,}5 \times 10^{-6}$ (jauh di bawah batas; batas Taylor adalah *jaminan*, bukan perkiraan galat).

CONTOH 4 — MENGHITUNG e DENGAN GALAT $< 10^{-5}$

Untuk $f = e^x$ di 0 dan $x = 1$: turunan semuanya $e^t \le e < 3$ pada $[0, 1]$. Jadi $|R_n(1)| \le \dfrac{3}{(n+1)!}$. Syarat $< 10^{-5}$: $(n+1)! > 3 \times 10^5$. Karena $9! = 362\,880$, cukup $n = 8$. Maka

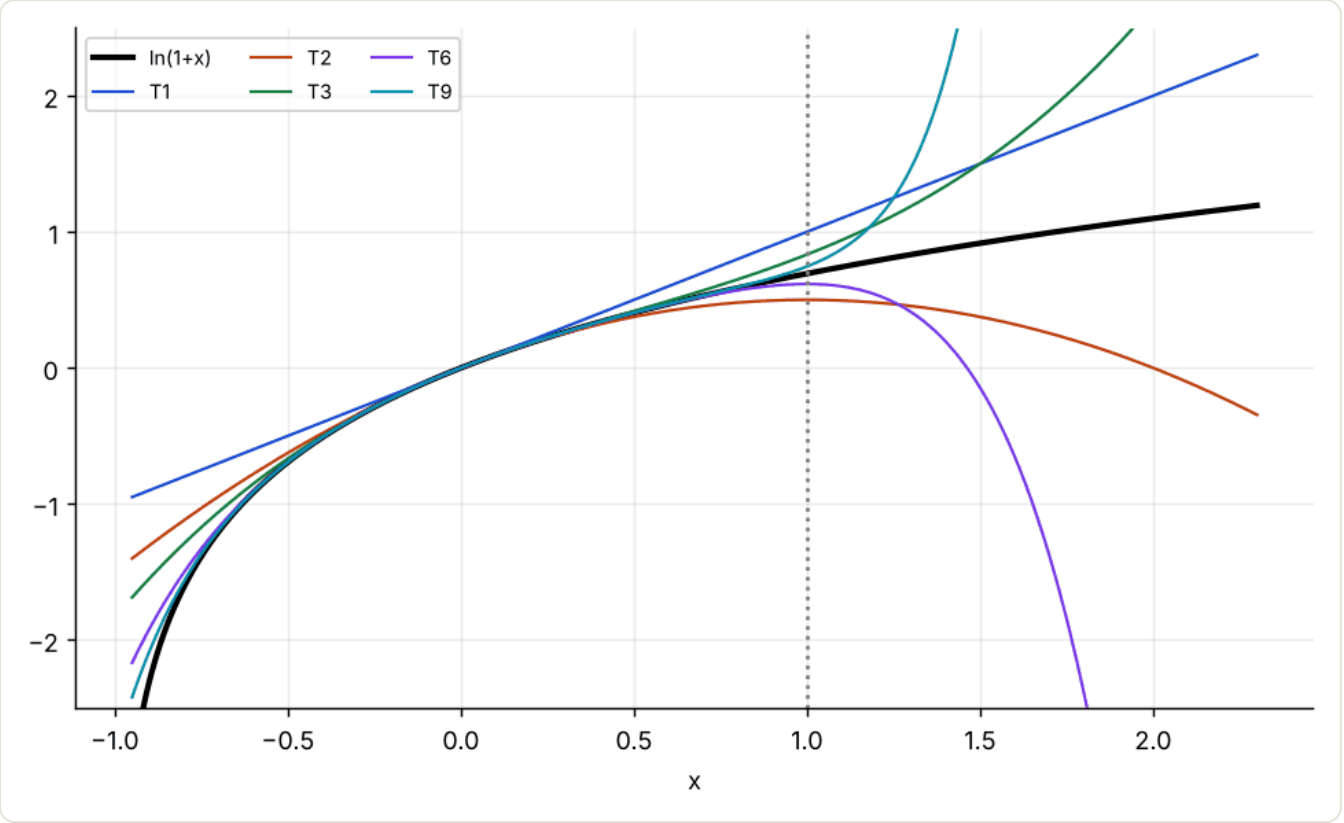
$$e \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 2{,}718279, \qquad \text{galat sebenarnya } 3{,}1 \times 10^{-6}.$$

CONTOH 5 — AKAR PANGKAT TIGA DENGAN DERET BINOMIAL

$\sqrt[3]{8{,}2} = 2\sqrt[3]{1 + 0{,}025}$. Binomial dengan $k = \frac{1}{3}$: $(1+x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9}$. Untuk $x = 0{,}025$: $1 + 0{,}008333 - 0{,}0000694 = 1{,}008264$, sehingga $\sqrt[3]{8{,}2} \approx 2{,}016528$. Nilai sebenarnya $2{,}016530$. Galat $\approx 2 \times 10^{-6}$, sesuai suku berikutnya $\frac{5x^3}{81} \cdot 2 \approx 1{,}9 \times 10^{-6}$.

CONTOH 6 — $\ln 1{,}5$ DAN BATAS SELANG

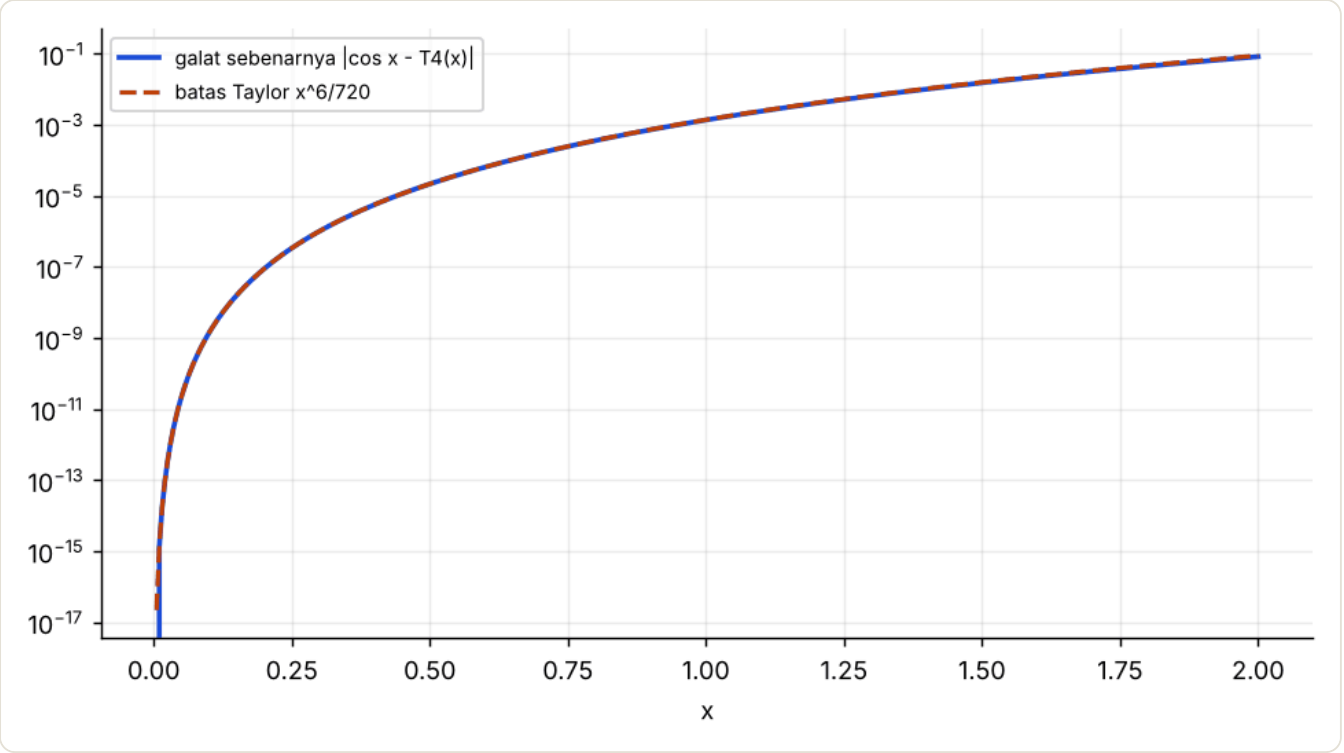
$\ln(1+x)$ pada $x = 0{,}5$ (di dalam selang $(-1, 1]$): deret berganti tanda $0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156 + \cdots$. $T_3 = 0{,}4167$, $T_5 = 0{,}4073$, $T_{10} = 0{,}40543$ vs $\ln 1{,}5 = 0{,}405465$. Karena berganti tanda, galat $\le$ suku berikutnya.



Polinomial Taylor $\ln(1+x)$: hampiran baik hanya untuk $-1 < x \leq 1$. Di luar selang itu (garis putus-putus di $x = 1$), makin tinggi derajat, makin buruk.

CONTOH 7 — GALAT T_4 UNTUK $\cos x$ PADA $x = 1$

$T_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 0{,}541667$. Karena suku x^5 dari $\cos x$ bernilai nol, $T_4 = T_5$, sehingga kita boleh memakai ketaksamaan Taylor dengan $n = 5$ dan turunan ke-6 ($f^{(6)} = -\cos x$, $M = 1$): $|R_5(1)| \leq \dfrac{1}{6!} = 0{,}001389$. Galat nyata $\cos 1 - T_4(1) = -0{,}001364$, tepat di bawah batas.



Galat sebenarnya $|\cos x - T_4(x)|$ dan batas Taylor $x^6/720$ hampir berimpit pada skala logaritmik.

4. Apa yang menentukan keakuratan?

- **Jarak** $|x-a|$: galat tumbuh seperti $|x-a|^{n+1}$; makin dekat pusat makin baik.
- **Derajat** n: biasanya makin besar makin baik, asalkan x di dalam selang kekonvergenan.
- **Pusat** a: pilih a dekat nilai yang diinginkan dan yang turunannya mudah dihitung (mis. $a=8$ untuk $\sqrt[3]{8{,}2}$).

5. Limit yang rumit

CONTOH 8 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\cos X - 1 + \frac{X^2}{2}}{X^4}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$, jadi pembilangnya $\dfrac{x^4}{24} - \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{24}$.

CONTOH 9 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\sin X - X\cos X}{X^3}$

$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots$ dan $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$. Selisih $= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \cdots = \dfrac{x^3}{3} + \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{3}$.

6. Penerapan dalam fisika

CONTOH 10 — ENERGI RELATIVISTIK

Energi total partikel bermassa m dengan kecepatan v: $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Misalkan $u = v^2/c^2$. Deret binomial $(1-u)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 + \cdots$ memberi

$$E = mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots$$

Suku pertama adalah energi diam, suku kedua adalah energi kinetik klasik. Untuk $v = 0{,}1c$, energi kinetik sebenarnya $(\gamma - 1)mc^2 = 0{,}005038\,mc^2$, sedangkan hampiran klasik $\tfrac{1}{2}mv^2 = 0{,}005\,mc^2$: selisih kurang dari 1%.

CONTOH 11 — BANDUL SEDERHANA

Persamaan gerak bandul: $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\sin\theta$. Karena $\sin\theta = \theta - \tfrac{\theta^3}{6} + \cdots$, untuk simpangan kecil kita ganti $\sin\theta \approx \theta$, sehingga $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\theta$ (osilator harmonik, lihat 17.3). Galat hampiran $< \tfrac{\theta^3}{6}$: pada $\theta = 0{,}2$ rad (sekitar 11°) hanya $0{,}0013$, kurang dari 1% dari θ.

CONTOH 12 — HAMPIRAN INTEGRAL

Gelombang optik memakai $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (fungsi sinus integral) yang tidak punya antiturunan elementer. Deret: $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \cdots$, jadi $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \cdots$, berlaku untuk semua x.

7. Kesalahan umum

- Memakai polinomial Taylor jauh dari pusat atau di luar selang kekonvergenan.
- Menyamakan batas Taylor dengan galat sebenarnya (batas biasanya lebih longgar).
- Lupa memakai turunan ke-$(n+1)$, bukan ke-n, pada sisa.
- Memakai derajat n tetapi menghitung M dari turunan yang salah.

8. Ringkasan

- T_n adalah polinomial yang cocok dengan f beserta n turunan pertamanya di a; $R_n = f - T_n$.

- $|R_n(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ bila $|f^{(n+1)}| \le M$.
- Dipakai untuk menghampiri nilai, menentukan banyak suku, menghitung limit, dan menyederhanakan model fisika.

Dengan ini Bab 11 selesai. Bab 12 membuka materi tiga dimensi.

Bab 12: Vektor dan Geometri Ruang

12.1 Sistem Koordinat Tiga Dimensi

Sampai Bab 11 kita bekerja di bidang (dua dimensi). Dunia nyata tiga dimensi: posisi satelit, aliran udara, permukaan gunung. Untuk membahas kalkulus di ruang kita perlu **sistem koordinat tiga dimensi**, yaitu satu sumbu tambahan, serta rumus jarak dan persamaan permukaan sederhana.

1. Sumbu dan bidang koordinat

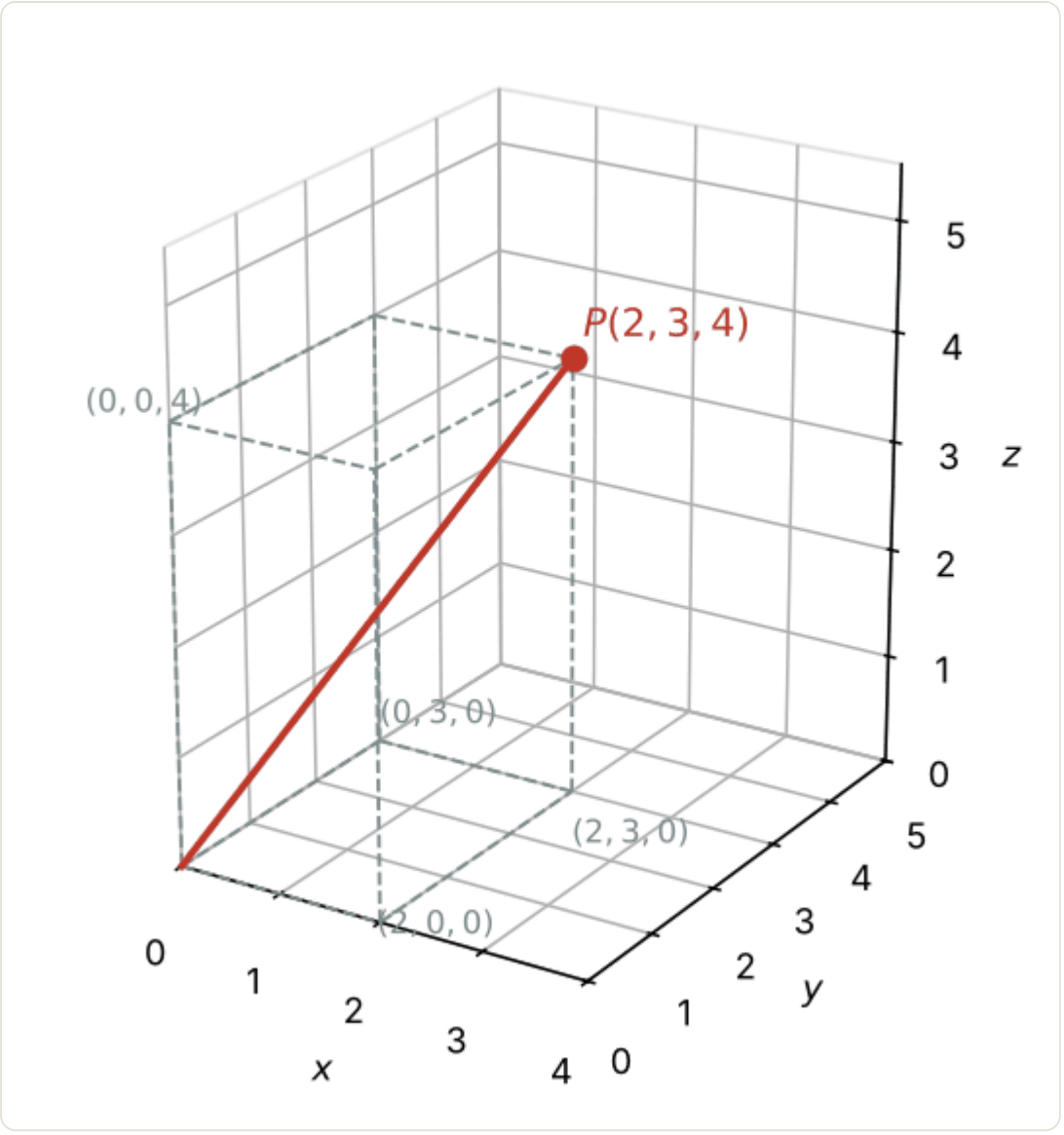
Untuk menentukan posisi titik di bidang diperlukan dua bilangan (x, y). Di ruang kita perlu tiga bilangan. Pilih titik asal O dan tiga garis berarah saling tegak lurus yang melalui O: **sumbu x**, **sumbu y**, dan **sumbu z**. Dengan konvensi **kaidah tangan kanan**: bila jari-jari tangan kanan melengkung dari sumbu x positif ke sumbu y positif, ibu jari menunjuk ke arah sumbu z positif.

Setiap pasang sumbu menentukan sebuah **bidang koordinat**:

- bidang xy (persamaan $z = 0$),
- bidang yz (persamaan $x = 0$),
- bidang xz (persamaan $y = 0$).

Ketiga bidang ini membagi ruang menjadi **delapan oktan**. Oktan pertama adalah oktan dengan $x, y, z > 0$.

Titik P memiliki koordinat (a, b, c): a adalah jarak berarah dari bidang yz, b dari bidang xz, dan c dari bidang xy. Kita menggambar P sebagai sudut dari balok persegi panjang dengan satu sudut di O.



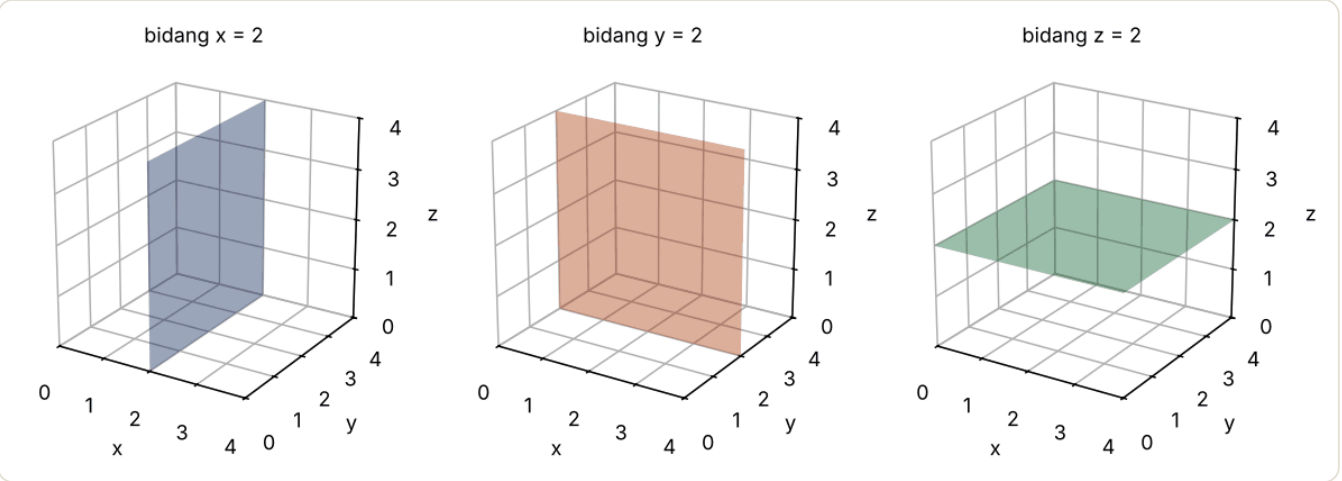
Titik $P(2, 3, 4)$: balok yang sudut-sudutnya O dan P, dengan proyeksi pada sumbu dan bidang koordinat.

PROYEKSI SEBUAH TITIK

Untuk $P(a, b, c)$: proyeksi pada bidang xy adalah $(a, b, 0)$, pada bidang yz adalah $(0, b, c)$, pada bidang xz adalah $(a, 0, c)$, dan pada sumbu x adalah $(a, 0, 0)$. Cerminan terhadap bidang xy: $(a, b, -c)$; terhadap sumbu z: $(-a, -b, c)$; terhadap titik asal: $(-a, -b, -c)$.

2. Persamaan sederhana di ruang

Di bidang, persamaan $x = 2$ adalah garis. Di ruang, $x = 2$ adalah himpunan semua titik $(2, y, z)$: sebuah **bidang** yang sejajar bidang yz, berjarak 2 darinya. Jadi arti persamaan bergantung pada dimensi ruangnya.



Bidang $x = 2$, $y = 2$, dan $z = 2$ di ruang.

CONTOH 1 — ARTI PERSAMAAN DI $\mathbb{R}^2$ DAN $\mathbb{R}^3$

- $x = 5$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis vertikal; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang sejajar bidang yz.
- $y = x$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang yang memuat sumbu z (semua (x, x, z)).
- $z = 0$: bidang xy.
- $\{x = 2,\ y = 3\}$: irisan dua bidang, yaitu garis sejajar sumbu z yang melalui $(2, 3, 0)$.

CONTOH 2 — HIMPUNAN TITIK DARI PERTIDAKSAMAAN

Himpunan $\{(x, y, z) :\ 0 \le z \le 1\}$ adalah daerah di antara bidang $z = 0$ dan $z = 1$ (lapisan tak hingga). Himpunan $\{(x, y, z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ adalah oktan pertama. Himpunan $\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}$ adalah cakram satuan di bidang xy.

3. Jarak antara dua titik

Di bidang, $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dari Teorema Pythagoras. Di ruang, kita memakai Pythagoras dua kali.

RUMUS JARAK

Jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Penurunan. Bangun balok dengan P_1 dan P_2 sebagai sudut berseberangan dan rusuk-rusuk sejajar sumbu. Misalkan $B(x_2, y_2, z_1)$, yaitu titik pada balok yang satu bidang datar dengan P_1 dan tepat di bawah (atau di atas) P_2. Segitiga P_1BP_2 siku-siku di B dengan $|P_1B| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (diagonal alas, Pythagoras pertama) dan $|BP_2| = |z_2 - z_1|$. Pythagoras memberi $|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 3 — JARAK DUA TITIK

Jarak antara $P_1(2, -1, 7)$ dan $P_2(1, -3, 5)$: $\sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$. Titik tengahnya $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2, 6\right)$.

CONTOH 4 — JENIS SEGITIGA

Titik $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$: $|PQ| = \sqrt{16+4+16} = 6$, $|PR| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|QR| = \sqrt{36+4+0} = \sqrt{40}$. Dua sisi sama panjang, jadi segitiga sama kaki. Sudut siku-siku? $6^2 + 6^2 = 72 \neq 40$, jadi bukan segitiga siku-siku.

CONTOH 5 — APAKAH TIGA TITIK SEGARIS?

Titik $A(1, 2, 3)$, $B(3, 6, 7)$, $C(2, 4, 5)$: $|AB| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|AC| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|BC| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Karena $|AC| + |CB| = |AB|$, ketiganya segaris dengan C di antara A dan B (dan memang C adalah titik tengah AB).

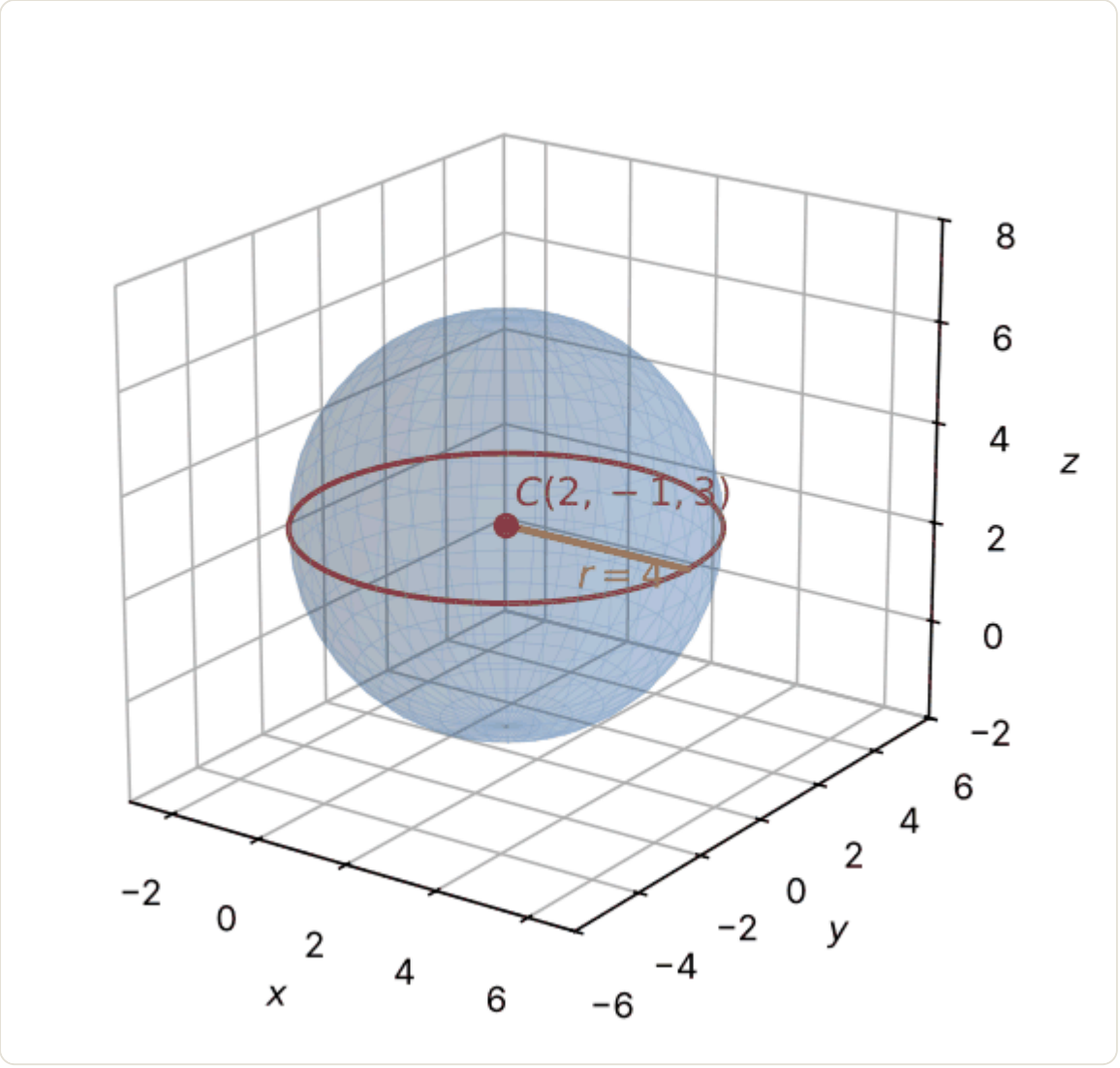
4. Persamaan bola

DEFINISI DAN PERSAMAAN

Bola dengan pusat $C(h, k, l)$ dan jari-jari r adalah himpunan semua titik $P(x, y, z)$ dengan $|PC| = r$. Mengkuadratkan rumus jarak,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

Khususnya bola berpusat di titik asal: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



Bola berpusat di C dengan jari-jari r; kurva merah adalah lingkaran besar pada bidang yang melalui pusat.

CONTOH 6 — DARI PERSAMAAN UMUM KE PUSAT DAN JARI-JARI

Tunjukkan $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$ adalah bola. Lengkapkan kuadrat: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 2z + 1) = 11 + 9 + 4 + 1$, yaitu

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25.$$

Pusat $(3, -2, 1)$, jari-jari 5.

CONTOH 7 — BOLA DENGAN DIAMETER DIBERIKAN

Bola dengan diameter dari $A(1, 2, 3)$ ke $B(5, 2, -1)$: pusat adalah titik tengah $(3, 2, 1)$; jari-jari $= \tfrac{1}{2}|AB| = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 16} = 2\sqrt{2}$. Persamaan $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

CONTOH 8 — IRISAN BOLA DENGAN BIDANG KOORDINAT

Bola $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ dipotong bidang $z=0$: $(x-3)^2+(y+2)^2+1=25$, yaitu $(x-3)^2+(y+2)^2=24$, lingkaran berjari-jari $2\sqrt{6}$ pusat $(3,-2)$. Dipotong bidang $y=3$: $(x-3)^2+25+(z-1)^2=25 \Rightarrow (x-3)^2+(z-1)^2=0$, satu titik saja $(3,3,1)$; bidang $y=3$ menyinggung bola (jarak 5 dari pusat sama dengan jari-jari).

CONTOH 9 — DAERAH DI ANTARA DUA BOLA

$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ adalah kulit bola tebal: semua titik yang berjarak antara 1 dan 2 dari titik asal. $x^2+y^2+z^2 < 0{,}25$ adalah bagian dalam bola berjari-jari $\frac{1}{2}$ (tanpa permukaannya). Himpunan $\{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$ adalah belahan atas bola padat berjari-jari 2.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x=2$ selalu garis. Di ruang 3D ia bidang.
- Lupa suku $(z_2-z_1)^2$ pada rumus jarak.
- Pada persamaan bola, lupa melengkapkan kuadrat untuk semua tiga peubah, atau salah tanda pusat: $(x+2)^2$ berarti pusat di $x=-2$.
- Menggambar sumbu z ke bawah (melanggar kaidah tangan kanan).

6. Ringkasan

- Titik di ruang: (x,y,z); tiga bidang koordinat, delapan oktan; kaidah tangan kanan.
- Jarak: $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$; titik tengah: rata-rata koordinat.
- Bola: $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$.
- Persamaan satu peubah (mis. $x=c$) berupa bidang di ruang.

Subbab berikutnya, 12.2, memperkenalkan vektor.

12.2 Vektor

Sebagian besar besaran fisika dapat diterangkan dengan satu bilangan: suhu, massa, panjang. Besaran seperti ini disebut **skalar**. Namun ada besaran yang memerlukan juga *arah*: perpindahan, kecepatan, gaya. Besaran itu dimodelkan oleh **vektor**.

1. Vektor secara geometris

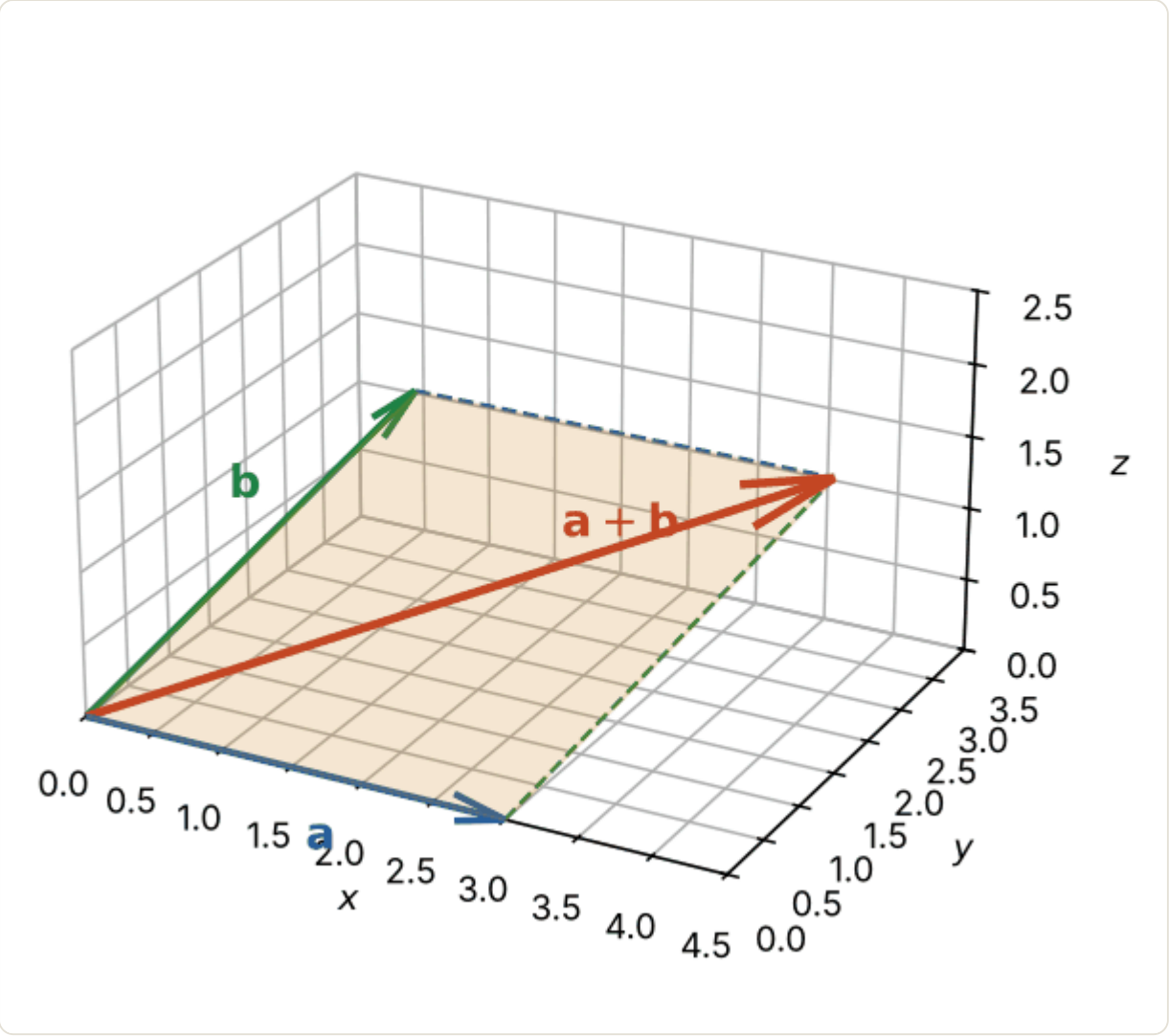
DEFINISI

Vektor adalah besaran yang mempunyai *besar* (panjang) dan *arah*. Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah (panah) dari **titik awal** A ke **titik akhir** B, ditulis $\overrightarrow{AB}$. Dua vektor **sama** bila besar dan arahnya sama, walaupun posisinya berbeda. Vektor nol $\mathbf{0}$ mempunyai panjang 0 dan tidak mempunyai arah tertentu.

Huruf tebal ($\mathbf{a}$) atau tanda panah ($\vec{a}$) dipakai untuk vektor; panjangnya ditulis $|\mathbf{a}|$.

Penjumlahan: aturan segitiga dan jajargenjang

Untuk menjumlahkan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$: letakkan titik awal $\mathbf{b}$ di titik akhir $\mathbf{a}$; vektor dari titik awal $\mathbf{a}$ ke titik akhir $\mathbf{b}$ adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Hasil yang sama diperoleh dengan membuat jajargenjang dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ yang titik awalnya berimpit: diagonalnya adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Jadi $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.



$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sebagai diagonal jajargenjang.

Perkalian dengan skalar

Untuk skalar c dan vektor $\mathbf{a}$: $c\mathbf{a}$ mempunyai panjang $|c||\mathbf{a}|$ dan searah $\mathbf{a}$ bila $c > 0$, berlawanan arah bila $c < 0$. Dua vektor tak nol **sejajar** bila yang satu kelipatan skalar yang lain. Pengurangan: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

2. Vektor dalam komponen

Letakkan titik awal vektor di titik asal. Titik akhirnya (a_1, a_2, a_3) menentukan vektor itu, yang ditulis

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle.$$

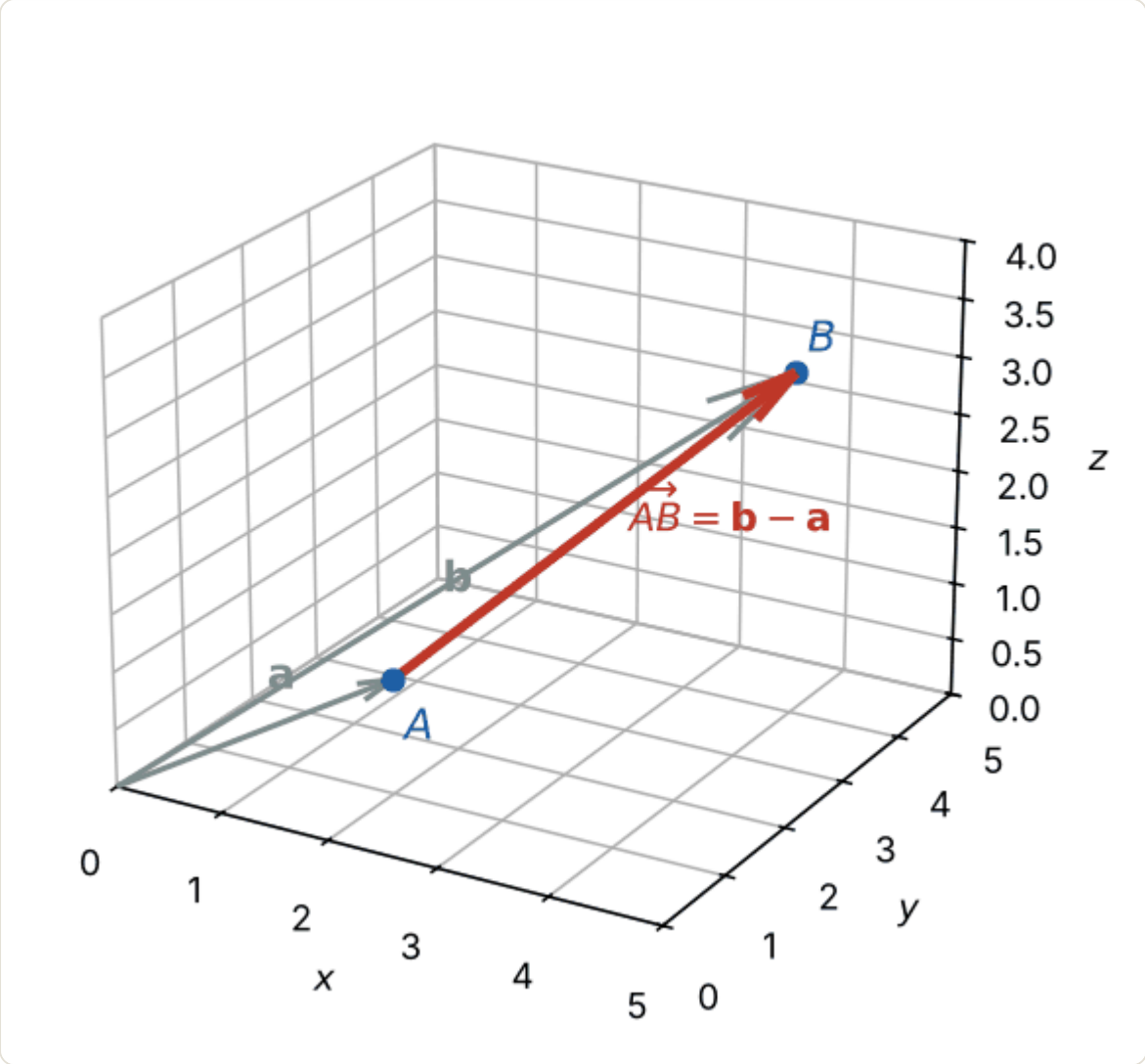
Bilangan a_1, a_2, a_3 adalah **komponen** $\mathbf{a}$. Vektor ini disebut **vektor posisi** titik (a_1, a_2, a_3).

VEKTOR ANTARA DUA TITIK

Untuk $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1 \rangle.$$

(Titik akhir dikurangi titik awal.) Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektor posisi A, B, maka $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Aljabar vektor

Dengan $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, c skalar:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle, \qquad c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle.$$

Panjang (besar) vektor, dari rumus jarak:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

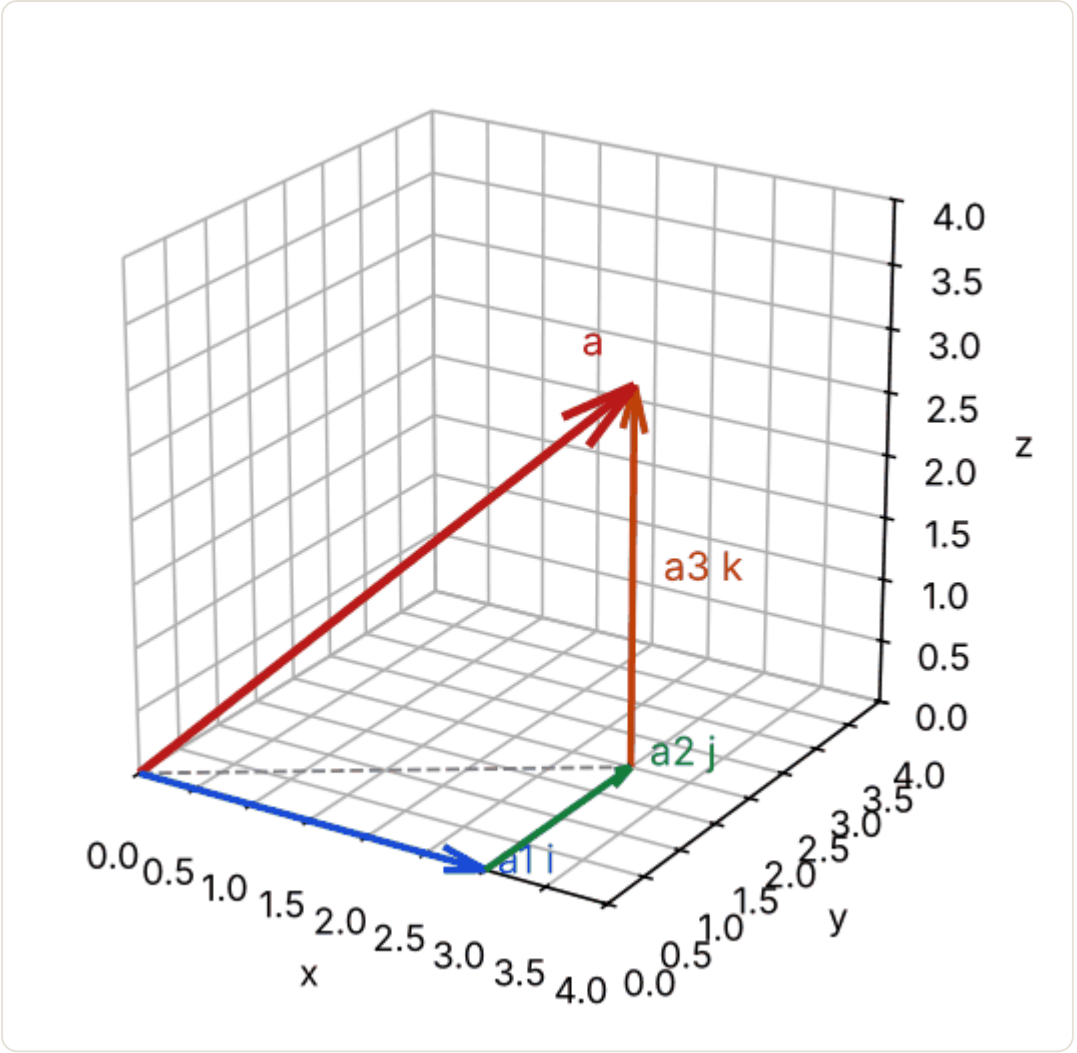
Sifat-sifat: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$, $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$, $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Semuanya mengikuti dari sifat bilangan real pada tiap komponen.

Vektor basis standar

Tiga vektor satuan sepanjang sumbu:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Setiap vektor ditulis tunggal sebagai kombinasi linear: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.



$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$: jumlah tiga vektor sepanjang sumbu.

Vektor satuan

Vektor satuan adalah vektor dengan panjang 1. Untuk $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ (mengalikan dengan $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ mengubah panjang menjadi 1 tanpa mengubah arah).

3. Contoh

CONTOH 1 — OPERASI DASAR

$\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4, -2\rangle$. Maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = \langle 6 - 3,\ -2 - 12,\ 4 + 6\rangle = \langle 3, -14, 10\rangle$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{21}$.

CONTOH 2 — VEKTOR SATUAN

Vektor satuan searah $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$: $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle \approx \langle 0{,}802, -0{,}267, 0{,}535\rangle$. Vektor dengan panjang 6 searah $\mathbf{a}$: $\dfrac{6}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle$.

CONTOH 3 — VEKTOR DARI DUA TITIK

$A(1, 2, -1)$, $B(4, 0, 3)$: $\overrightarrow{AB} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $|AB| = \sqrt{29}$. Titik yang membagi AB dengan perbandingan $1 : 2$ dari A: $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(2,\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

CONTOH 4 — APAKAH SEJAJAR?

$\langle 2, -4, 6\rangle$ dan $\langle -1, 2, -3\rangle$: yang pertama $= -2\cdot$yang kedua, jadi sejajar (berlawanan arah). $\langle 1, 2, 3\rangle$ dan $\langle 2, 4, 7\rangle$: perbandingan komponen $2, 2, \frac{7}{3}$ tidak sama, tidak sejajar.

CONTOH 5 — PUSAT SEGITIGA (TITIK BERAT)

Titik berat segitiga ABC dengan vektor posisi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ adalah $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Untuk $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$: $\mathbf{g} = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\rangle$.

4. Penerapan: gaya dalam keseimbangan

Gaya adalah vektor; gaya total pada benda adalah jumlah vektor semua gaya. Benda dalam keseimbangan bila jumlah gayanya nol.

CONTOH 6 — DUA KABEL MENAHAN BEBAN

Beban 100 N digantung pada dua kabel yang membentuk sudut 50° dan 32° terhadap garis datar (kabel pertama ke kiri, kedua ke kanan). Misalkan tegangan T_1 dan T_2. Keseimbangan komponen:

$$\text{horizontal: } -T_1\cos 50^\circ + T_2\cos 32^\circ = 0, \qquad \text{vertikal: } T_1\sin 50^\circ + T_2\sin 32^\circ =$$

Dari persamaan pertama $T_2 = T_1\dfrac{\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}$. Substitusi: $T_1\left(\sin 50^\circ + \cos 50^\circ \tan 32^\circ\right) = 100$, sehingga $T_1 \approx 85{,}6$ N dan $T_2 \approx 64{,}9$ N. Kabel yang lebih curam menanggung gaya lebih besar.

CONTOH 7 — KECEPATAN PESAWAT DAN ANGIN

Pesawat terbang dengan kecepatan udara $\langle 0, 200\rangle$ km/jam (ke utara) dan angin $\langle 60, 0\rangle$ (ke timur). Kecepatan terhadap tanah adalah jumlahnya, $\langle 60, 200\rangle$, dengan laju $\sqrt{3600 + 40000} = 208{,}8$ km/jam, arah menyimpang $\arctan\frac{60}{200} \approx 16{,}7^\circ$ ke timur dari utara.

5. Kesalahan umum

- Menulis $\overrightarrow{AB} = A - B$. Yang benar: titik akhir dikurangi titik awal.
- Mengira $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Yang benar hanya $\le$ (ketaksamaan segitiga), sama bila searah.
- Menyamakan titik (a, b, c) dengan vektor $\langle a, b, c\rangle$: berhubungan tetapi berbeda (titik vs perpindahan).
- Lupa mengubah arah/sudut ke komponen saat bekerja dengan gaya.

6. Ringkasan

- Vektor: besar dan arah; komponen $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$; $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- Penjumlahan dan perkalian skalar bekerja per komponen; $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ basis standar; vektor satuan $= \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.
- Keseimbangan gaya: jumlah komponen sama dengan nol.

Berikutnya 12.3 Hasil Kali Titik.

12.3 Hasil Kali Titik

Sampai di sini kita sudah bisa menjumlahkan vektor dan mengalikannya dengan skalar. Bagaimana dengan *mengalikan dua vektor*? Ada dua cara yang bermakna: hasil kali titik (hasilnya skalar), dibahas di sini, dan hasil kali silang (hasilnya vektor), dibahas di 12.4.

1. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali titik** (*dot product*, atau hasil kali skalar) adalah bilangan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

(Di dua dimensi: $a_1 b_1 + a_2 b_2$.)

CONTOH 1

$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 6 - 4 = 2$. $\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \rangle = -6 + 14 - 2 = 6$. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0 + 4 + 3 = 7$.

Sifat-sifat

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Semuanya terbukti dengan menjabarkan menjadi komponen.

2. Sudut antara dua vektor

Hasil kali titik sangat berguna karena memiliki tafsiran geometris. **Sudut antara** dua vektor tak nol $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah sudut θ ($0 \le \theta \le \pi$) di antara keduanya bila titik awalnya berimpit.

TEOREMA

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta.$$

Akibatnya $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

Bukti

Bentuk segitiga dengan sisi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Hukum kosinus: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. Di sisi lain, dengan sifat 1 sampai 3,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

Samakan kedua ungkapan: $-2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. $\blacksquare$

CONTOH 2 — SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

$\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 - 6 - 2 = 2$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{38}$. $\cos\theta = \dfrac{2}{3\sqrt{38}} \approx 0{,}108$, $\theta \approx 83{,}8^\circ$.

CONTOH 3 — SUDUT DALAM SEGITIGA

Titik $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Sudut di A: $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 1, 0\rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle -1, 0, 1\rangle$, dot $= 1$, panjang masing-masing $\sqrt{2}$: $\cos A = \tfrac{1}{2}$, $A = 60^\circ$. Segitiga sama sisi, jadi semua sudutnya 60°.

Tegak lurus dan sejajar

Karena $\cos\theta = 0 \iff \theta = \tfrac{\pi}{2}$:

AKIBAT

Dua vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **ortogonal** (tegak lurus) bila dan hanya bila $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. (Vektor nol dianggap ortogonal ke semua vektor.) Sejajar searah: $\cos\theta = 1$; berlawanan arah: $\cos\theta = -1$.

CONTOH 4 — UJI ORTOGONAL

$\langle 2,2,-1\rangle \cdot \langle 5,-4,2\rangle = 10-8-2 = 0$: tegak lurus. Cari t supaya $\langle t,2,-1\rangle \perp \langle 3,t,4\rangle$: $3t+2t-4=0 \Rightarrow t = \frac{4}{5}$.

TANDA DOT PRODUCT MEMBERI JENIS SUDUT

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$: sudut lancip; $= 0$: siku-siku; < 0: sudut tumpul.

3. Sudut dan kosinus arah

Sudut yang dibentuk $\mathbf{a}$ dengan sumbu x, y, z positif adalah **sudut arah** α, β, γ. Dari $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = a_1$ diperoleh

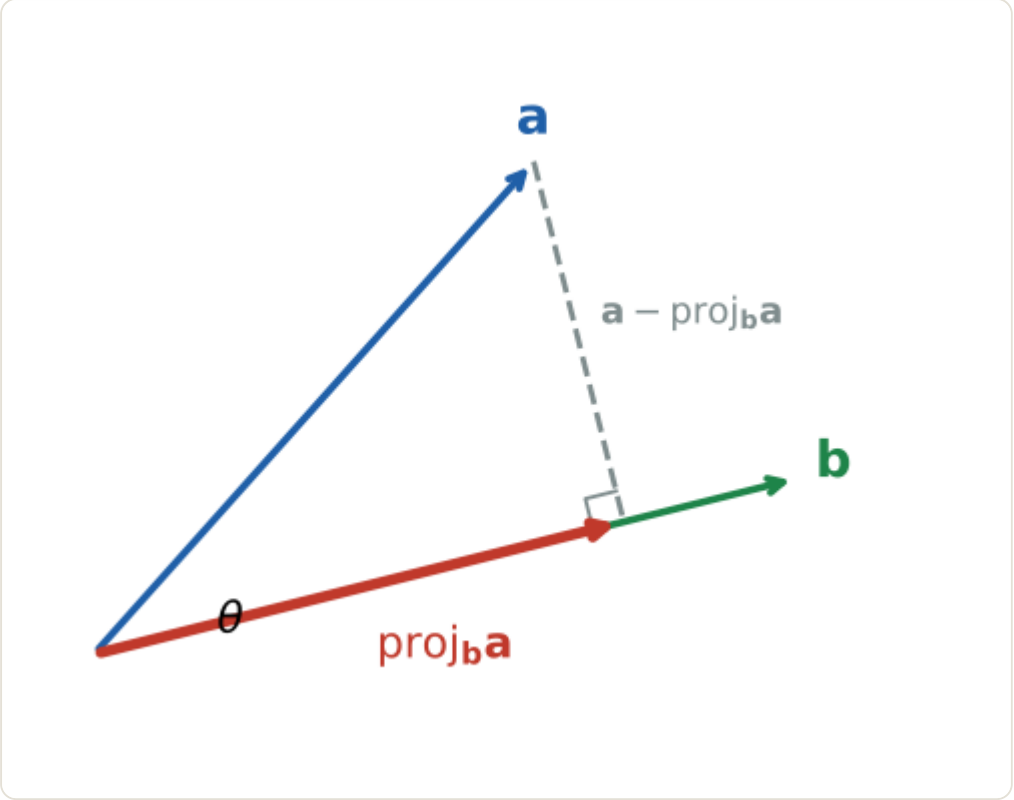
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$.

CONTOH 5

$\mathbf{a} = \langle 1,2,3\rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 74{,}5^\circ$, $\beta \approx 57{,}7^\circ$, $\gamma \approx 36{,}7^\circ$. Cek: $\frac{1+4+9}{14} = 1$ ✓.

4. Proyeksi



Proyeksi skalar dan vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$; $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Jatuhkan garis tegak lurus dari ujung $\mathbf{a}$ ke garis yang memuat $\mathbf{b}$. Panjang bayangan $\mathbf{a}$ pada arah $\mathbf{b}$ adalah $|\mathbf{a}|\cos\theta$.

DEFINISI

Untuk $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:

$$\text{proyeksi skalar (komponen)}\ \ \text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \qquad \text{proyeksi vektor}\ \ \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot}{|\mathbf{b}}$$

Vektor $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Pemeriksaan ortogonalitas: $\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. ✓

CONTOH 6 — PROYEKSI

$\mathbf{a} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 2\rangle$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15$, $|\mathbf{b}|^2 = 30$. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{\sqrt{30}} \approx 2{,}739$. $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{30}\mathbf{b} = \langle 2{,}5, -0{,}5, 1\rangle$. Komponen tegak lurus: $\mathbf{a} - \text{proj} = \langle -0{,}5, 3{,}5, 3\rangle$, dan dot dengan $\mathbf{b}$: $-2{,}5 - 3{,}5 + 6 = 0$ ✓.

CONTOH 7 — JARAK TITIK KE GARIS (DI BIDANG)

Jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $ax + by + c = 0$ adalah $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Turunan: vektor $\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$ tegak lurus garis. Ambil sembarang titik $P_0(x_0, y_0)$ pada garis; jaraknya $= |\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_0P}| = \dfrac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, dan $ax_0 + by_0 = -c$. Contoh: titik $(3, 4)$ ke garis $3x - 4y + 5 = 0$: $\frac{|9 - 16 + 5|}{5} = \frac{2}{5}$.

CONTOH 8 — KETAKSAMAAN CAUCHY–SCHWARZ

Karena $|\cos\theta| \le 1$, selalu berlaku $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Akibatnya ketaksamaan segitiga $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$.

5. Kerja (usaha) oleh gaya

Bila gaya konstan $\mathbf{F}$ memindahkan benda sepanjang perpindahan $\mathbf{D}$, kerja yang dilakukan adalah komponen gaya sepanjang perpindahan dikali jarak:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta.$$

CONTOH 9 — MENARIK KERETA

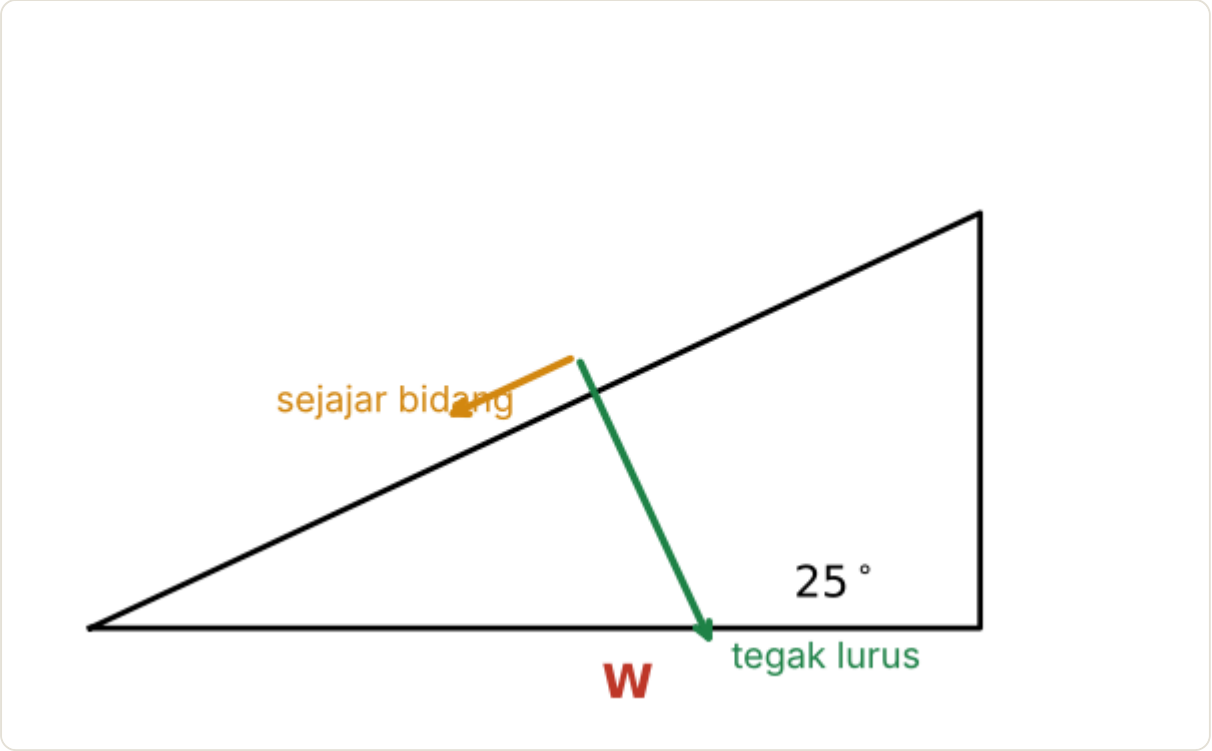
Gaya 200 N pada tali yang membentuk 30° dengan horizontal menarik kereta sejauh 100 m. $W = 200 \cdot 100\cos 30^\circ \approx 17\,321$ J.

CONTOH 10 — BALOK PADA BIDANG MIRING

Balok berbobot 50 N pada bidang miring 25°. Uraikan berat $\mathbf{W}$ menjadi komponen sejajar bidang (menggeser balok) dan tegak lurus bidang (menekan bidang):

$$W_{\parallel} = 50\sin 25^\circ \approx 21{,}1\ \text{N}, \qquad W_{\perp} = 50\cos 25^\circ \approx 45{,}3\ \text{N}.$$

Keduanya dari proyeksi $\mathbf{W}$ pada vektor sejajar dan tegak lurus bidang.



6. Kesalahan umum

- Hasil dot adalah *skalar*, bukan vektor.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ tidak bermakna (skalar dot vektor tak terdefinisi).
- Hasil dot nol tidak berarti salah satu vektor nol; bisa saja tegak lurus.
- Memakai derajat/radian yang tidak cocok saat menghitung $\theta = \arccos(\cdot)$.
- Mengira $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$: proyeksi tidak simetris.

7. Ringkasan

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$.
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; tanda dot menentukan lancip/tumpul.
- $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.
- Kerja $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$.

Berikutnya 12.4 Hasil Kali Silang.

12.4 Hasil Kali Silang

Hasil kali titik menghasilkan skalar. Banyak masalah geometri dan fisika di ruang membutuhkan vektor yang *tegak lurus terhadap dua vektor lain*: normal sebuah bidang, sumbu putar, arah gaya magnet. Operasi yang menghasilkannya adalah **hasil kali silang**, yang hanya ada di ruang tiga dimensi.

1. Determinan sebagai alat bantu

Determinan 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Determinan 3×3 dihitung dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

(Perhatikan tanda berganti $+, -, +$.)

2. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali silang** (*cross product*) adalah vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle.$$

Bentuk yang mudah diingat memakai determinan simbolik:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

CONTOH 1

$\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\,(3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7) - \mathbf{j}\,(1 \cdot (-5) - 4 \cdot 2) + \mathbf{k}\,(1 \cdot 7 - 3 \cdot 2) = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} +$

Cek tegak lurus: $\langle -43, 13, 1 \rangle \cdot \langle 1, 3, 4 \rangle = -43 + 39 + 4 = 0$ dan $\cdot \langle 2, 7, -5 \rangle = -86 + 91 - 5 = 0$ ✓.

CONTOH 2 — PERKALIAN BASIS STANDAR

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, sedangkan $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, dan $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Pola siklus $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$ menghasilkan tanda positif.

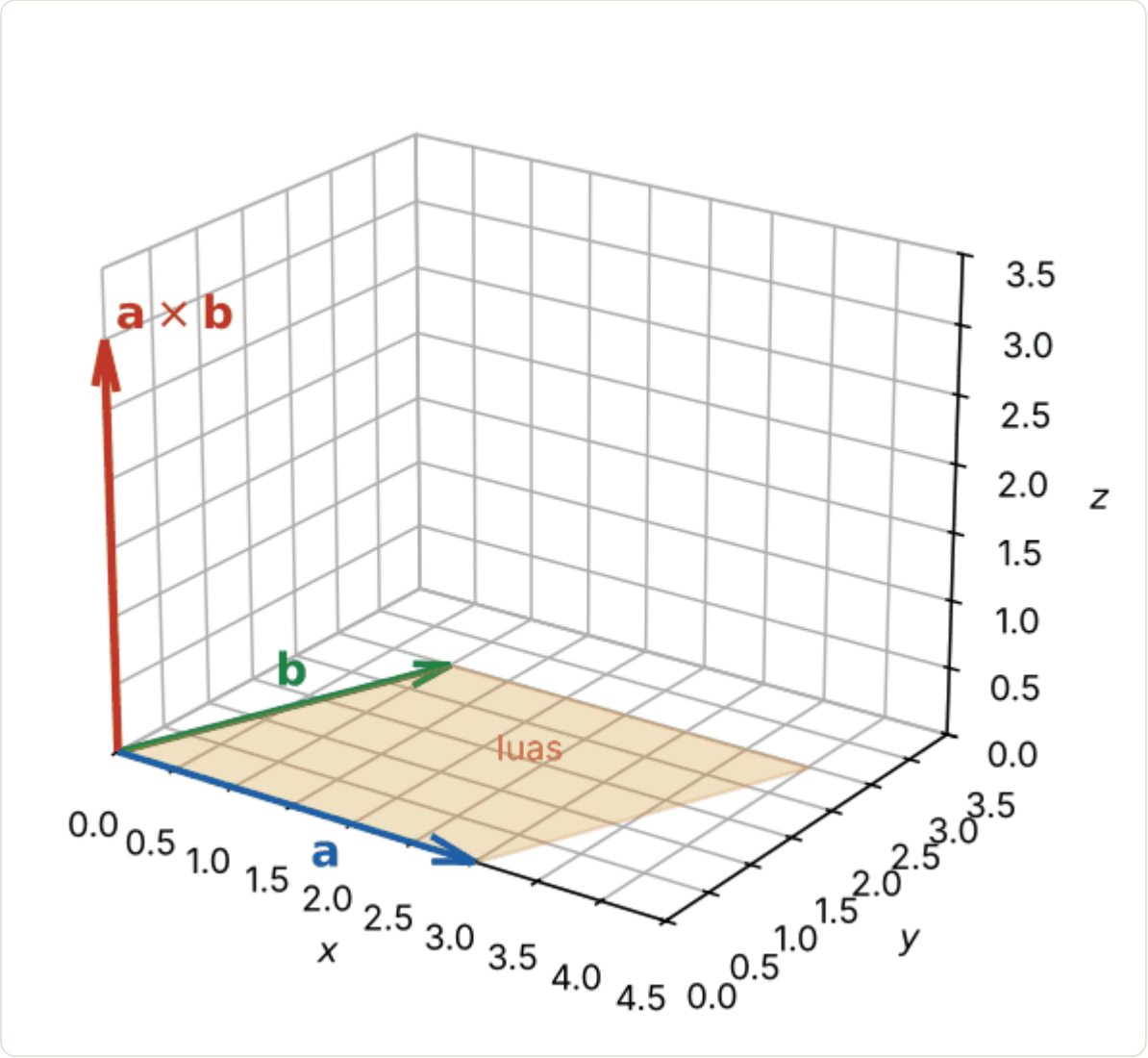
3. Arah dan besar

TEOREMA

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **tegak lurus** terhadap $\mathbf{a}$ maupun $\mathbf{b}$.

Bukti. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ (semua suku saling menghapus). Serupa untuk $\mathbf{b}$. ■

Arah ditentukan oleh *kaidah tangan kanan*: bila jari tangan kanan melengkung dari $\mathbf{a}$ ke $\mathbf{b}$ (melalui sudut $\theta < \pi$), ibu jari menunjuk arah $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus bidang yang memuat $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$; panjangnya sama dengan luas jajargenjang.

TEOREMA (BESAR)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

dengan θ sudut antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$.

Bukti. Identitas Lagrange (periksa dengan menjabarkan komponen): $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Karena $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta$. Karena $\sin\theta \ge 0$ pada $[0, \pi]$, akarnya $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$. ■

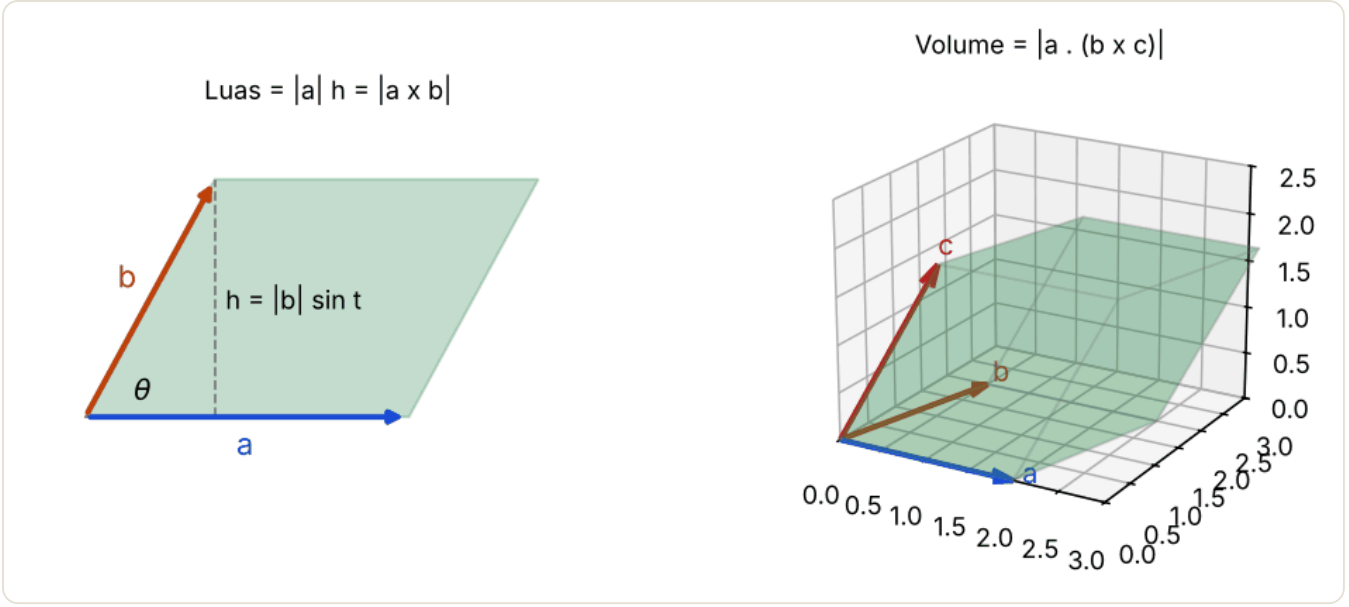
AKIBAT

Dua vektor tak nol $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **sejajar** bila dan hanya bila $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

4. Luas dan volume

Jajargenjang dengan sisi $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ memiliki alas $|\mathbf{a}|$ dan tinggi $|\mathbf{b}|\sin\theta$. Jadi

$$\text{Luas jajargenjang} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|, \qquad \text{Luas segitiga} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$



Kiri: luas $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$. Kanan: volume $= |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

CONTOH 3 — LUAS SEGITIGA DI RUANG

$P(1,4,6), Q(-2,5,-1), R(1,-1,1)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle -3,1,-7\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 0,-5,-5\rangle$.

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \langle 1\cdot(-5)-(-7)(-5),\ (-7)\cdot 0-(-3)(-5),\ (-3)(-5)-1\cdot 0\rangle = \langle$-

$|\cdot| = \sqrt{1600+225+225} = \sqrt{2050} \approx 45{,}28$. Luas segitiga $= \tfrac{1}{2}\sqrt{2050} \approx 22{,}64$.
Vektor $\langle -40,-15,15\rangle$, atau $\langle 8,3,-3\rangle$ (dibagi -5), adalah normal bidang PQR.

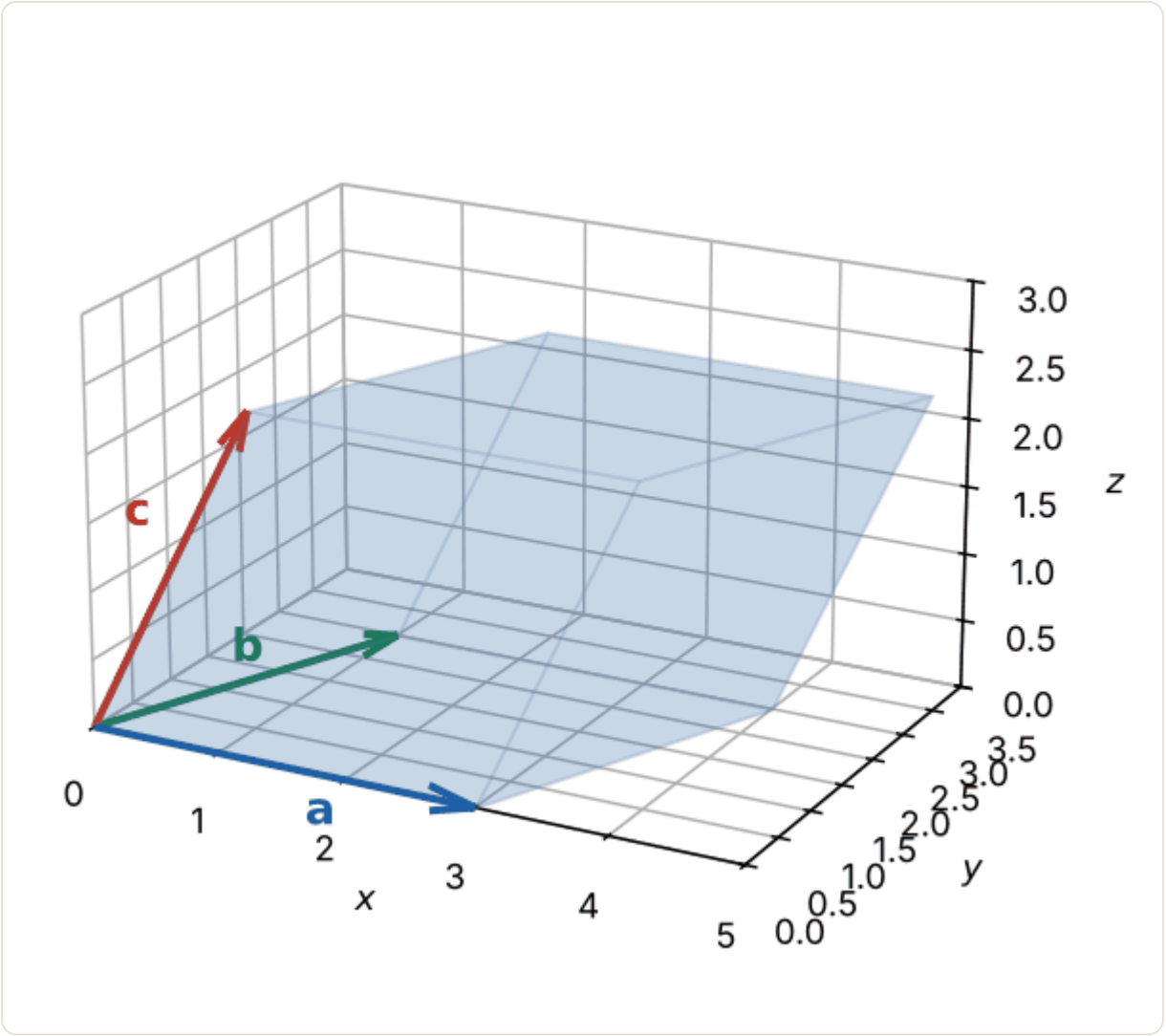
Hasil kali tripel skalar

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ disebut **hasil kali tripel skalar**, dihitung sebagai determinan:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Paralelepipedum (balok miring) dengan rusuk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ mempunyai alas jajargenjang $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ dengan luas $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ dan tinggi $|\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}|$; jadi

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$



CONTOH 4 — VOLUME

$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle -1, 1, 2 \rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -1, 1 \rangle$. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1),\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1,\ (-1)(-1) - 1 \cdot 2 \rangle = \langle 3, 5, -1 \rangle$. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3 + 10 - 3 = 10$. Volume $= 10$.

CONTOH 5 — UJI SEBIDANG (KOPLANAR)

Tiga vektor sebidang bila volume paralelepipedumnya nol. $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$: $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle -1\cdot 18 - 4\cdot(-9),\ 4\cdot 0 - 2\cdot 18,\ 2\cdot(-9) - 0\rangle = \langle 18, -36, -18\rangle$, dan $\mathbf{a}$·itu $= 18 - 144 + 126 = 0$. Jadi sebidang.

5. Sifat-sifat aljabar

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (anti-komutatif)
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributif)
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ (hasil kali tripel vektor)

PERINGATAN

Hasil kali silang **tidak komutatif** dan **tidak asosiatif**: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, sedangkan $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

6. Torsi (momen gaya)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja di titik dengan vektor posisi $\mathbf{r}$ relatif terhadap sumbu putar, **torsi** adalah $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, dengan besar $|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$: gaya yang tegak lurus lengan memberi torsi terbesar.

CONTOH 6 — MENGENCANGKAN BAUT

Kunci pas sepanjang 0,4 m searah sumbu x mengencangkan baut di titik asal; gaya 60 N diberikan ke bawah (arah $-z$). $\mathbf{r} = \langle 0{,}4, 0, 0\rangle$, $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -60\rangle$. $\boldsymbol{\tau} = \langle 0\cdot(-60) - 0,\ 0 - 0{,}4\cdot(-60),\ 0\rangle = \langle 0, 24, 0\rangle$ N·m. Besarnya 24 N·m, searah sumbu y (sumbu putar). Bila gaya miring 30° dari arah tegak lurus, torsinya turun menjadi $24\cos 30^\circ \approx 20{,}8$ N·m.

7. Kesalahan umum

- Menukar urutan: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ berlawanan arah.
- Kesalahan tanda pada komponen $\mathbf{j}$ saat ekspansi determinan.
- Memakai hasil kali silang di $\mathbb{R}^2$ (tidak ada; embed ke $\mathbb{R}^3$ dengan $z = 0$).
- Mengira $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ berarti salah satunya nol (bisa saja sejajar).

8. Ringkasan

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$: vektor tegak lurus keduanya, arah kaidah tangan kanan, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$.
- Luas jajargenjang $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; volume paralelepipedum $= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.
- Sejajar $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$; sebidang $\iff$ tripel skalar nol.
- Torsi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

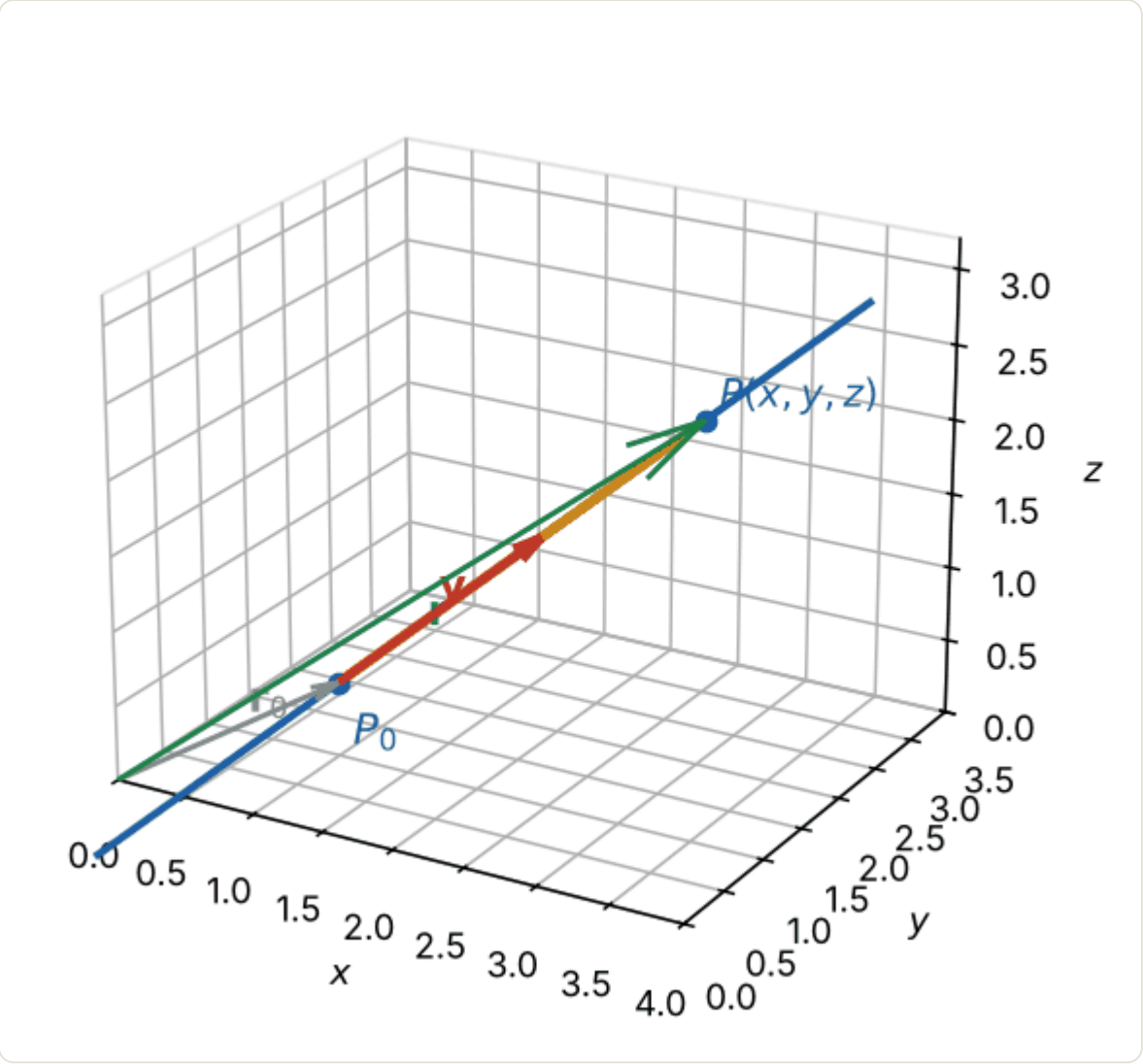
Dengan dua operasi ini kita bisa menuliskan garis dan bidang di 12.5.

12.5 Persamaan Garis dan Bidang

Di bidang, sebuah garis ditentukan oleh sebuah titik dan kemiringan. Di ruang, *kemiringan* diganti dengan **vektor arah**. Bidang di ruang ditentukan oleh sebuah titik dan sebuah **vektor normal**. Subbab ini memakai vektor untuk menuliskan garis dan bidang, mencari jarak dan sudut, serta perpotongan.

1. Persamaan garis

Misalkan L adalah garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor posisi $\mathbf{r}_0$, sejajar vektor tak nol $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ (**vektor arah**). Titik $P(x, y, z)$ berada di L bila $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar $\mathbf{v}$, yaitu $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ untuk suatu skalar t.



Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; $P = P_0 + t\mathbf{v}$.

PERSAMAAN GARIS

- **Vektor:** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Parametrik:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$
- **Simetrik** (bila $a, b, c \neq 0$): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Bilangan a, b, c disebut **bilangan arah** garis.

CONTOH 1 — GARIS DARI TITIK DAN ARAH

Garis melalui $(5, 1, 3)$ sejajar $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$: $x = 5 + t,\ y = 1 + 4t,\ z = 3 - 2t$. Dua titik lain: $t = 1 \Rightarrow (6, 5, 1)$; $t = -1 \Rightarrow (4, -3, 5)$.

CONTOH 2 — GARIS MELALUI DUA TITIK

$A(2, 4, -3)$, $B(3, -1, 1)$. Arah $\overrightarrow{AB} = \langle 1, -5, 4 \rangle$. Garis: $x = 2 + t,\ y = 4 - 5t,\ z = -3 + 4t$. Persamaan simetrik: $x - 2 = \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{z + 3}{4}$. Titik potong dengan bidang xy ($z = 0$): $t = \frac{3}{4}$, titik $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

CONTOH 3 — RUAS GARIS

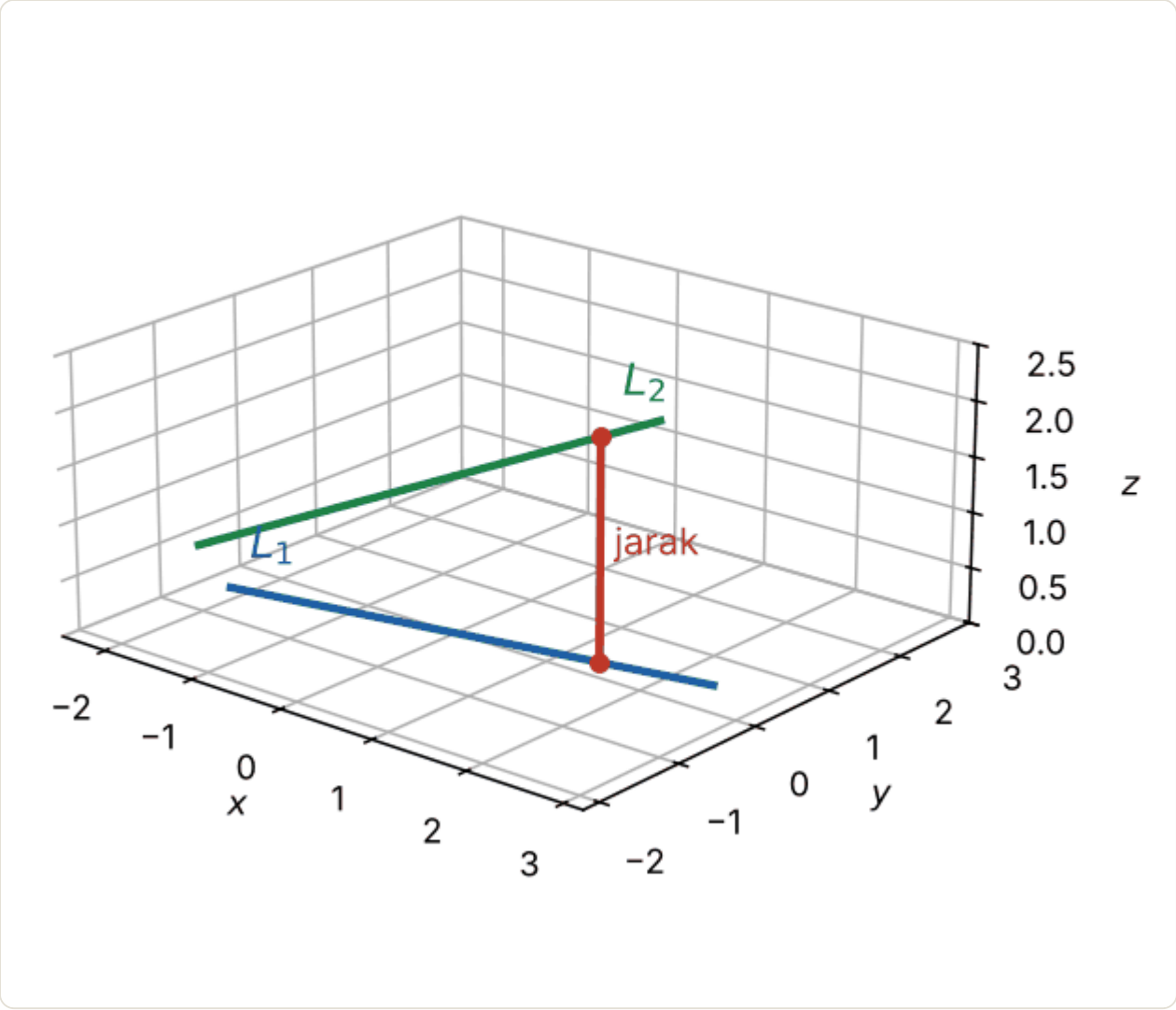
Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, $0 \leq t \leq 1$. Titik tengahnya $t = \frac{1}{2}$.

Hubungan dua garis

Dua garis di ruang dapat: **sejajar** (arah sebanding), **berpotongan**, atau **bersilangan** (*skew*: tidak sejajar dan tidak berpotongan, tidak sebidang).

CONTOH 4 — APAKAH BERSILANGAN?

$L_1:\ x = 1 + t,\ y = -2 + 3t,\ z = 4 - t$ dan $L_2:\ x = 2s,\ y = 3 + s,\ z = -3 + 4s$. Arahnya $\langle 1, 3, -1 \rangle$ dan $\langle 2, 1, 4 \rangle$ tidak sebanding, jadi tidak sejajar. Cari potongan: $1 + t = 2s$, $-2 + 3t = 3 + s$, $4 - t = -3 + 4s$. Dari yang pertama $t = 2s - 1$; ke yang kedua: $-2 + 6s - 3 = 3 + s \Rightarrow s = \frac{8}{5}, t = \frac{11}{5}$. Cek yang ketiga: $4 - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$, sedangkan $-3 + \frac{32}{5} = \frac{17}{5}$. Tidak sama, jadi tidak berpotongan: garis **bersilangan**.

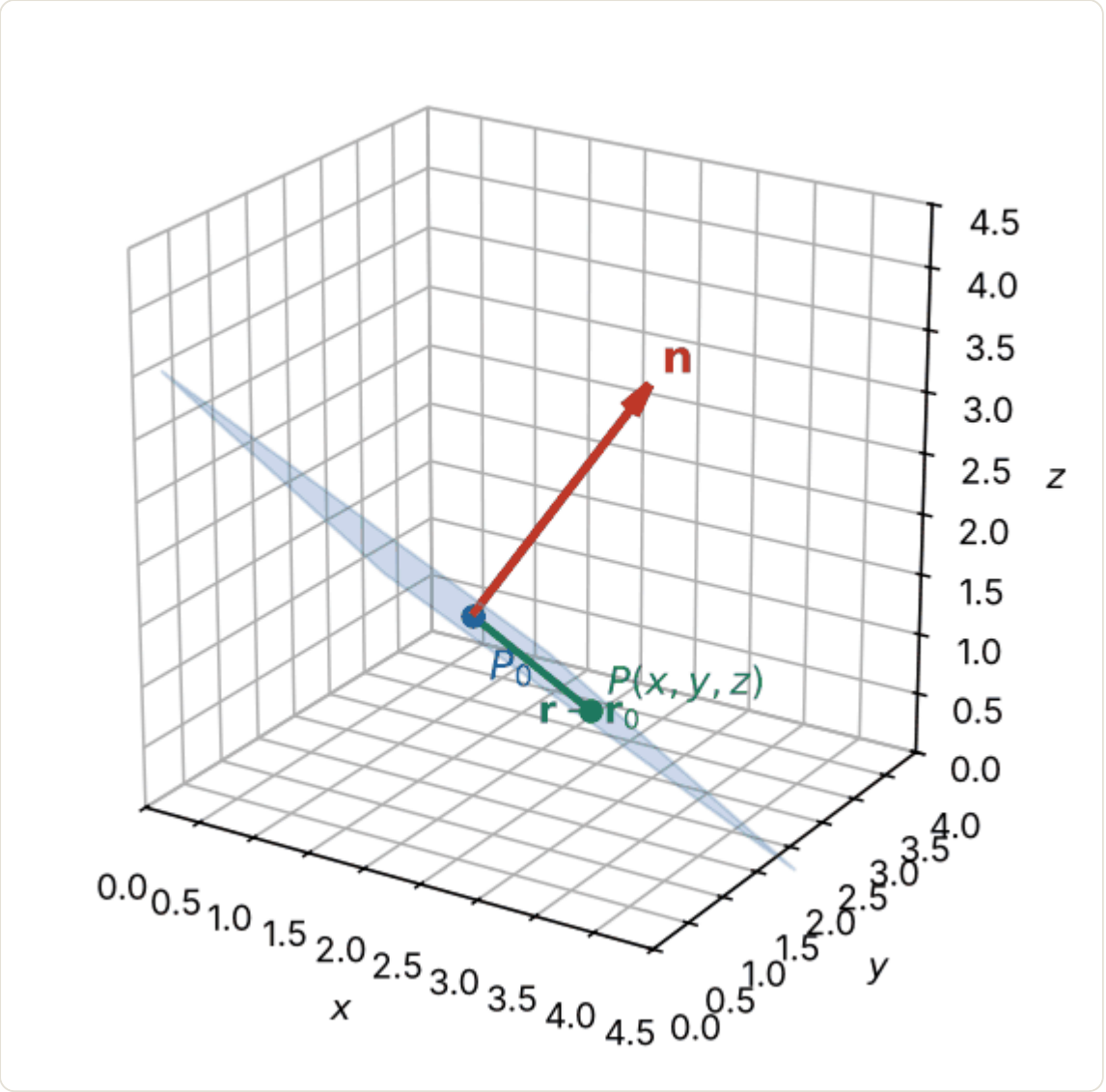


Garis bersilangan dan ruas terpendek yang menghubungkannya (merah).

2. Persamaan bidang

Sebuah bidang ditentukan oleh titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ padanya dan **vektor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ yang tegak lurus bidang. Titik $P(x, y, z)$ ada di bidang bila $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$



Bidang melalui P_0 dengan normal $\mathbf{n}$.

PERSAMAAN BIDANG

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad ax+by+cz+d=0, \quad d=-(a$$

Vektor $\langle a,b,c\rangle$ adalah normal bidang $ax+by+cz+d=0$.

CONTOH 5 — BIDANG DARI TITIK DAN NORMAL

Titik $(2,4,-1)$, normal $\langle 2,3,4\rangle$: $2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0 \Rightarrow 2x+3y+4z=12$. Titik potong sumbu: $x=6$, $y=4$, $z=3$.

CONTOH 6 — BIDANG MELALUI TIGA TITIK

$P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,0)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle 2,-4,4\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 4,-1,-2\rangle$. Normal $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle (-4)(-2) - 4(-1),\ 4\cdot 4 - 2\cdot(-2),\ 2(-1) - (-4)4\rangle = \langle 12, 20, 14\rangle$, atau disederhanakan $\langle 6, 10, 7\rangle$. Bidang: $6x + 10y + 7z = 6 + 30 + 14 = 50$. Cek Q: $18 - 10 + 42 = 50$ ✓; R: $30 + 20 + 0 = 50$ ✓.

CONTOH 7 — BIDANG MEMUAT GARIS DAN TITIK

Bidang yang memuat titik $A(3,-1,-2)$ dan garis $x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = -4 + t$? Titik pada garis: $B(0,1,-4)$ ($t = 0$), arah $\mathbf{v} = \langle 2,1,1\rangle$. $\overrightarrow{BA} = \langle 3,-2,2\rangle$. Normal $= \mathbf{v} \times \overrightarrow{BA} = \langle 1\cdot 2 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 3 - 2\cdot 2,\ 2(-2) - 1\cdot 3\rangle = \langle 4,-1,-7\rangle$. Bidang: $4x - (y-1) - 7(z+4) = 0 \Rightarrow 4x - y - 7z = 27$. Cek A: $12 + 1 + 14 = 27$ ✓.

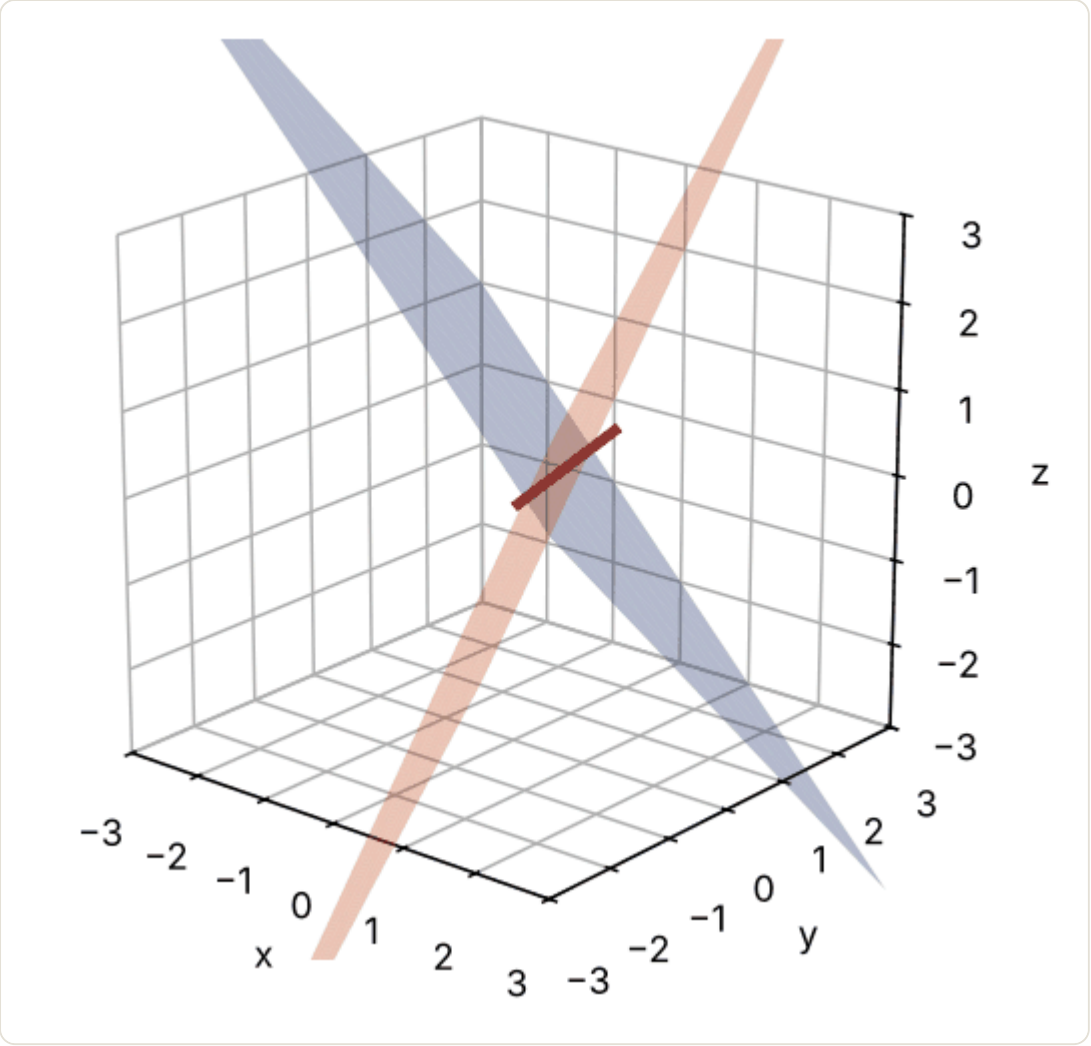
3. Sudut, kesejajaran, dan perpotongan bidang

Dua bidang **sejajar** bila normalnya sejajar. Bila tidak sejajar, mereka berpotongan pada sebuah garis, dan **sudut antara bidang** adalah sudut antara normalnya (yang lancip):

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}.$$

CONTOH 8 — SUDUT DAN GARIS POTONG DUA BIDANG

Bidang $x + y + z = 1$ dan $x - 2y + 3z = 1$. Normal $\langle 1,1,1\rangle$ dan $\langle 1,-2,3\rangle$; dot $= 2$; $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 72{,}0^\circ$. Arah garis potong $= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \langle 1\cdot 3 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3,\ 1\cdot(-2) - 1\cdot 1\rangle = \langle 5,-2,-3\rangle$. Titik pada garis: pilih $z = 0$: $x + y = 1$, $x - 2y = 1 \Rightarrow y = 0, x = 1$. Garis: $x = 1 + 5t,\ y = -2t,\ z = -3t$.



Dua bidang berpotongan pada sebuah garis (merah).

CONTOH 9 — SUDUT BIDANG LAIN

Untuk $x + y + z = 1$ dan $x + 2y + 3z = 1$: $\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 22{,}2°$. Arah garis potong $\langle 1,1,1\rangle \times \langle 1,2,3\rangle = \langle 1,-2,1\rangle$; titik $(1,0,0)$ pada keduanya: $x = 1 + t,\ y = -2t,\ z = t$.

4. Garis dan bidang

CONTOH 10 — TITIK TEMBUS GARIS PADA BIDANG

Garis $x = 1 + 2t,\ y = -t,\ z = 3 + t$ dan bidang $x + 2y - z = 4$. Substitusi: $(1 + 2t) + 2(-t) - (3 + t) = 4 \Rightarrow -2 - t = 4 \Rightarrow t = -6$. Titik tembus $(-11, 6, -3)$. Bila koefisien t hilang dan sisi konstan tidak cocok, garis sejajar bidang (tidak berpotongan); bila cocok, garis terletak pada bidang.

5. Jarak

JARAK TITIK KE BIDANG

Jarak titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $ax + by + cz + d = 0$:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Penurunan. Ambil P_0 pada bidang. Jarak $= |\text{comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_0P_1}| = \dfrac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{n}|}$, dengan $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$. ■

CONTOH 11

Jarak $(4, -2, 3)$ ke bidang $2x - y + 2z = 5$: $\dfrac{|8 + 2 + 6 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{11}{3} \approx 3{,}67$. Jarak antara bidang sejajar $2x - y + 2z = 5$ dan $2x - y + 2z = -4$: ambil titik $(0, 0, -2)$ pada yang kedua (cek: -4) dan hitung jaraknya ke yang pertama: $\frac{|-4-5|}{3} = 3$.

JARAK TITIK KE GARIS

Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; jarak dari P: $D = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$ (tinggi jajargenjang).

JARAK ANTARA DUA GARIS BERSILANGAN

Untuk garis dengan titik P_1, P_2 dan arah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: $D = \dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$ (tinggi paralelepipedum).

CONTOH 12 — JARAK GARIS BERSILANGAN (DARI CONTOH 4)

$P_1(1, -2, 4)$, $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$; $P_2(0, 3, -3)$, $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \langle 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1,\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 4,\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2\rangle = \langle 13, -6, -5\rangle$, $|\cdot| = \sqrt{230}$. $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1, 5, -7\rangle$; dot $= -13 - 30 + 35 = -8$. Jarak $= \dfrac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}528$.

6. Kesalahan umum

- Memakai titik sebagai vektor arah atau sebaliknya.
- Menganggap garis di ruang punya persamaan tunggal $ax + by + cz = d$ (itu bidang; garis memerlukan dua persamaan bidang atau bentuk parametrik).
- Menyimpulkan garis berpotongan hanya karena tidak sejajar (bisa bersilangan).
- Lupa nilai mutlak pada rumus jarak.

7. Ringkasan

- Garis: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$; bidang: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
- Normal bidang dari tiga titik: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$; garis potong dua bidang: arah $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.
- Jarak titik–bidang $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; jarak garis bersilangan lewat tripel skalar.

Berikutnya 12.6: permukaan yang lebih rumit dari bidang dan bola.

12.6 Silinder dan Permukaan Kuadrik

Pada 12.5 kita mempelajari permukaan paling sederhana: bidang. Subbab ini membahas permukaan lengkung yang persamaannya berderajat dua: **silinder** dan **permukaan kuadrik**. Permukaan ini akan sering muncul sebagai grafik fungsi dua peubah (Bab 14) dan sebagai batas daerah integral rangkap tiga (Bab 15).

1. Jejak (trace)

Permukaan di ruang sulit digambar langsung. Cara yang andal: potong permukaan dengan bidang-bidang sejajar bidang koordinat, lalu amati kurva irisannya.

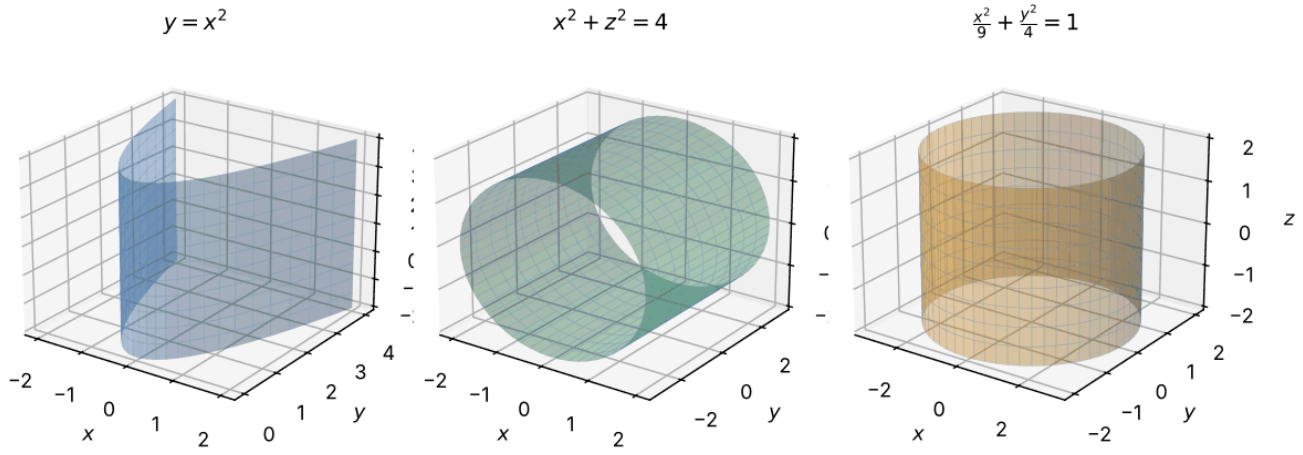
> **DEFINISI — JEJAK**
>
> **Jejak** suatu permukaan S adalah kurva perpotongan S dengan sebuah bidang. Bidang $x = k$ memberi jejak di bidang yz-sejajar, bidang $y = k$ memberi jejak xz-sejajar, dan bidang $z = k$ memberi jejak xy-sejajar (sering disebut *kurva ketinggian* atau *irisan horizontal*).

Dengan menggabungkan beberapa jejak, bentuk permukaan terbayang seperti tumpukan irisan roti.

2. Silinder

> **DEFINISI — SILINDER**
>
> **Silinder** adalah permukaan yang dibentuk oleh semua garis (disebut *garis pelukis*) yang sejajar suatu garis tertentu dan memotong suatu kurva bidang yang diberikan.

Kuncinya: *persamaan yang tidak memuat satu peubah* menggambarkan silinder yang garis pelukisnya sejajar sumbu peubah yang hilang. Persamaan di $\mathbb{R}^3$ yang hanya memuat x dan y adalah kurva di bidang xy yang "ditarik" sepanjang sumbu z.



Contoh silinder: kurva bidang yang digeser sepanjang sumbu yang peubahnya tidak muncul dalam persamaan.

CONTOH 1 — SILINDER PARABOLIK

$z = x^2$ tidak memuat y. Untuk setiap y, irisan $y = k$ adalah parabola $z = x^2$ yang sama. Jadi permukaannya adalah **silinder parabolik** dengan garis pelukis sejajar sumbu y.

CONTOH 2 — SILINDER LINGKARAN

$x^2 + y^2 = 1$ di $\mathbb{R}^3$: setiap bidang $z = k$ memotongnya di lingkaran satuan. Hasilnya pipa tak hingga berjari-jari 1 dengan sumbu z sebagai sumbu simetri. Sebaliknya $x^2 + z^2 = 4$ adalah silinder berjari-jari 2 sepanjang sumbu y.

CONTOH 3 — SILINDER HIPERBOLIK DAN ELIPTIK

$y^2 - z^2 = 1$ (tanpa x): silinder hiperbolik sepanjang sumbu x. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$: silinder eliptik sepanjang sumbu y.

HATI-HATI

Di bidang, $x^2 + y^2 = 1$ adalah lingkaran; di ruang ia silinder. Selalu periksa ruang tempat persamaan dibaca. Untuk membatasi silinder menjadi lingkaran saja, tambahkan persamaan kedua, mis. $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.

3. Permukaan kuadrik

DEFINISI — KUADRIK

Permukaan kuadrik adalah grafik persamaan derajat dua dalam tiga peubah:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Dengan translasi dan rotasi, persamaan ini dapat disederhanakan menjadi salah satu dari dua bentuk baku: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ atau $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

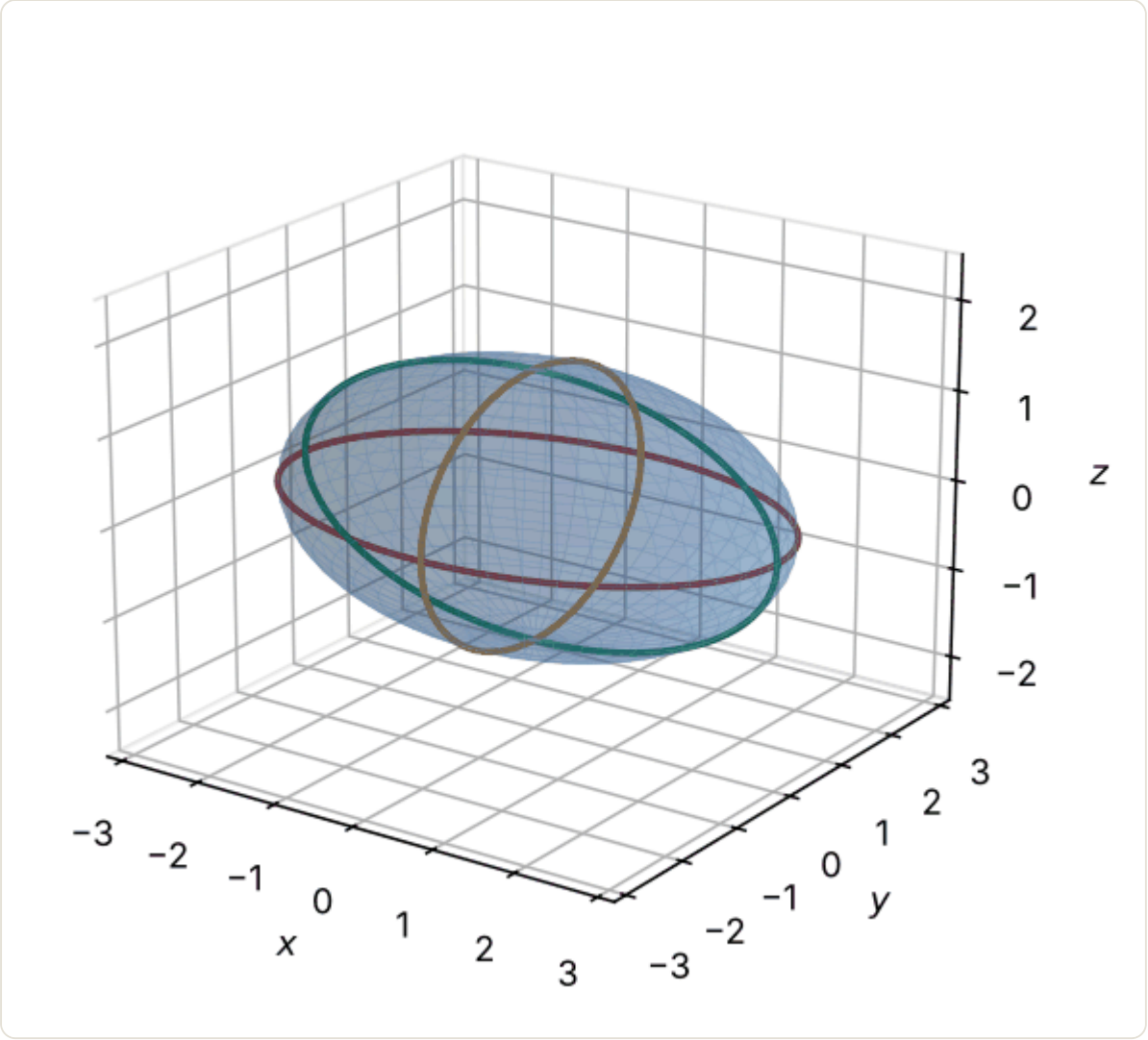
Berikut enam jenis utama (konstanta $a, b, c > 0$). Untuk tiap jenis kita lihat jejaknya.

3.1 Elipsoid

ELIPSOID

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak di $z = k$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$, elips untuk $|k| < c$, satu titik untuk $|k| = c$, kosong untuk $|k| > c$. Jejak di bidang lain juga elips. Titik potong sumbu: $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Jika $a = b = c$, elipsoid menjadi bola.



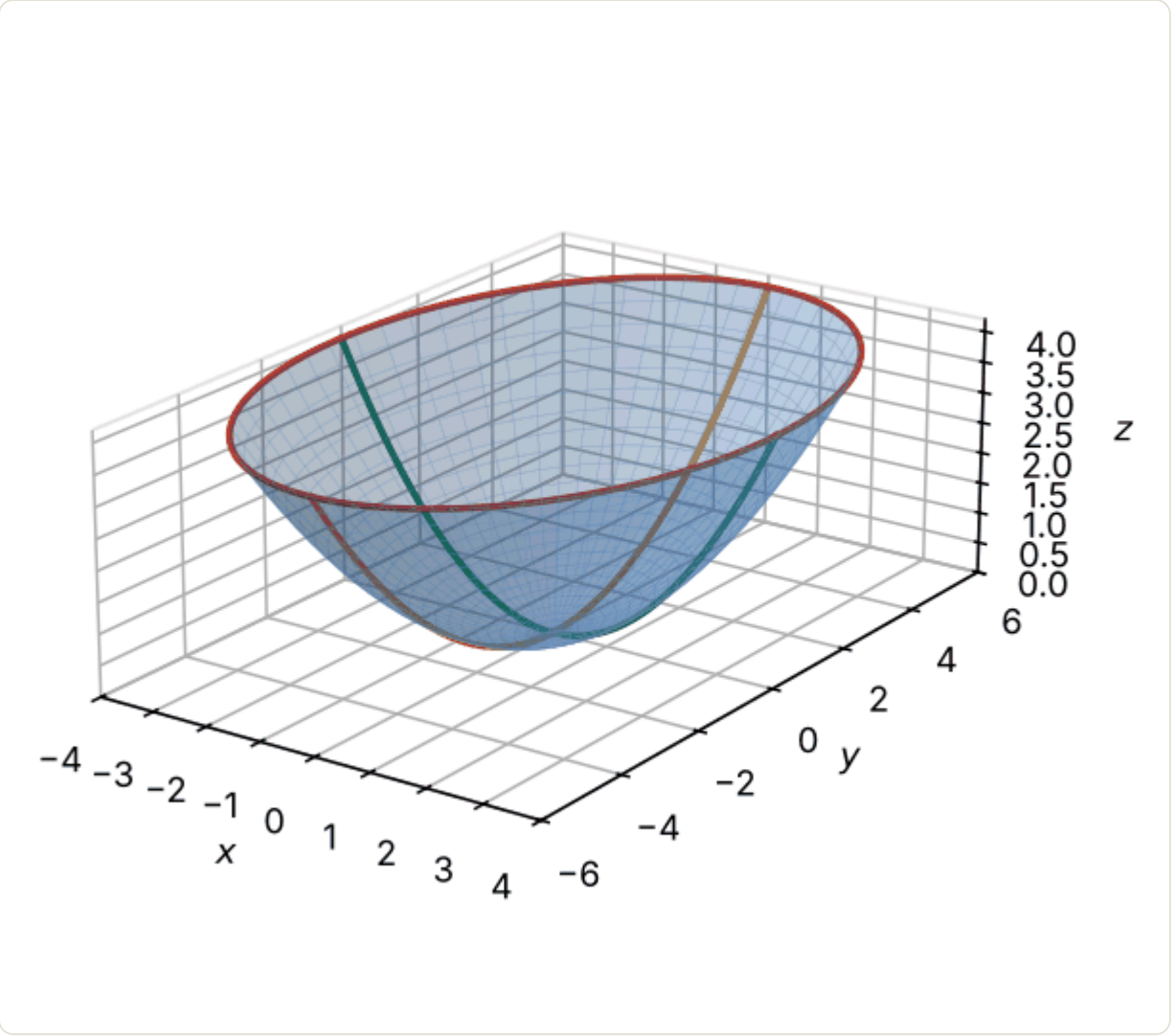
Elipsoid; semua jejaknya elips.

3.2 Paraboloid eliptik

PARABOLOID ELIPTIK

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips untuk $k > 0$, titik asal untuk $k = 0$, kosong untuk $k < 0$. Jejak $x = k$ dan $y = k$: parabola. Bentuk seperti mangkuk atau antena parabola yang membuka ke atas. Untuk $a = b$ disebut paraboloid putar.



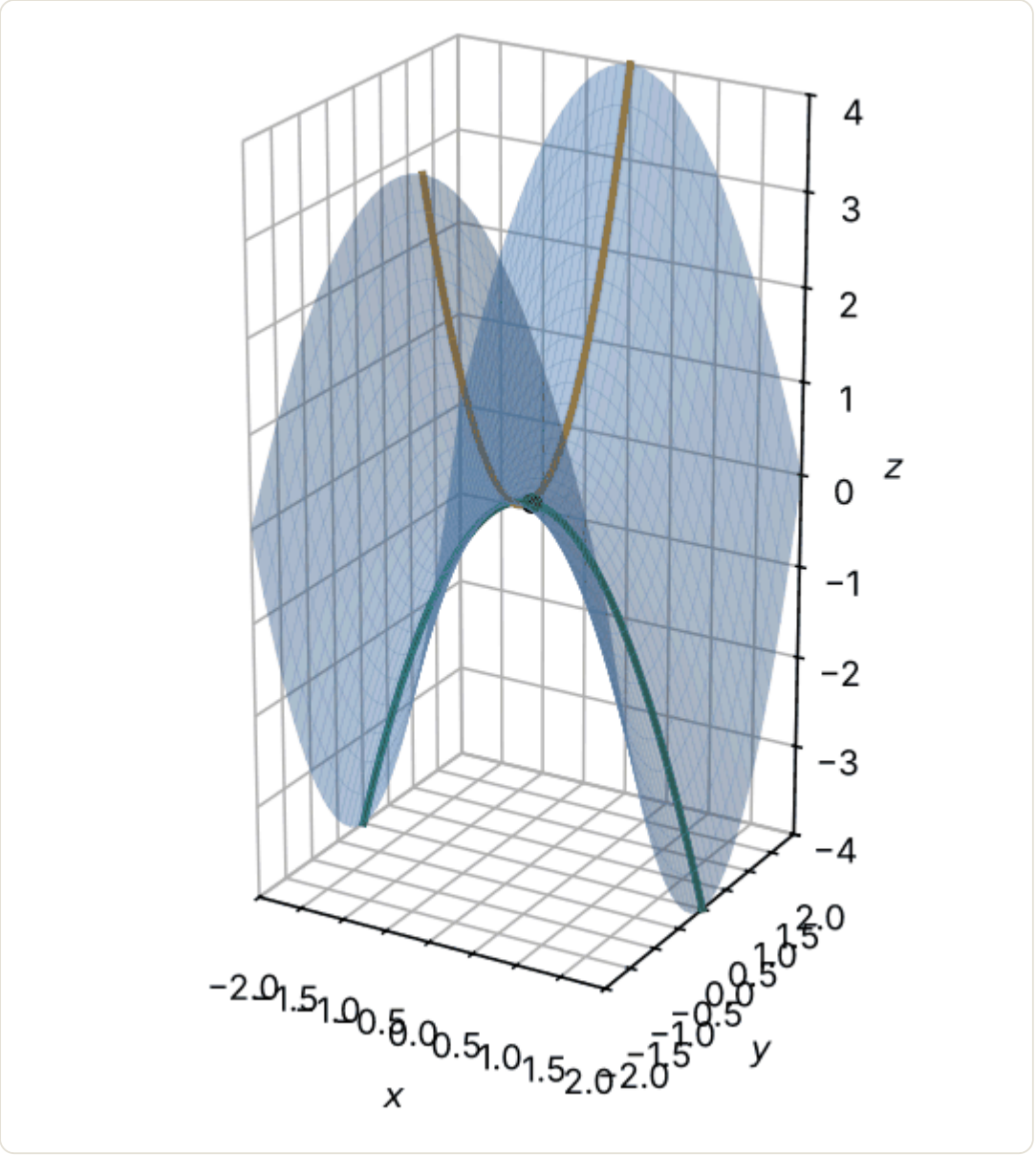
Paraboloid eliptik $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.

3.3 Paraboloid hiperbolik

PARABOLOID HIPERBOLIK (PELANA)

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Jejak $z = k$: hiperbola (untuk $k \neq 0$), dua garis berpotongan $y = \pm\frac{b}{a}x$ untuk $k = 0$. Jejak $x = k$: parabola membuka ke atas; jejak $y = k$: parabola membuka ke bawah. Titik asal adalah *titik pelana*: minimum sepanjang sumbu y tetapi maksimum sepanjang sumbu x.



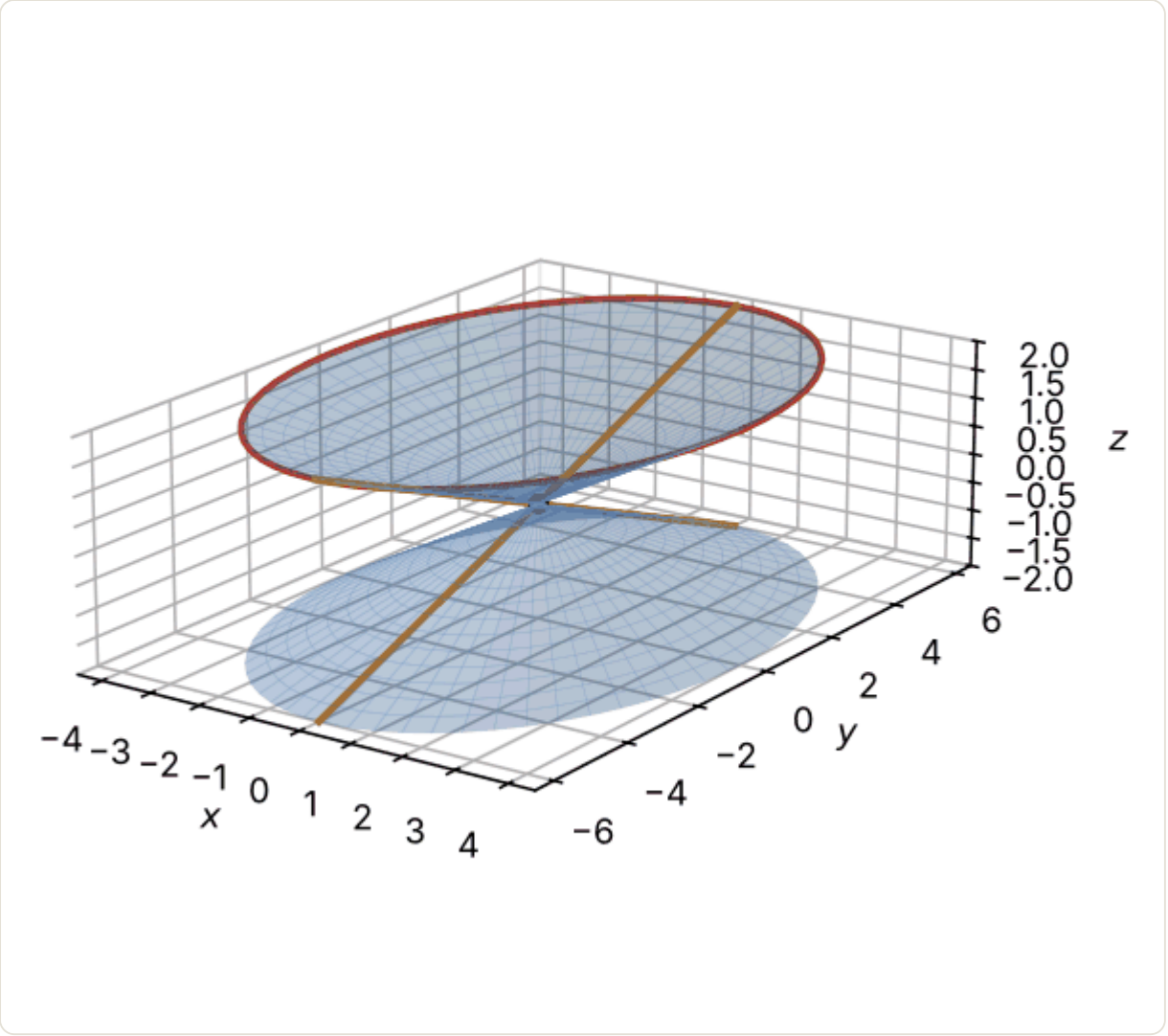
Paraboloid hiperbolik (pelana).

3.4 Kerucut eliptik

KERUCUT ELIPTIK

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ yang membesar dengan $|k|$ (satu titik di $k = 0$). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola (dan dua garis berpotongan di $k = 0$). Permukaan terdiri dari dua "lembar" yang bertemu di titik asal.



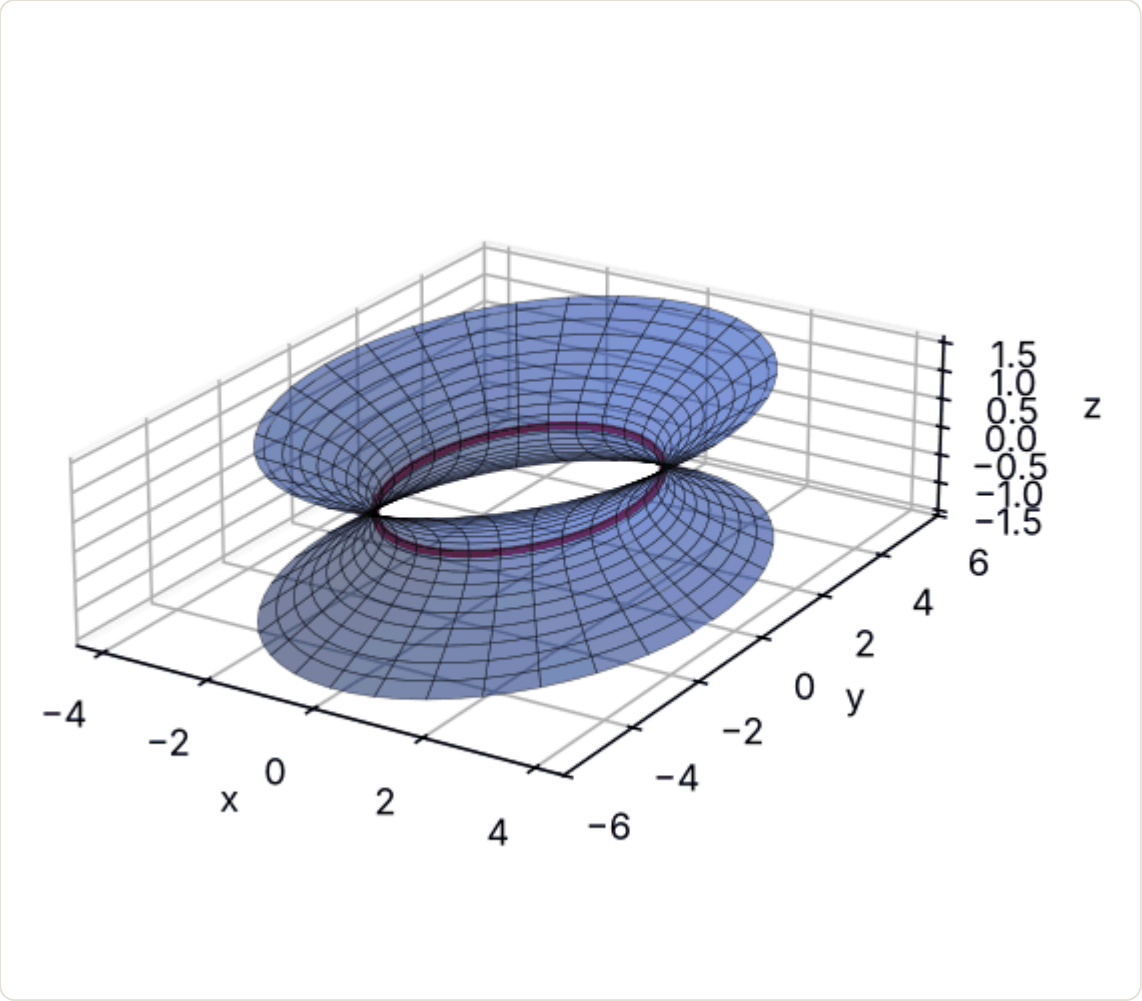
Kerucut eliptik.

3.5 Hiperboloid satu lembar

HIPERBOLOID SATU LEMBAR

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ untuk semua k, paling kecil di $k = 0$ ("pinggang"). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola. Satu permukaan yang tersambung, seperti menara pendingin.



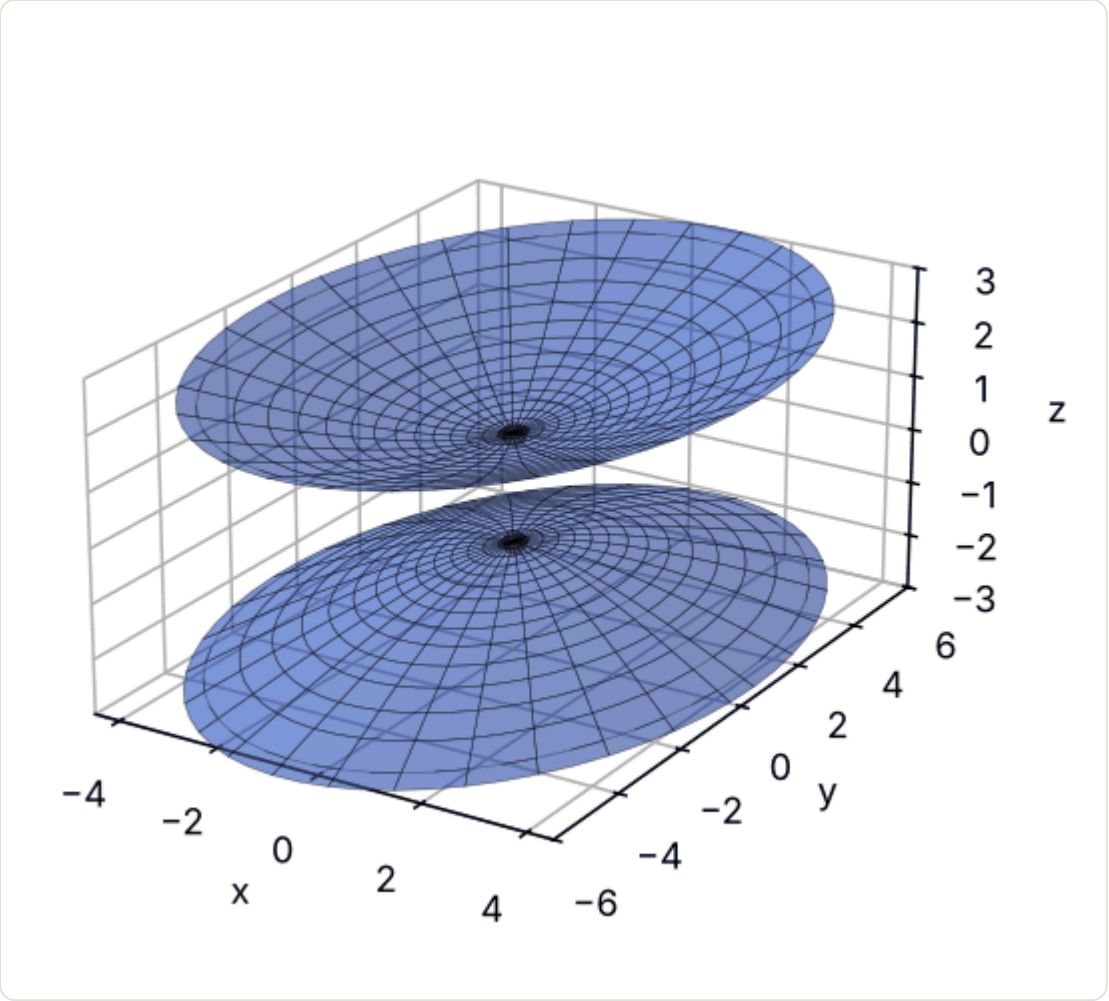
Hiperboloid satu lembar.

3.6 Hiperboloid dua lembar

HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Jejak $z=k$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$, kosong untuk $|k|<c$, titik untuk $|k|=c$, elips untuk $|k|>c$. Jejak $x=k$, $y=k$: hiperbola. Permukaannya terdiri dari *dua bagian terpisah* ($z\geq c$ dan $z\leq -c$).



Hiperboloid dua lembar.

Tabel ringkasan

Permukaan	Persamaan baku	Jejak $z = k$	Jejak vertikal
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert < c$)	elips
Paraboloid eliptik	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips ($k > 0$)	parabola
Paraboloid hiperbolik	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	hiperbola	parabola
Kerucut eliptik	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips	hiperbola
Hiperboloid satu lembar	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips (semua k)	hiperbola
Hiperboloid dua lembar	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert > c$)	hiperbola

CARA CEPAT MENGENALI

- Semua peubah berpangkat dua, ruas kanan 1: ada tanda minus? Tidak ada → elipsoid; satu minus → hiperboloid satu lembar; dua minus → hiperboloid dua lembar.
- Ruas kanan 0 dengan semua pangkat dua → kerucut.
- Satu peubah berpangkat satu, dua lainnya kuadrat → paraboloid (elips jika tanda sama, hiperbolik jika berbeda).

4. Contoh

CONTOH 4 — MENGENALI PERMUKAAN

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$. Lengkapkan kuadrat x: $(x-3)^2 + 2z^2 = y - 1$, yaitu $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$. Ini paraboloid eliptik dengan sumbu sejajar sumbu y dan titik puncak $(3, 1, 0)$, membuka ke arah y positif.

CONTOH 5 — KUADRIK DENGAN PERGESERAN

$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 1$. Lengkapkan kuadrat: $(x-1)^2 - (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$. Persamaannya $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{2} + \dfrac{(z-1)^2}{2} = 1$: hiperboloid satu lembar dengan pusat $(1, 1, 1)$ dan sumbu sejajar sumbu y (peubah yang bertanda minus).

CONTOH 6 — ELIPSOID DARI PERSAMAAN UMUM

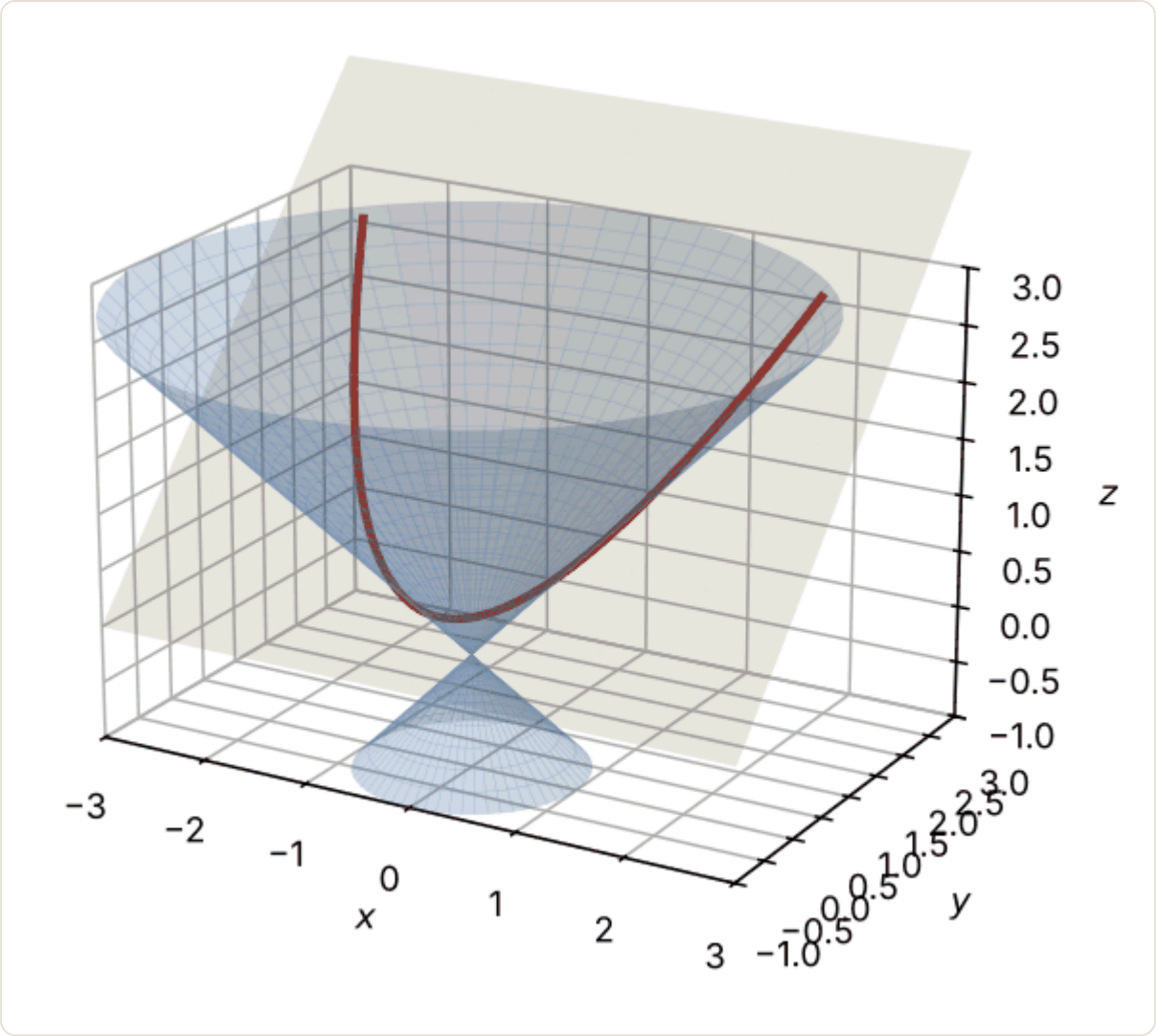
$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 8x + 2y - 36z + 13 = 0 \to 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + 9(z-2)^2 = -13 + 4 + 1 + 36 = 28$. Bagi 28: $\dfrac{(x-1)^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{28} + \dfrac{(z-2)^2}{28/9} = 1$. Elipsoid dengan pusat $(1, -1, 2)$, setengah sumbu $\sqrt{7},\ \sqrt{28},\ \sqrt{28}/3$.

CONTOH 7 — HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$z^2 - x^2 - y^2 = 4$ adalah hiperboloid dua lembar: jejak $z = k$ adalah $x^2 + y^2 = k^2 - 4$, kosong untuk $|k| < 2$, titik di $k = \pm 2$ (titik puncak $(0, 0, \pm 2)$). Sedangkan $z^2 - x^2 - y^2 = -4$ (ruas kanan negatif) berarti $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, hiperboloid satu lembar. Perubahan tanda di ruas kanan mengubah jenis permukaan.

CONTOH 8 — IRISAN DUA PERMUKAAN

Kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ dipotong bidang $z = 1 + y$: substitusi, $(1+y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 2y$, yaitu $y = \frac{x^2 - 1}{2}$. Proyeksi irisan pada bidang xy adalah parabola, dan kurva irisannya sendiri adalah parabola di bidang miring itu. Inilah salah satu *irisan kerucut*: elips, parabola, atau hiperbola, tergantung kemiringan bidang potong.



Kerucut yang dipotong bidang menghasilkan kurva irisan.

CONTOH 9 — BENDA PADAT YANG DIBATASI PERMUKAAN

Daerah di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan di bawah bidang $z = 4$: jejak $z = 4$ adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Untuk tiap $z \in [0, 4]$ irisannya cakram berjari-jari $\sqrt{z}$. Volumnya (dengan irisan) $\displaystyle\int_0^4 \pi z \, dz = 8\pi$.

CONTOH 10 — SATELIT ANTENA

Antena parabola dengan lebar 2 m dan kedalaman 0,25 m dimodelkan $z = kr^2$, $r^2 = x^2 + y^2$: di $r = 1$, $z = 0{,}25$, jadi $k = 0{,}25$; persamaan $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Paraboloid putar ini fokus pada $z = \frac{1}{4k} = 1$ m: semua sinar sejajar sumbu terpantul menuju titik tersebut.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x^2 + y^2 = 1$ di ruang adalah lingkaran. Ia silinder (peubah z bebas).
- Menyamakan paraboloid dan kerucut: kerucut $z^2 = \ldots$ (kuadrat), paraboloid $z = \ldots$ (linear).
- Mengabaikan tanda: satu minus (satu lembar) vs dua minus (dua lembar).
- Menggambar permukaan dari satu jejak saja. Gabungkan beberapa jejak.
- Lupa melengkapkan kuadrat sehingga pusat/puncak salah.

6. Ringkasan

- Jejak: irisan permukaan dengan bidang $x = k$, $y = k$, atau $z = k$.
- Silinder: persamaan tanpa satu peubah; garis pelukis sejajar sumbu peubah itu.
- Enam kuadrik: elipsoid, paraboloid eliptik/hiperbolik, kerucut, hiperboloid satu/dua lembar.
- Untuk mengenali: lengkapkan kuadrat, bawa ke bentuk baku, lihat tanda dan pangkat.

Bab 12 berakhir di sini. Bab berikutnya, 13.1, memakai vektor untuk menggambarkan kurva dan gerak di ruang.

Bab 13: Fungsi Vektor

13.1 Fungsi Vektor dan Kurva Ruang

Di Bab 10 kita menggambarkan kurva bidang dengan persamaan parametrik $x = f(t),\ y = g(t)$. Di ruang, kurva memerlukan tiga fungsi. Menggabungkannya menjadi satu objek bervektor memberi alat yang kuat: **fungsi vektor**, yang memungkinkan kita memakai kalkulus untuk membahas gerak, kecepatan, dan percepatan (13.4).

1. Fungsi vektor

DEFINISI

Fungsi vektor adalah fungsi yang daerah asalnya himpunan bilangan real dan daerah hasilnya himpunan vektor. Di ruang,

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t),\, g(t),\, h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k},$$

dengan f, g, h fungsi bernilai real (disebut *fungsi komponen*). Daerah asal $\mathbf{r}$ adalah irisan daerah asal ketiga komponennya.

CONTOH 1 — DAERAH ASAL

$\mathbf{r}(t) = \langle \ln(4 - t^2),\ \sqrt{t+1},\ \dfrac{1}{t-1} \rangle$. Syarat: $4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2; t + 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq -1; t \neq 1$. Daerah asal: $[-1, 1) \cup (1, 2)$.

2. Kurva ruang

Bila t berubah, ujung vektor posisi $\mathbf{r}(t)$ menggambar sebuah **kurva ruang** C. Persamaan parametriknya $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$, dan $\mathbf{r}$ disebut *parametrisasi* C. Satu kurva dapat diparametrisasi dengan banyak cara.

Limit dan kekontinuan

LIMIT DAN KONTINU

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\left\langle \lim_{t\to a}f(t),\ \lim_{t\to a}g(t),\ \lim_{t\to a}h(t)\right\rangle$$

asalkan ketiga limit komponen ada. $\mathbf{r}$ kontinu di a bila $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$; ini setara dengan kekontinuan ketiga komponen.

CONTOH 2 — LIMIT

$\lim_{t\to 0}\left\langle \dfrac{\sin t}{t},\ e^{2t},\ \dfrac{1-\cos t}{t^2}\right\rangle=\langle 1,1,\tfrac{1}{2}\rangle$.

3. Kurva-kurva penting

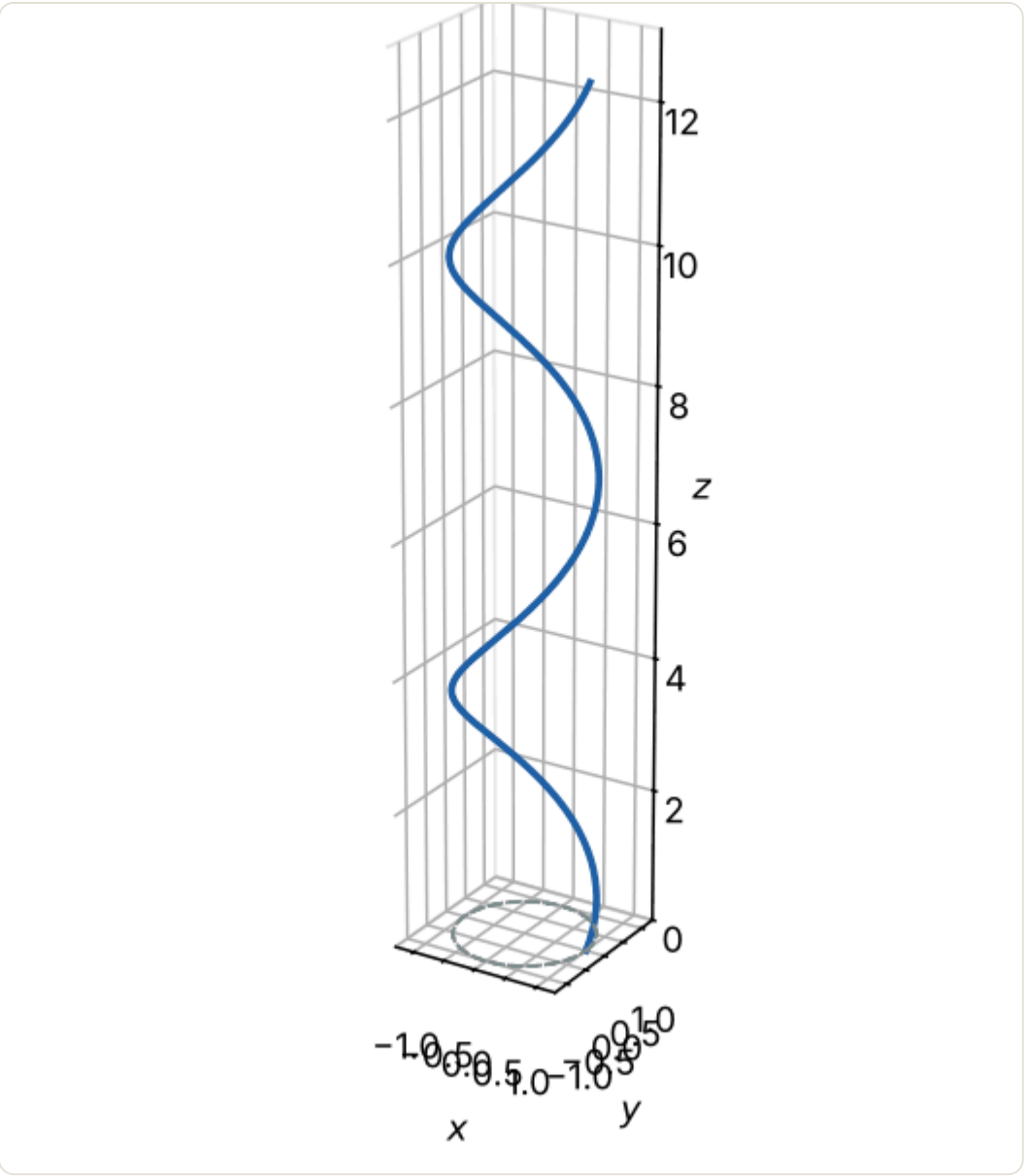
Garis lurus

Garis melalui $\mathbf{r}_0$ dengan arah $\mathbf{v}$: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$ (12.5). Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t)=(1-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r}_1$, $0\le t\le 1$.

Heliks (spiral)

CONTOH 3 — HELIKS

$\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$. Karena $x^2+y^2=1$, kurva terletak pada silinder lingkaran $x^2+y^2=1$ (12.6). Sementara t naik, titik berputar mengelilingi silinder dan naik dengan laju tetap: $z=t$. Satu putaran (t naik 2π) menaikkan z sebesar 2π. Bentuk umum $\langle a\cos t,\ a\sin t,\ bt\rangle$ berjari-jari a dan "tinggi ulir" $2\pi b$ per putaran. Bila $b<0$ heliks berputar ke arah sebaliknya.



Heliks $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$, dengan proyeksi lingkaran di bidang xy.

Kubik terpilin

CONTOH 4 — KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Proyeksi pada bidang xy: $y = x^2$; pada bidang xz: $z = x^3$; pada bidang yz: $z^2 = y^3$. Kurva terletak pada silinder parabolik $y = x^2$ sekaligus silinder $z = x^3$.

4. Kurva sebagai irisan permukaan

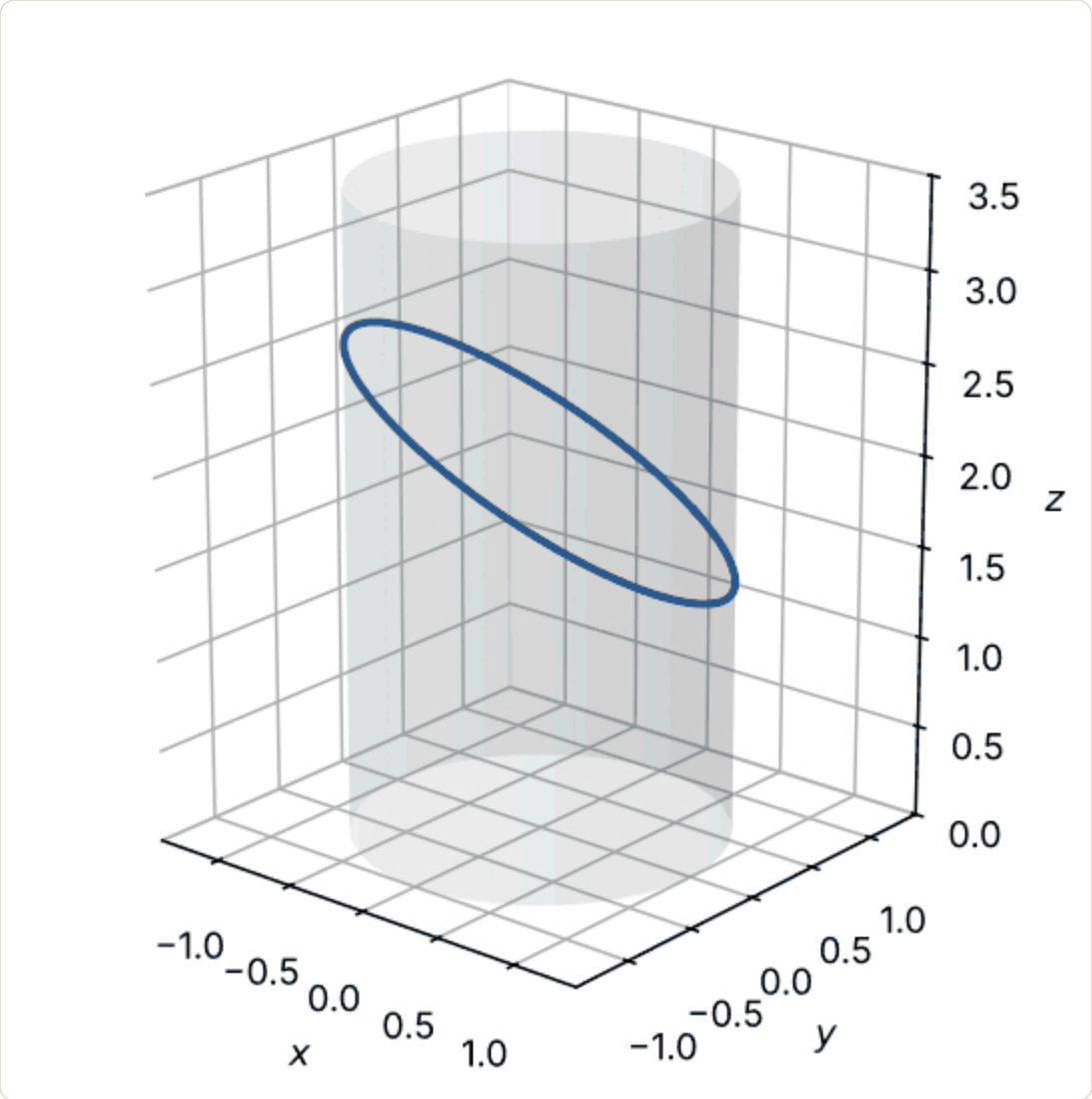
Kurva sering diberikan sebagai perpotongan dua permukaan. Untuk menparametrisasinya, pilih parametrisasi salah satu kurva proyeksi, lalu cari peubah ketiga dari persamaan kedua.

CONTOH 5 — SILINDER DAN BIDANG

Cari parametrisasi perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$. Proyeksi pada bidang xy adalah lingkaran satuan: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dari bidang, $z = 2 - y = 2 - \sin t$. Jadi

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\ \sin t,\ 2 - \sin t \rangle.$$

Kurva ini sebuah elips (irisan bidang miring dengan silinder), terletak pada bidang $y + z = 2$.



Elips: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dengan bidang $y + z = 2$.

CONTOH 6 — PARABOLOID DAN BIDANG

Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan $z = 4$: lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ pada tinggi 4, $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t,\ 2\sin t,\ 4 \rangle$. Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan bidang $y = x$: $z = 2x^2$, $\mathbf{r}(t) = \langle t,\ t,\ 2t^2 \rangle$ (parabola).

CONTOH 7 — BOLA DAN SILINDER (KURVA VIVIANI)

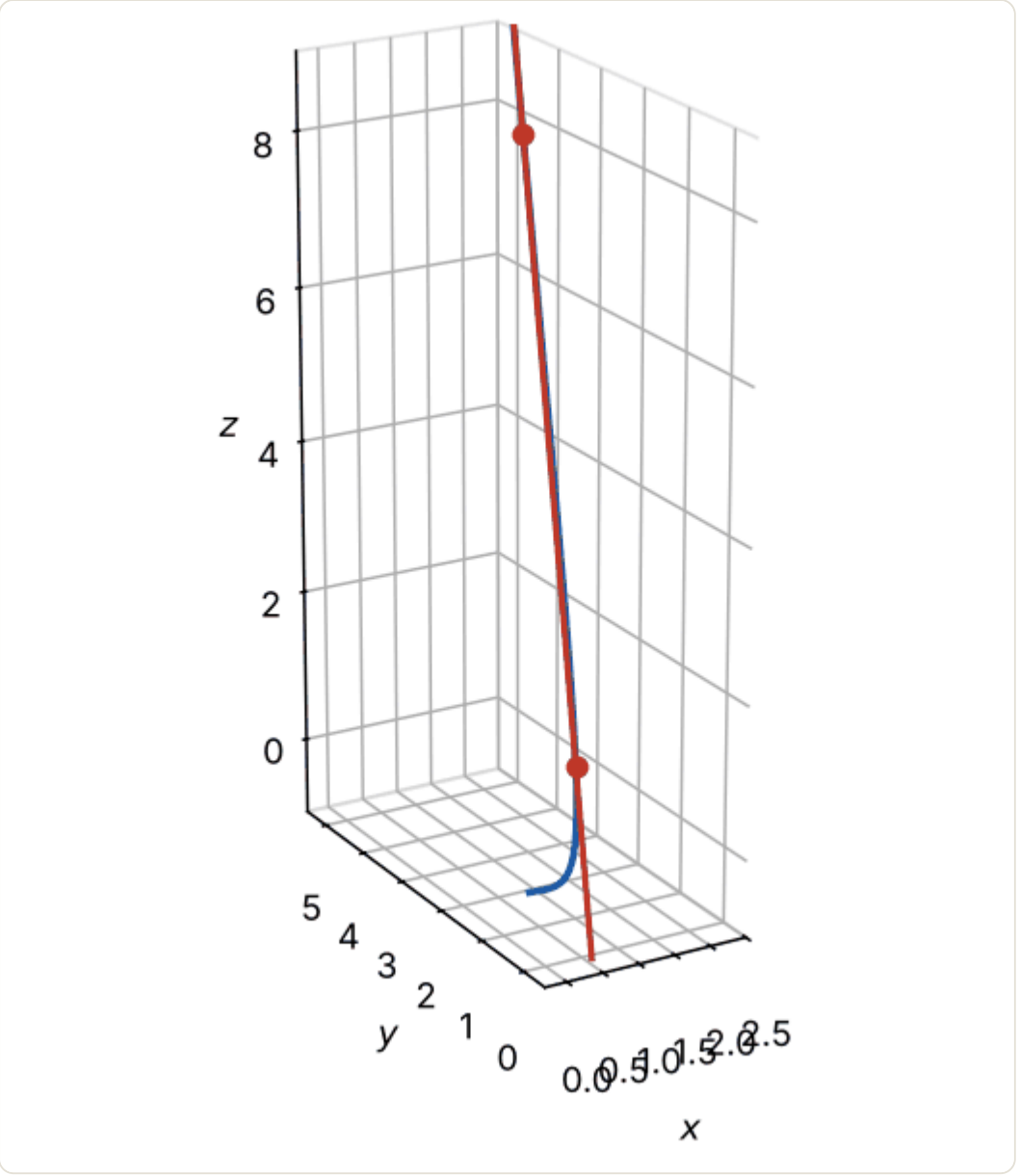
Bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dan silinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$, yaitu $x^2 + y^2 = 2x$. Parametrisasi silinder: $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$. Maka $z^2 = 4 - 2x = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$, jadi $z = \pm 2 \sin \frac{t}{2}$. Kurva (dua cabang untuk $0 \le t \le 2\pi$): $\langle 1 + \cos t,\ \sin t,\ 2\sin \frac{t}{2} \rangle$ dan cerminannya di $z \to -z$.

5. Perpotongan versus tabrakan

Dua kurva yang berpotongan di suatu titik belum tentu "bertabrakan". Misalkan dua partikel bergerak sepanjang kurva $\mathbf{r}_1(t)$ dan $\mathbf{r}_2(s)$. Kurva berpotongan bila ada t, s dengan $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(s)$. Partikel *bertabrakan* bila $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$: titik yang sama pada waktu yang sama.

CONTOH 8 — TITIK POTONG DAN TABRAKAN

$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ dan garis sekan $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s,\ 1 + 3s,\ 1 + 7s \rangle$. Samakan: $t = 1 + s$, $t^2 = 1 + 3s$, $t^3 = 1 + 7s$. Dari yang pertama dan kedua: $(1+s)^2 = 1 + 3s \Rightarrow s^2 - s = 0 \Rightarrow s = 0$ atau $s = 1$. Untuk $s = 0$: $t = 1$, dan $t^3 = 1 = 1 + 0$ benar: titik $(1, 1, 1)$. Untuk $s = 1$: $t = 2$, $t^3 = 8 = 1 + 7$ benar: titik $(2, 4, 8)$. Jadi dua titik potong. Tabrakan memerlukan $t = s$: dari $t = 1 + s$ mustahil. Kedua partikel tidak pernah bertabrakan, meskipun jalurnya berpotongan.



Kubik terpilin dan garis sekan yang memotongnya di $(1, 1, 1)$ dan $(2, 4, 8)$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap kurva dan parametrisasinya sama. Kurva adalah himpunan titik; parametrisasi juga menentukan arah dan kecepatan penelusuran.
- Lupa memeriksa daerah asal tiap komponen (akar, logaritma, penyebut).
- Menyamakan perpotongan kurva dengan tabrakan partikel.
- Pada parametrisasi irisan permukaan: mengambil satu proyeksi tetapi lupa memeriksa kedua persamaan permukaan.

7. Ringkasan

- $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$; limit dan kekontinuan dihitung per komponen.
- Kurva penting: garis $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, heliks $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, kubik terpilin $\langle t, t^2, t^3 \rangle$.
- Parametrisasi irisan permukaan: parametrisasikan proyeksi, lalu selesaikan peubah ketiga.
- Perpotongan jalur $\neq$ tabrakan.

Berikutnya 13.2: turunan dan integral fungsi vektor.

13.2 Turunan dan Integral Fungsi Vektor

Kalkulus fungsi vektor berjalan komponen demi komponen, tetapi tafsir geometrisnya penting: turunan $\mathbf{r}'(t)$ adalah vektor singgung pada kurva.

1. Turunan

DEFINISI

Turunan fungsi vektor $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

bila limitnya ada. Bila $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ dengan f, g, h terturunkan, maka

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t),\ g'(t),\ h'(t) \rangle.$$

Tafsir geometris. $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ adalah vektor sekan dari titik $P = \mathbf{r}(t)$ ke $Q = \mathbf{r}(t+h)$. Dibagi h, ia searah sekan; ketika $h \to 0$ arahnya menuju garis singgung. Jadi bila $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{r}'(t)$ **menyinggung kurva di** P, menunjuk ke arah t membesar.

VEKTOR SINGGUNG SATUAN DAN GARIS SINGGUNG

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

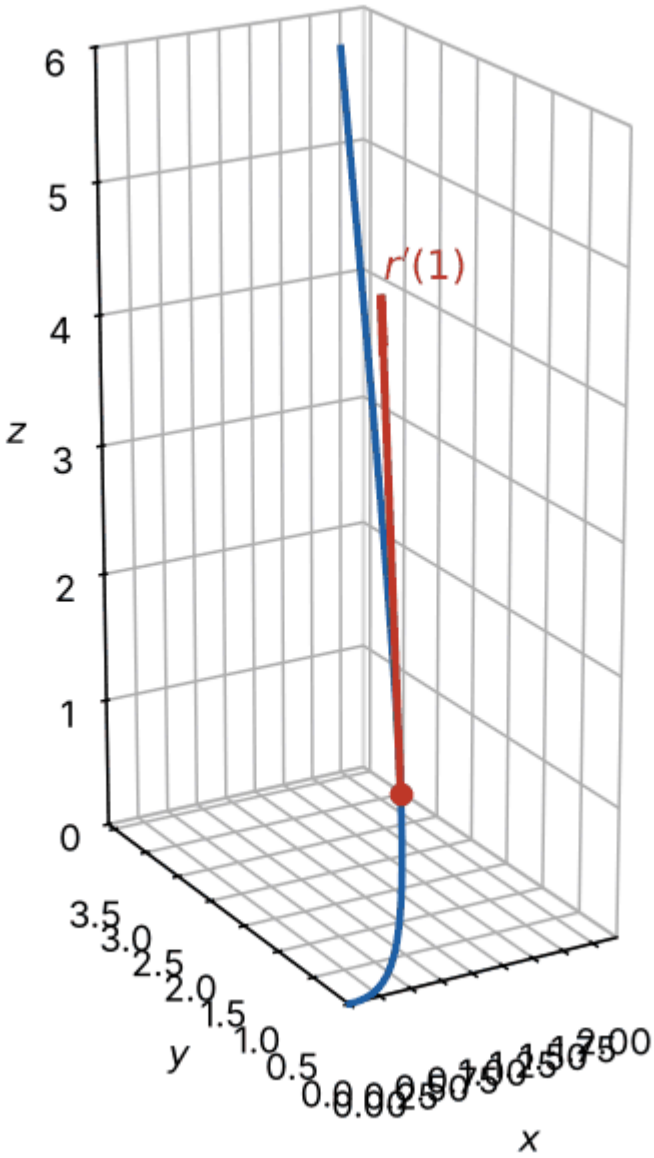
Garis singgung di $\mathbf{r}(t_0)$ adalah garis melalui titik itu dengan arah $\mathbf{r}'(t_0)$: $\mathbf{L}(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\,\mathbf{r}'(t_0)$.

CONTOH 1 — TURUNAN DAN SINGGUNG HELIKS

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$. Di $t = \pi/4$: titik $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, arah $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\rangle$. Garis singgung: $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}(1-s),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+s),\ \frac{\pi}{4}+s \right\rangle$.

CONTOH 2 — SINGGUNG KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Di $t = 1$: titik $(1, 1, 1)$, arah $\langle 1, 2, 3 \rangle$, garis singgung $\langle 1 + s, 1 + 2s, 1 + 3s \rangle$; $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 2, 3 \rangle$.



Vektor singgung $\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ pada kubik terpilin di $(1, 1, 1)$.

CONTOH 3 — SUDUT PERPOTONGAN DUA KURVA

Kurva $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ memotong garis $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s, 1 + 3s, 1 + 7s \rangle$ di $(1, 1, 1)$ ($t = 1$, $s = 0$). Arah singgung: $\mathbf{r}_1'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}_2' = \langle 1, 3, 7 \rangle$. $\cos\theta = \dfrac{1 + 6 + 21}{\sqrt{14}\sqrt{59}} = \dfrac{28}{28{,}74} \approx 0{,}974$, $\theta \approx 13{,}0^\circ$. Sudut antara dua kurva didefinisikan sebagai sudut antara garis singgungnya.

2. Aturan turunan

TEOREMA

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ fungsi vektor terturunkan, c skalar, f fungsi bernilai real. Maka:

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}+\mathbf{v}] = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}] = c\mathbf{u}'$
3. $\dfrac{d}{dt}[f\mathbf{u}] = f'\mathbf{u} + f\mathbf{u}'$
4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$
5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$ (urutan pada hasil kali silang harus dijaga)
6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (aturan rantai)

Bukti aturan 4. Dengan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$: $\frac{d}{dt}\sum u_i v_i = \sum (u_i' v_i + u_i v_i') = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$. Aturan 5 dibuktikan serupa dengan menjabarkan komponen hasil kali silang. ■

CONTOH 4 — HASIL KALI TITIK DAN SILANG

$\mathbf{u} = \langle t, t^2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, t, t^3\rangle$. Maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = t + t^3 + t^3 = t + 2t^3$ dengan turunan $1 + 6t^2$. Dengan aturan 4: $\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' = \langle 1, 2t, 0\rangle\cdot\langle 1, t, t^3\rangle + \langle t, t^2, 1\rangle\cdot\langle 0, 1, 3t^2\rangle = (1 + 2t^2) + (t^2 + 3t^2) = 1 + 6t^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PANJANG KONSTAN BERARTI TEGAK LURUS

Jika $|\mathbf{r}(t)| = c$ konstan, maka $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = c^2$. Turunkan: $2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0$, jadi $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$. Geometrisnya: kurva pada bola berpusat di asal mempunyai singgung yang tegak lurus jari-jari. Hal yang sama berlaku untuk $\mathbf{T}$: karena $|\mathbf{T}| = 1$, maka $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (dipakai di 13.3 untuk vektor normal).

CONTOH 6 — TURUNAN DENGAN ATURAN RANTAI

$\mathbf{u}(t) = \langle t^2,\, e^t,\, \sin t\rangle$ dan $f(t) = \ln t$: $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\ln t) = \frac{1}{t}\langle 2\ln t,\; e^{\ln t},\; \cos(\ln t)\rangle = \left\langle \frac{2\ln t}{t},\; 1,\; \frac{\cos\ln t}{t}\right\rangle$.

Turunan orde tinggi

$\mathbf{r}''(t) = \langle f'', g'', h'' \rangle$ adalah turunan dari $\mathbf{r}'$. Untuk kubik terpilin $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6t \rangle$. Vektor $\mathbf{r}''$ akan menjadi percepatan.

Kurva disebut **mulus** bila $\mathbf{r}'$ kontinu dan $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (kecuali mungkin di ujung). Kurva mulus tidak punya sudut tajam atau titik balik tiba-tiba; $\mathbf{T}$ berubah kontinu.

3. Integral

INTEGRAL FUNGSI VEKTOR

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b f\,dt,\ \int_a^b g\,dt,\ \int_a^b h\,dt \right\rangle.$$

Teorema Dasar Kalkulus berlaku: bila $\mathbf{R}' = \mathbf{r}$, maka $\int_a^b \mathbf{r}\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$. Integral tak tentu menghasilkan $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$, dengan $\mathbf{C}$ vektor konstanta.

CONTOH 7 — INTEGRAL TENTU

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \langle \cos t,\ \sin t,\ t \rangle\,dt = \left\langle 1,\ 1,\ \tfrac{\pi^2}{8} \right\rangle$. Sedangkan $\displaystyle\int_0^1 \langle 2t,\ 3t^2,\ e^t \rangle\,dt = \langle 1,\ 1,\ e - 1 \rangle$.

CONTOH 8 — MASALAH NILAI AWAL

Cari $\mathbf{r}(t)$ bila $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\ e^t,\ 1 \rangle$ dan $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 2 \rangle$. Integrasi: $\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ e^t,\ t \rangle + \mathbf{C}$. Di $t = 0$: $\langle 0, 1, 0 \rangle + \mathbf{C} = \langle 1, 0, 2 \rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 1, -1, 2 \rangle$. Jadi $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1,\ e^t - 1,\ t + 2 \rangle$.

CONTOH 9 — DUA KALI INTEGRASI

Percepatan $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, kecepatan awal $\mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, posisi awal $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$. Integrasi pertama: $\mathbf{r}' = \langle 0, 2t, 3t^2 \rangle + \langle 1, 0, 0 \rangle = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Integrasi kedua: $\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle + \langle 0, 1, 2 \rangle = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$.

CONTOH 10 — KETEGAKAN LURUS DAN INTEGRAL

Jika $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle \cdot 3$ (gerak melingkar jari-jari 3), maka $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ untuk semua t, konsisten dengan Contoh 5. Integrasi $\mathbf{r}'$ dari 0 ke 2π memberi $\langle 0, 0 \rangle$: perpindahan total nol karena kembali ke titik awal, tetapi jarak tempuh $\int |\mathbf{r}'| = 6\pi$ (13.3).

4. Kesalahan umum

- Memakai aturan hasil kali silang dengan urutan terbalik: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ bukan $\mathbf{v}' \times \mathbf{u}$.
- Menulis $|\mathbf{r}|' = |\mathbf{r}'|$: umumnya tidak benar. Panjang vektor posisi tidak sama dengan laju.
- Lupa konstanta vektor $\mathbf{C}$ pada integral tak tentu, atau memperlakukannya sebagai skalar.
- Menyatakan $\mathbf{r}'(t)$ singgung padahal $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ (kurva tidak mulus di titik itu).

5. Ringkasan

- $\mathbf{r}' = \langle f', g', h' \rangle$ adalah vektor singgung; $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$.
- Aturan: jumlah, hasil kali dengan skalar, titik, silang, rantai.
- $|\mathbf{r}|$ konstan $\Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{r}'$.
- Integral per komponen; masalah nilai awal memakai konstanta vektor.

Berikutnya 13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan.

13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan

Dua pertanyaan geometris alami pada kurva ruang: *berapa panjangnya?* dan *seberapa tajam ia melengkung?* Jawaban pertama adalah panjang busur; jawaban kedua adalah kelengkungan. Dari keduanya lahir kerangka $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ yang bergerak sepanjang kurva.

1. Panjang busur

PANJANG BUSUR KURVA RUANG

Untuk kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$, $a \le t \le b$, yang ditelusuri tepat satu kali,

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

Gagasan. Bagi $[a, b]$ menjadi selang kecil Δt. Panjang ruas lurus antar titik $\mathbf{r}(t_{i-1})$ dan $\mathbf{r}(t_i)$ adalah $\approx |\mathbf{r}'(t_i)|\Delta t$. Menjumlahkan dan mengambil limit memberi integral. Ini perluasan rumus di bidang (10.2) ke tiga dimensi.

CONTOH 1 — PANJANG SATU PUTARAN HELIKS

$\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$, $0 \le t \le 2\pi$: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi \approx 8{,}886$. Cek geometris: bila silinder dibuka, satu putaran berupa sisi miring segitiga siku-siku dengan alas 2π (keliling) dan tinggi 2π: $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{2}$. Cocok.

CONTOH 2 — KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ tidak punya antiturunan elementer sederhana. Integrasi numerik (Simpson) memberi $L \approx 1{,}863$. Bandingkan jarak lurus dari $(0,0,0)$ ke $(1,1,1)$: $\sqrt{3} \approx 1{,}732 < 1{,}863$, sesuai harapan bahwa kurva lebih panjang dari ruas lurus.

CONTOH 3 — KURVA BIDANG $Y = X^2$

Parametrisasi $\langle t, t^2, 0 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \dfrac{2\sqrt{5} + \sinh^{-1} 2}{4} \approx 1{,}479$.

CONTOH 4 — KURVA LAIN, HASIL TERTUTUP

$\mathbf{r} = \langle 2t,\ t^2,\ \frac{1}{3}t^3 \rangle$, $0 \le t \le 3$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2+2)^2} = t^2 + 2$. Maka $L = \int_0^3 (t^2 + 2)\, dt = 9 + 6 = 15$.

2. Fungsi panjang busur dan parametrisasi dengan panjang busur

Fungsi panjang busur dari titik acuan $t = a$:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du, \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Bila $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$, s naik tegas dan dapat dibalik: $t = t(s)$. Kurva yang ditulis dalam s, $\mathbf{r}(t(s))$, disebut **parametrisasi panjang busur**; padanya $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ (laju satu).

CONTOH 5 — HELIKS DENGAN PARAMETER S

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$ dengan acuan $t = 0$: $s = \sqrt{2}\, t \Rightarrow t = s/\sqrt{2}$. Jadi $\mathbf{r}(s) = \left\langle \cos \frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$. Pemeriksaan: $\mathbf{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin, \cos, 1 \rangle$ dan $|\mathbf{r}'(s)| = 1$.

CONTOH 6 — TITIK PADA JARAK TERTENTU

Mulai dari $(1, 0, 0)$ bergerak sejauh 4 satuan sepanjang heliks pada arah t naik. Titiknya $t = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$, yaitu $(\cos 2{,}828,\ \sin 2{,}828,\ 2{,}828) \approx (-0{,}951,\ 0{,}309,\ 2{,}828)$.

3. Kelengkungan

Untuk kurva yang diparametrisasi dengan s, vektor singgung satuan $\mathbf{T}(s)$ berubah arah. Seberapa cepat arahnya berubah per satuan panjang busur adalah kelengkungannya.

KELENGKUNGAN

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Garis lurus: $\mathbf{T}$ konstan, $\kappa = 0$. Lingkaran jari-jari R: $\kappa = 1/R$. **Jari-jari kelengkungan** adalah $\rho = 1/\kappa$.

RUMUS YANG LEBIH PRAKTIS

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Untuk kurva bidang $y = f(x)$: $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}$.

Penurunan rumus $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$. Tulis $\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = v\mathbf{T}$ dengan $v = ds/dt$. Turunkan: $\mathbf{r}'' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Maka $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v\mathbf{T} \times (v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}') = v^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$ karena $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (13.2, Contoh 5), $|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = |\mathbf{T}'|$. Jadi $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = v^2|\mathbf{T}'|$, dan $\kappa = |\mathbf{T}'|/v = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/v^3$. ■

CONTOH 7 — HELIKS

$\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t,\ -\cos t,\ 1\rangle$ (hitung: komponen i: $\cos t \cdot 0 - 1 \cdot (-\sin t) = \sin t$; j: $1 \cdot (-\cos t) - (-\sin t) \cdot 0 = -\cos t$; k: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Panjangnya $\sqrt{2}$; $|\mathbf{r}'|^3 = 2\sqrt{2}$. $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. Umumnya, untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$, $\kappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ konstan. Bila $b = 0$ kembali ke lingkaran: $\kappa = 1/a$.

CONTOH 8 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$

$\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{r}''(1) = \langle 0, 2, 6\rangle$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 12 - 6,\ 0 - 6,\ 2 - 0\rangle = \langle 6, -6, 2\rangle$, panjang $\sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. $|\mathbf{r}'|^3 = 14\sqrt{14}$. $\kappa(1) = \dfrac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}} \approx 0{,}1664$, jari-jari kelengkungan $\approx 6{,}01$.

CONTOH 9 — PARABOLA $Y = X^2$

$f' = 2x$, $f'' = 2$: $\kappa(x) = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$. Di titik puncak $x = 0$: $\kappa = 2$, jari-jari $\frac{1}{2}$ (paling melengkung). Di $x = 1$: $\kappa = 2/5^{3/2} \approx 0{,}1789$. Untuk $|x| \to \infty$, $\kappa \to 0$: parabola makin mendekati lurus.

CONTOH 10 — KELENGKUNGAN MAKSIMUM

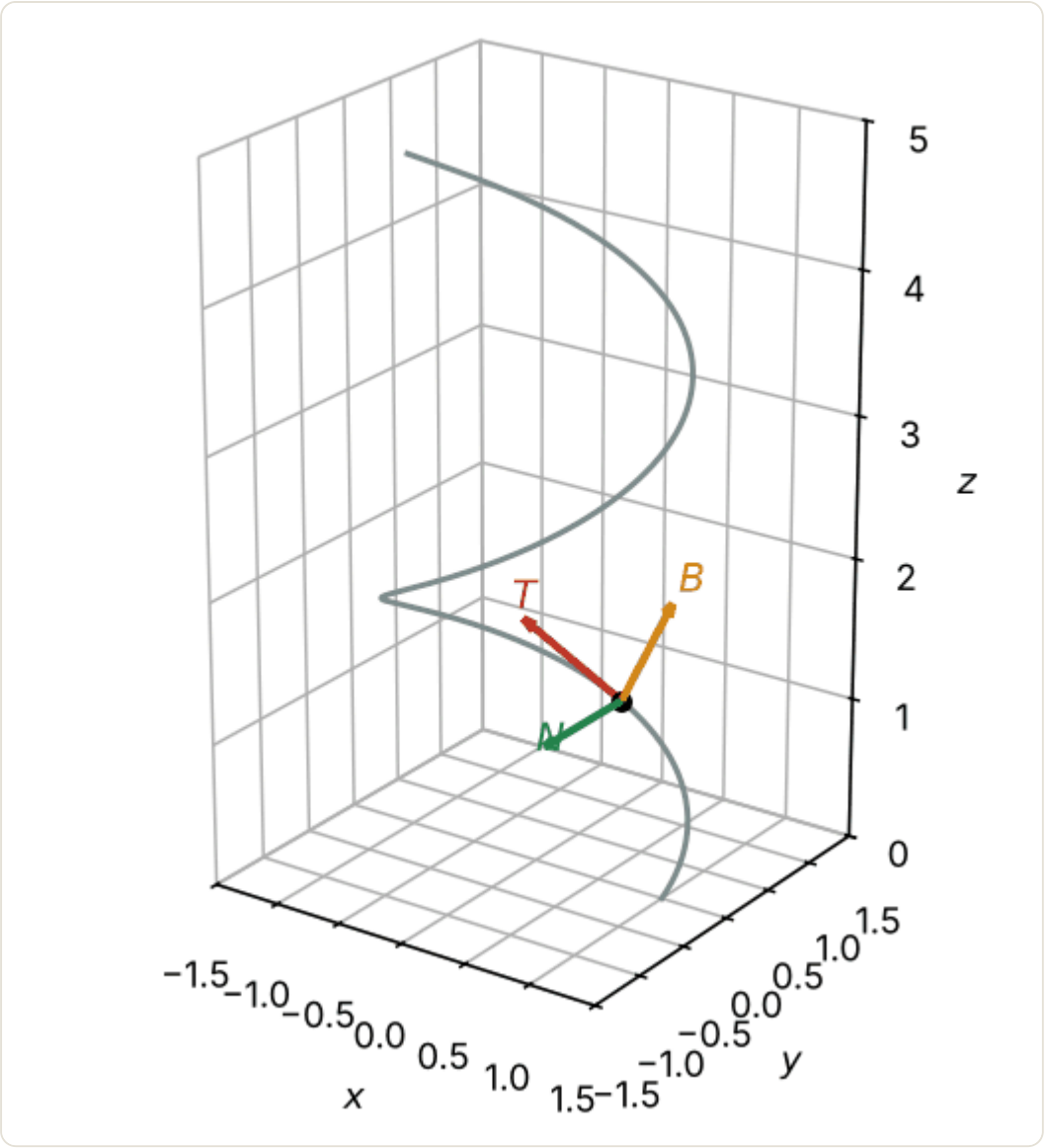
Untuk $y = e^x$: $\kappa = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$. Turunkan: maksimum ketika $1 + e^{2x} = 3e^{2x}$, yaitu $e^{2x} = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}\ln 2 \approx -0{,}347$. Nilainya $\kappa = \dfrac{1/\sqrt{2}}{(3/2)^{3/2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$.

4. Vektor normal dan binormal; bidang oskulasi

KERANGKA TNB

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \ \text{(normal utama)}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \ \text{(binormal)}.$$

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ saling tegak lurus dan satuan; $\mathbf{N}$ menunjuk ke sisi cekung kurva. Bidang yang memuat $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{N}$ adalah **bidang oskulasi** (normalnya $\mathbf{B}$); bidang yang memuat $\mathbf{N}$ dan $\mathbf{B}$ adalah **bidang normal** (normalnya $\mathbf{T}$). **Lingkaran oskulasi** berada di bidang oskulasi, berpusat di sisi $\mathbf{N}$ pada jarak $\rho = 1/\kappa$, dan menyinggung kurva.



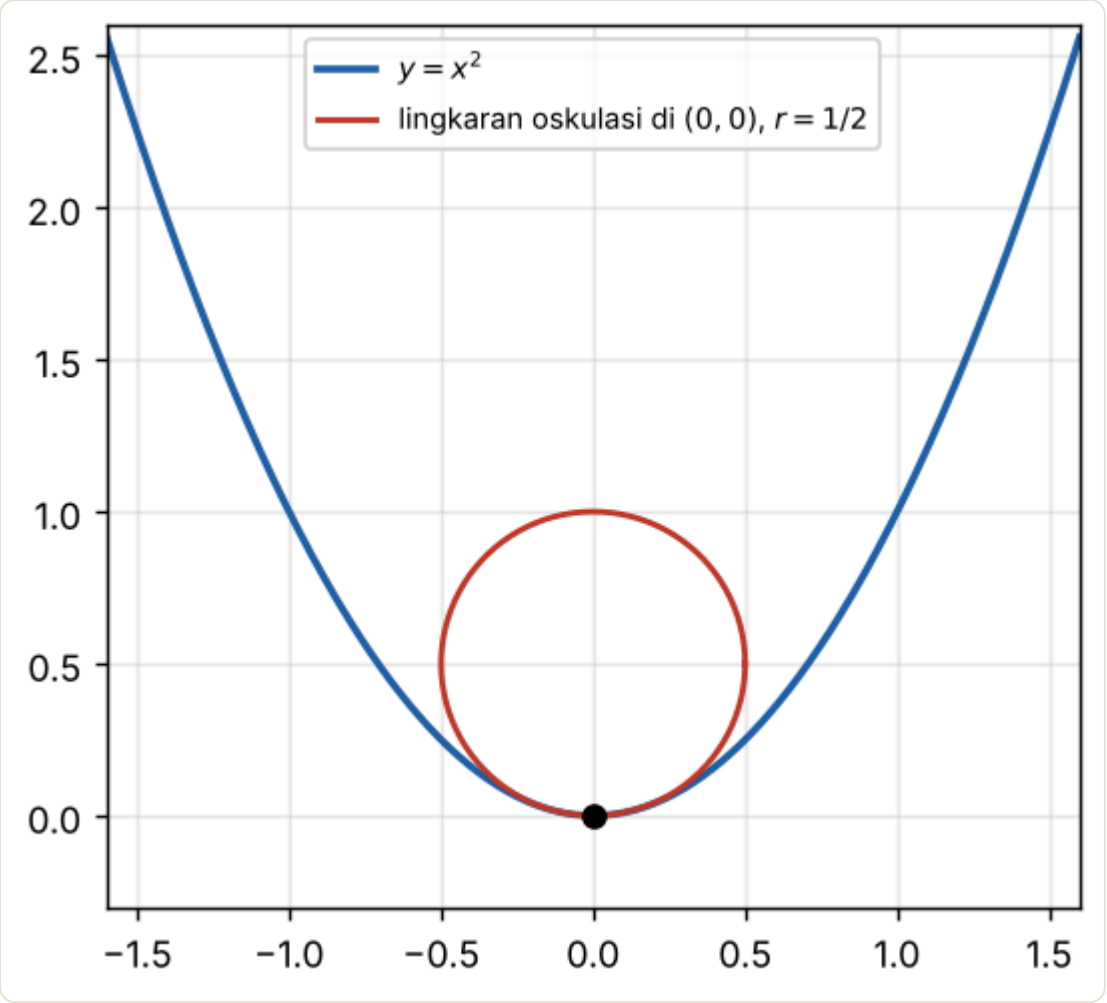
Vektor $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ pada heliks.

CONTOH 11 — TNB HELIKS

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$, $\mathbf{N} = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$ (mengarah ke sumbu silinder). $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \sin t, -\cos t, 1\rangle$. Di $t = 0$: titik $(1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle$; bidang oskulasi: $-y + z = 0$, yaitu $z = y$. Bidang normal (normal $\mathbf{T}(0) \propto \langle 0, 1, 1\rangle$): $y + z = 0$.

CONTOH 12 — LINGKARAN OSKULASI PARABOLA

Di titik puncak parabola $y = x^2$: $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$, $\mathbf{N}$ menunjuk ke atas. Lingkaran oskulasinya berpusat di $(0, \frac{1}{2})$ dengan persamaan $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Lingkaran ini menempel erat pada parabola: keduanya bersinggungan dengan kelengkungan yang sama.



Lingkaran oskulasi parabola $y = x^2$ di titik asal.

5. Torsi (pilihan)

Kelengkungan mengukur pembengkokan kurva dalam bidang oskulasi. **Torsi** τ mengukur seberapa cepat bidang oskulasi itu sendiri berputar (kurva keluar dari bidangnya):

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}.$$

Kurva bidang mempunyai $\tau = 0$. Untuk heliks $\mathbf{r}''' = \langle \sin t, -\cos t, 0 \rangle$ dan $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle$: pembilang $= 1$, penyebut $= 2$, $\tau = \tfrac{1}{2}$. Untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, $\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

6. Kesalahan umum

- Menyamakan $|\mathbf{r}'|$ dengan 1. Itu hanya benar untuk parametrisasi panjang busur.

- Memakai $|\mathbf{T}'|$ sebagai kelengkungan tanpa membagi dengan $|\mathbf{r}'|$ bila parameter bukan s.
- Mengira κ konstan berarti lingkaran. Heliks juga mempunyai κ konstan.
- Salah memilih arah $\mathbf{N}$: ia selalu menuju sisi cekung, tegak lurus $\mathbf{T}$.

7. Ringkasan

- $L = \int_a^b |\mathbf{r}'|\,dt$; $ds/dt = |\mathbf{r}'|$.
- $\kappa = |\mathbf{T}'|/|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$; untuk $y = f(x)$: $|f''|/(1+f'^2)^{3/2}$.
- $\mathbf{T}, \mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|, \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; bidang oskulasi dan lingkaran oskulasi.
- Torsi mengukur keluarnya kurva dari bidang oskulasi.

Berikutnya 13.4: gerak dalam ruang.

13.4 Gerak dalam Ruang: Kecepatan dan Percepatan

Inilah tujuan fungsi vektor: menggambarkan gerak. Bila $\mathbf{r}(t)$ adalah posisi partikel pada waktu t, maka turunan pertama dan kedua adalah kecepatan dan percepatan.

1. Kecepatan, laju, percepatan

DEFINISI

Untuk partikel dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \ \text{(kecepatan)}, \qquad |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt} \ \text{(laju)}, \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \ \text{(per}$$

Kecepatan adalah vektor singgung ke lintasan, searah gerak; laju adalah skalar ≥ 0. Hukum II Newton: gaya $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

CONTOH 1 — KUBIK TERPILIN SEBAGAI GERAK

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6t \rangle$, laju $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Di $t = 1$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, laju $\sqrt{14} \approx 3{,}742$; $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6 \rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{40} \approx 6{,}325$.

CONTOH 2 — GERAK MELINGKAR BERATURAN

$\mathbf{r}(t) = \langle R\cos\omega t,\ R\sin\omega t \rangle$. $\mathbf{v} = \omega R\langle -\sin\omega t, \cos\omega t \rangle$, laju ωR konstan. $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$: percepatan menuju pusat (sentripetal) dengan besar $\omega^2 R = v^2/R$. Mobil melaju 20 m/s pada tikungan berjari-jari 50 m: $a = 400/50 = 8$ m/s². Meskipun lajunya konstan, percepatan tidak nol karena arah kecepatan berubah.

CONTOH 3 — DARI PERCEPATAN KE POSISI

Percepatan $\mathbf{a}(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, $\mathbf{v}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$ (13.2, Contoh 9) memberi $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ dan $\mathbf{r} = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$. Setelah $t = 2$: posisi $(2, 5, 10)$, kecepatan $\langle 1, 4, 12 \rangle$, laju $\sqrt{161} \approx 12{,}69$.

CONTOH 4 — KAPAN LAJU MINIMUM?

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ t^2 - 4t,\ 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2t,\ 2t - 4,\ 0\rangle$. $|\mathbf{v}|^2 = 4t^2 + (2t-4)^2 = 8t^2 - 16t + 16$. Minimum di $t = 1$: $|\mathbf{v}|^2 = 8$, laju $2\sqrt{2}$. Pada saat itu $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 0\rangle$.

2. Gerak proyektil

Benda dilempar dari titik asal dengan laju awal v_0 dan sudut elevasi α. Satu-satunya percepatan adalah gravitasi: $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ ($g \approx 9{,}8$ m/s²). Integrasi dua kali:

$$\mathbf{v}(t) = \langle v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha - gt\rangle, \qquad \mathbf{r}(t) = \left\langle (v_0\cos\alpha)\,t,\ (v_0\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2\right\rangle.$$

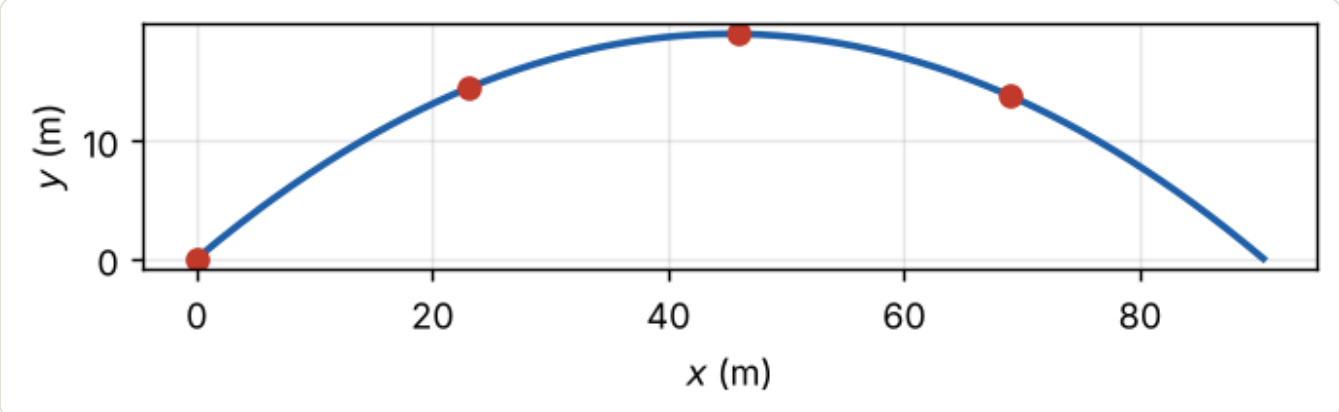
Gerak horizontal beraturan, gerak vertikal berubah beraturan: keduanya bebas satu sama lain.

RUMUS PROYEKTIL (TANAH DATAR)

- Waktu terbang: $T = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.
- Jangkauan: $R = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ (maksimum di $\alpha = 45^\circ$).
- Tinggi maksimum: $H = \dfrac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}$.

CONTOH 5 — BOLA DILEMPAR

$v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$. Komponen awal: $v_0\cos\alpha \approx 22{,}98$, $v_0\sin\alpha \approx 19{,}28$. Waktu terbang $T = 2(19{,}28)/9{,}8 \approx 3{,}94$ s; jangkauan $R = 900\sin 80^\circ/9{,}8 \approx 90{,}4$ m; tinggi maksimum $H = 19{,}28^2/19{,}6 \approx 18{,}97$ m. Laju saat mendarat sama dengan laju awal (30 m/s) karena energi kekal.



Lintasan bola $v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$; titik merah menandai $t = 0, 1, 2, 3$ s.

CONTOH 6 — DUA SUDUT, SATU JANGKAUAN

Dengan $v_0 = 30$ m/s, sudut α dan $90^\circ - \alpha$ memberi jangkauan yang sama ($\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$). Misalnya $\alpha = 20^\circ$ dan 70° keduanya memberi $900 \sin 40^\circ / 9{,}8 \approx 59{,}0$ m, tetapi lintasan 70° jauh lebih tinggi dan lebih lama.

CONTOH 7 — PELUNCURAN DARI KETINGGIAN

Benda dilempar horizontal dari tebing tinggi 45 m dengan laju 12 m/s. Posisi: $\mathbf{r} = \langle 12t,\ 45 - 4{,}9t^2 \rangle$. Menyentuh tanah ketika $45 = 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 3{,}03$ s, jatuh di $x \approx 36{,}4$ m. Kecepatan saat mendarat: $\langle 12, -29{,}7 \rangle$, laju $\approx 32{,}0$ m/s.

3. Komponen tangensial dan normal percepatan

Dari $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ (dengan $v = |\mathbf{v}|$), turunkan: $\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Karena $\mathbf{T}' = \kappa v \mathbf{N}$ (dari definisi $\kappa = |\mathbf{T}'|/v$),

$$\boxed{\mathbf{a} = a_T\,\mathbf{T} + a_N\,\mathbf{N}, \qquad a_T = v' = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}}$$

a_T mengubah *laju* (searah gerak); a_N membelokkan *arah* (menuju sisi cekung). Selalu $a_T^2 + a_N^2 = |\mathbf{a}|^2$. Percepatan berada di bidang oskulasi, tidak punya komponen $\mathbf{B}$.

CONTOH 8 — HELIKS

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 0 = 0$, jadi $a_T = 0$ (laju konstan $\sqrt{2}$). $a_N = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1 = \kappa v^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 2$. Percepatan $= \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle = \mathbf{N}$, menuju sumbu silinder.

CONTOH 9 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$

$\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6 \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 + 4 + 18 = 22$; $a_T = 22/\sqrt{14} \approx 5{,}880$. $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{76}$, $a_N = \sqrt{76}/\sqrt{14} \approx 2{,}330$. Pemeriksaan: $a_T^2 + a_N^2 \approx 34{,}57 + 5{,}43 = 40 = |\mathbf{a}|^2$.

CONTOH 10 — PROYEKTIL DI TITIK TERTINGGI

Di puncak lintasan, $\mathbf{v} = \langle v_0 \cos\alpha, 0\rangle$ horizontal dan $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ vertikal, sehingga $a_T = 0$ dan $a_N = g$. Kelengkungan di puncak: $\kappa = a_N / v^2 = g/(v_0\cos\alpha)^2$. Untuk Contoh 5: $9{,}8/22{,}98^2 \approx 0{,}01856\ \text{m}^{-1}$; jari-jari kelengkungan $\approx 53{,}9$ m.

4. Hukum-hukum Kepler (gambaran)

Kepler merumuskan tiga hukum gerak planet; Newton menurunkannya dari hukum gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$. Intinya: (1) planet bergerak pada elips dengan Matahari di salah satu fokus; (2) vektor posisi dari Matahari menyapu luas sama dalam waktu sama; (3) kuadrat periode sebanding pangkat tiga setengah sumbu panjang.

Hukum kedua adalah akibat langsung kalkulus vektor. Gaya sentral $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ memberi $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Karena $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$, vektor momentum sudut per massa, $\mathbf{h} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}$, konstan. Maka $\mathbf{r}$ dan $\mathbf{v}$ selalu terletak pada satu bidang tetap (gerak planar), dan luas yang disapu per waktu, $\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$, konstan.

CONTOH 11 — HUKUM KETIGA KEPLER PADA SATELIT

Bila periode T dan setengah sumbu panjang a maka T^2/a^3 sama untuk semua benda yang mengorbit pusat yang sama. Satelit yang jari-jari orbitnya dua kali orbit satelit lain mempunyai periode $2^{3/2} \approx 2{,}83$ kali lebih besar.

5. Kesalahan umum

- Mengira laju konstan berarti percepatan nol. Pada gerak melingkar $a_N \neq 0$.
- Menyamakan $|\mathbf{a}|$ dengan dv/dt: $dv/dt = a_T$, bukan $|\mathbf{a}|$.
- Pada proyektil, menaruh g di komponen x atau lupa tanda negatif pada $\frac{1}{2}gt^2$.
- Memakai sudut dalam derajat pada kalkulator berbasis radian, atau sebaliknya.

6. Ringkasan

- $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$, laju $= |\mathbf{v}|$, $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$; integrasi dari percepatan memakai kondisi awal.
- Proyektil: $\mathbf{r} = \langle v_0\cos\alpha\, t,\ v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2\rangle$; T, R, H seperti di atas.

- $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ dengan $a_T = v'$, $a_N = \kappa v^2$.
- Gaya sentral $\Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ konstan (hukum luas Kepler).

Bab 13 selesai. Bab berikutnya, 14.1, memperluas kalkulus ke fungsi dua peubah atau lebih.

Bab 14: Turunan Parsial

14.1 Fungsi Beberapa Peubah

Sebagian besar besaran di dunia nyata bergantung pada lebih dari satu peubah: suhu di suatu titik bergantung pada posisi (x, y, z) dan waktu t; volume silinder bergantung pada r dan h; hasil produksi bergantung pada tenaga kerja dan modal. Bab 14 mengembangkan kalkulus diferensial untuk fungsi seperti itu.

1. Definisi

FUNGSI DUA PEUBAH

Fungsi dua peubah f adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut (x, y) dalam himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (*daerah asal*) dengan tepat satu bilangan real $f(x, y)$. *Daerah hasil* (range) adalah himpunan semua nilai $f(x, y)$. Fungsi tiga peubah $f(x, y, z)$ didefinisikan serupa dengan $D \subseteq \mathbb{R}^3$; fungsi n peubah $f(x_1, \ldots, x_n)$ memakai $\mathbb{R}^n$.

Bila daerah asal tidak disebutkan, kita ambil himpunan terbesar titik yang membuat rumusnya bermakna.

CONTOH 1 — MENCARI DAERAH ASAL

1. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$: syarat $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, jadi $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, cakram tertutup berjari-jari 3. Daerah hasil $[0, 3]$.
2. $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$: syarat $x + y > 1$, setengah bidang di atas garis $y = 1 - x$ (tanpa garisnya). Daerah hasil $\mathbb{R}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$: syarat $x \neq \pm y$, seluruh bidang tanpa dua garis $y = x$, $y = -x$.
4. $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} \;/\; \ln(4 - z)$: syarat $z \geq x^2 + y^2$, $z < 4$, $z \neq 3$. Daerah di dalam paraboloid, di bawah bidang $z = 4$, tanpa bidang $z = 3$.

CONTOH 2 — MODEL NYATA

- Bunga majemuk bulanan: $A(P, r, t) = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$. $A(1000;\ 0{,}06;\ 5) = 1000(1{,}005)^{60} \approx 1348{,}85$.
- Produksi Cobb–Douglas: $P(L, K) = 2L^{0{,}6}K^{0{,}4}$. $P(100, 100) = 200$; bila tenaga kerja digandakan dan modal dipangkas setengah, $P(200, 50) = 2 \cdot 200^{0{,}6}50^{0{,}4} \approx 229{,}7$, naik sekitar 14,9%.
- Volume silinder: $V(r, h) = \pi r^2 h$.

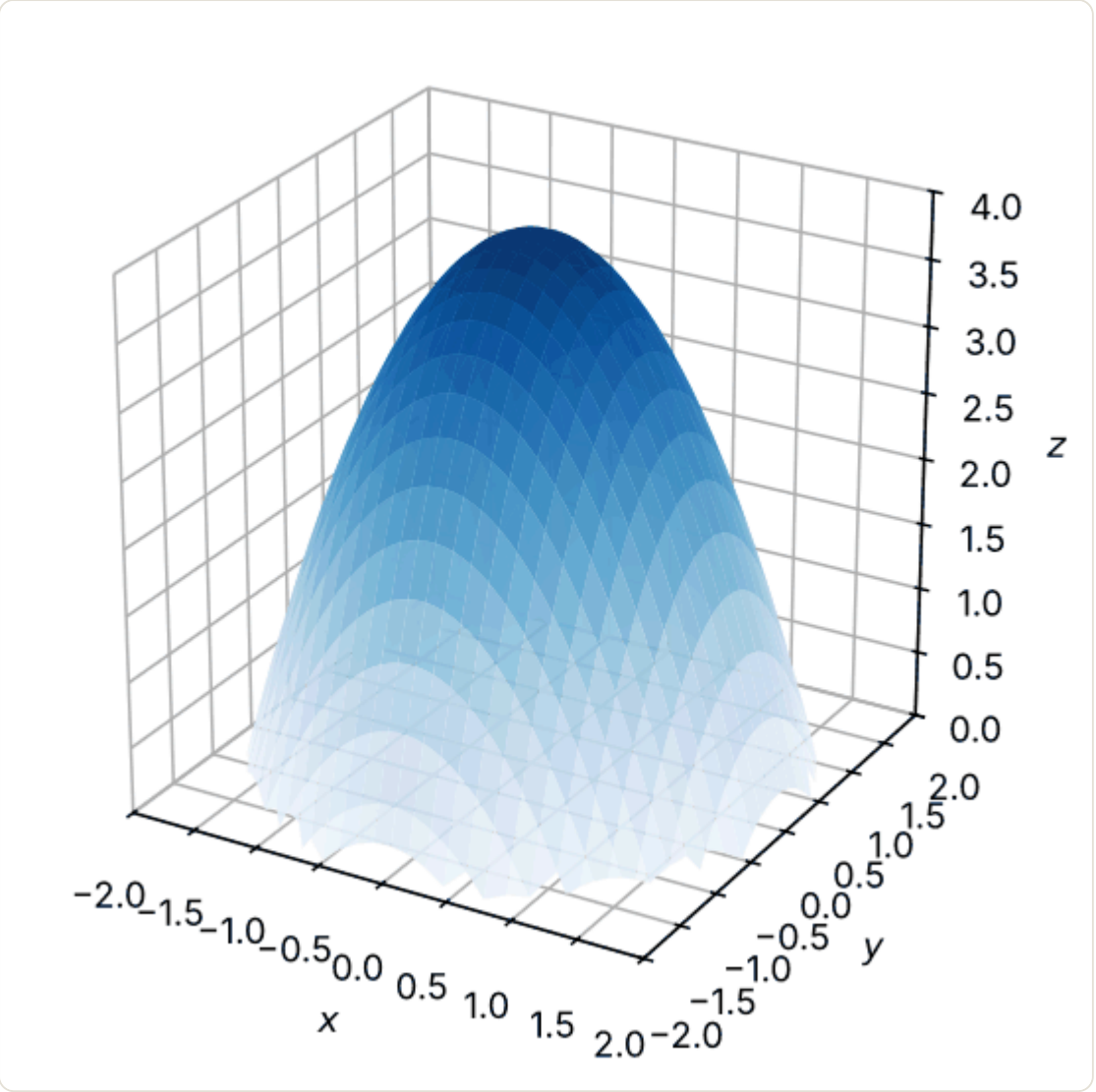
2. Grafik

GRAFIK

Grafik f dengan daerah asal D adalah himpunan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$. Ini sebuah permukaan di ruang: tinggi permukaan di atas titik (x, y) adalah $f(x, y)$.

CONTOH 3 — GRAFIK $F = 4 - X^2 - Y^2$

Grafiknya $z = 4 - x^2 - y^2$ adalah paraboloid eliptik yang membuka ke bawah (12.6) dengan puncak $(0, 0, 4)$. Ia memotong bidang xy di lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Bila kita batasi $z \geq 0$, diperoleh mangkuk terbalik di atas cakram jari-jari 2.



Grafik $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ untuk $z \geq 0$.

CONTOH 4 — GRAFIK FUNGSI SEDERHANA

- $f(x, y) = 3 - x - y$: bidang miring (12.5) yang memotong sumbu di $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$: kerucut (belahan atas).
- $f(x, y) = \sin x$: silinder bergelombang (peubah y tidak muncul).
- $f(x, y) = xy$: permukaan pelana (paraboloid hiperbolik yang diputar).

3. Kurva ketinggian (kontur)

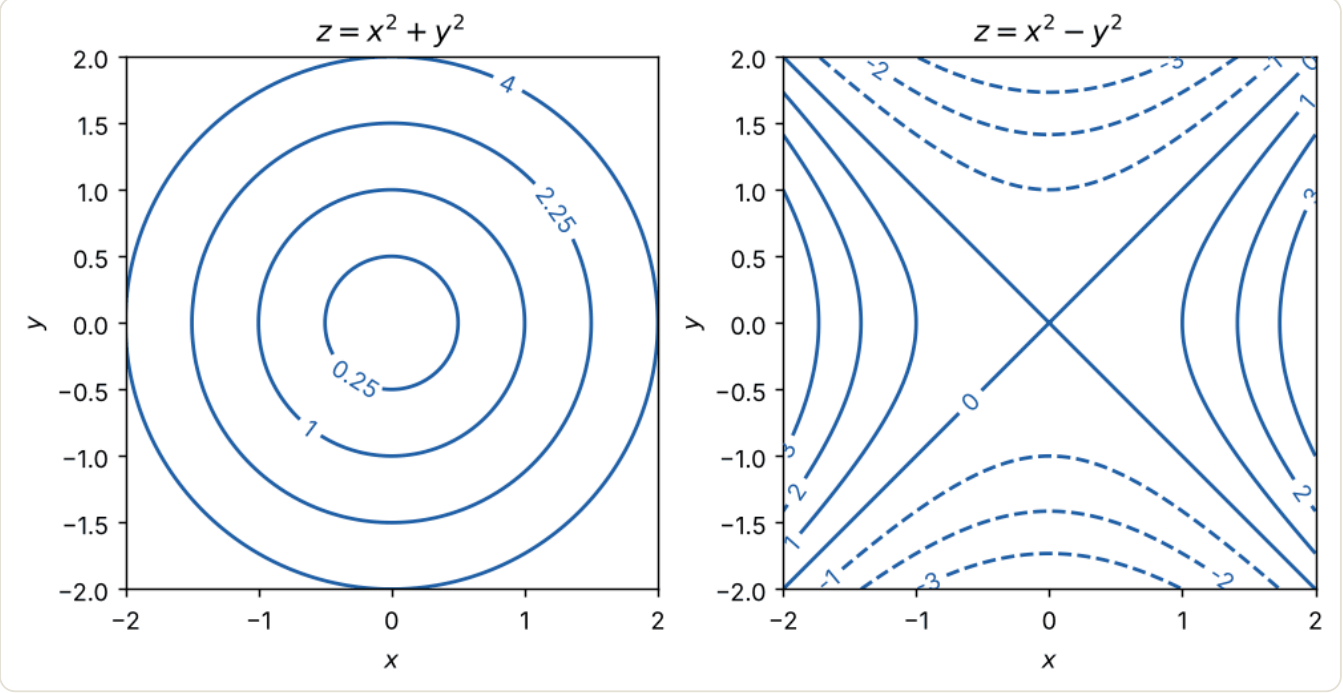
KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian (level curve) f adalah himpunan semua titik (x, y) di daerah asal dengan $f(x, y) = k$, dengan k konstanta. Ia adalah proyeksi ke bidang xy dari irisan grafik dengan bidang $z = k$. **Peta kontur** adalah kumpulan kurva ketinggian untuk beberapa nilai k.

Pada peta topografi, garis kontur menghubungkan titik berketinggian sama; pada peta cuaca, *isoterm* menghubungkan titik bersuhu sama dan *isobar* titik bertekanan sama. Kontur yang rapat berarti permukaan curam; kontur yang renggang berarti landai.

CONTOH 5 — KONTUR DUA FUNGSI

- $f = x^2 + y^2$: kurva ketinggian $x^2 + y^2 = k$ adalah lingkaran konsentris berjari-jari $\sqrt{k}$ ($k > 0$). Jarak jari-jari: untuk $k = 1, 4, 9$ jari-jarinya $1, 2, 3$: kontur makin rapat ke arah luar karena permukaan makin curam.
- $f = x^2 - y^2$: $x^2 - y^2 = k$ hiperbola; untuk $k = 0$ dua garis $y = \pm x$. Pola khas pelana.



Peta kontur $z = x^2 + y^2$ (kiri) dan $z = x^2 - y^2$ (kanan).

CONTOH 6 — FUNGSI DARI KONTUR

Kurva ketinggian $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ dengan $f = k$: $y = kx^2$, keluarga parabola yang melalui titik asal (tanpa titik asalnya). Jadi nilai k menyatakan "kelengkungan" parabola.

4. Fungsi tiga peubah dan permukaan ketinggian

Grafik $f(x,y,z)$ berada di $\mathbb{R}^4$ dan tidak dapat digambar. Kita memvisualisasikannya lewat **permukaan ketinggian** $f(x,y,z) = k$.

CONTOH 7 — PERMUKAAN KETINGGIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $f = k$ bola berjari-jari $\sqrt{k}$, makin besar bola untuk k naik.
- $f = x^2 + y^2 - z^2$: $k > 0$ hiperboloid satu lembar, $k < 0$ hiperboloid dua lembar, $k = 0$ kerucut (12.6).
- $f = x + 2y + 3z$: bidang-bidang sejajar, $x + 2y + 3z = k$.
- $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$: bola-bola konsentris; model potensial gravitasi atau listrik (potensial sama pada bola).

CONTOH 8 — SUHU

Suhu pelat tipis $T(x,y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ (derajat C). Isoterm $T = 20$: $1 + x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$, sebuah elips dengan setengah sumbu 2 (arah x) dan $\sqrt{2}$ (arah y). Suhu maksimum 100 di titik asal.

5. Kesalahan umum

- Mengira kurva ketinggian adalah kurva pada grafik. Kurva ketinggian berada *di bidang* xy; kurva pada grafik adalah *jejak* di tinggi k.
- Lupa membatasi daerah asal (akar, logaritma, penyebut).
- Mengira dua kurva ketinggian berbeda dapat berpotongan: karena f memberi tepat satu nilai di tiap titik, kurva ketinggian untuk k berbeda tidak pernah berpotongan.

6. Ringkasan

- $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; grafik fungsi dua peubah adalah permukaan $z = f(x, y)$.
- Kurva ketinggian $f(x, y) = k$; permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$.
- Peta kontur menunjukkan kecuraman: rapat $=$ curam.

Berikutnya 14.2: limit dan kekontinuan.

14.2 Limit dan Kekontinuan

Limit fungsi dua peubah mirip limit satu peubah, tetapi ada perbedaan penting: titik (x, y) dapat mendekati (a, b) dari *tak hingga banyak arah dan lintasan*, bukan hanya dari kiri dan kanan.

1. Definisi limit

DEFINISI

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain, $f(x,y)$ dibuat sedekat mungkin ke L dengan mengambil (x,y) cukup dekat (tetapi tidak sama dengan) (a,b), dalam cakram berjari-jari δ.

Sifat limit (jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi dengan penyebut tak nol, kombinasi dengan fungsi kontinu) berlaku seperti pada satu peubah. Untuk polinomial dan fungsi rasional (di titik daerah asalnya), limit sama dengan substitusi.

CONTOH 1 — SUBSTITUSI LANGSUNG

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 y + 3y}{x + y^2} = \frac{2 + 6}{1 + 4} = \frac{8}{5}.$$

2. Uji dua lintasan (untuk menunjukkan limit tidak ada)

AKIBAT LANGSUNG DARI DEFINISI

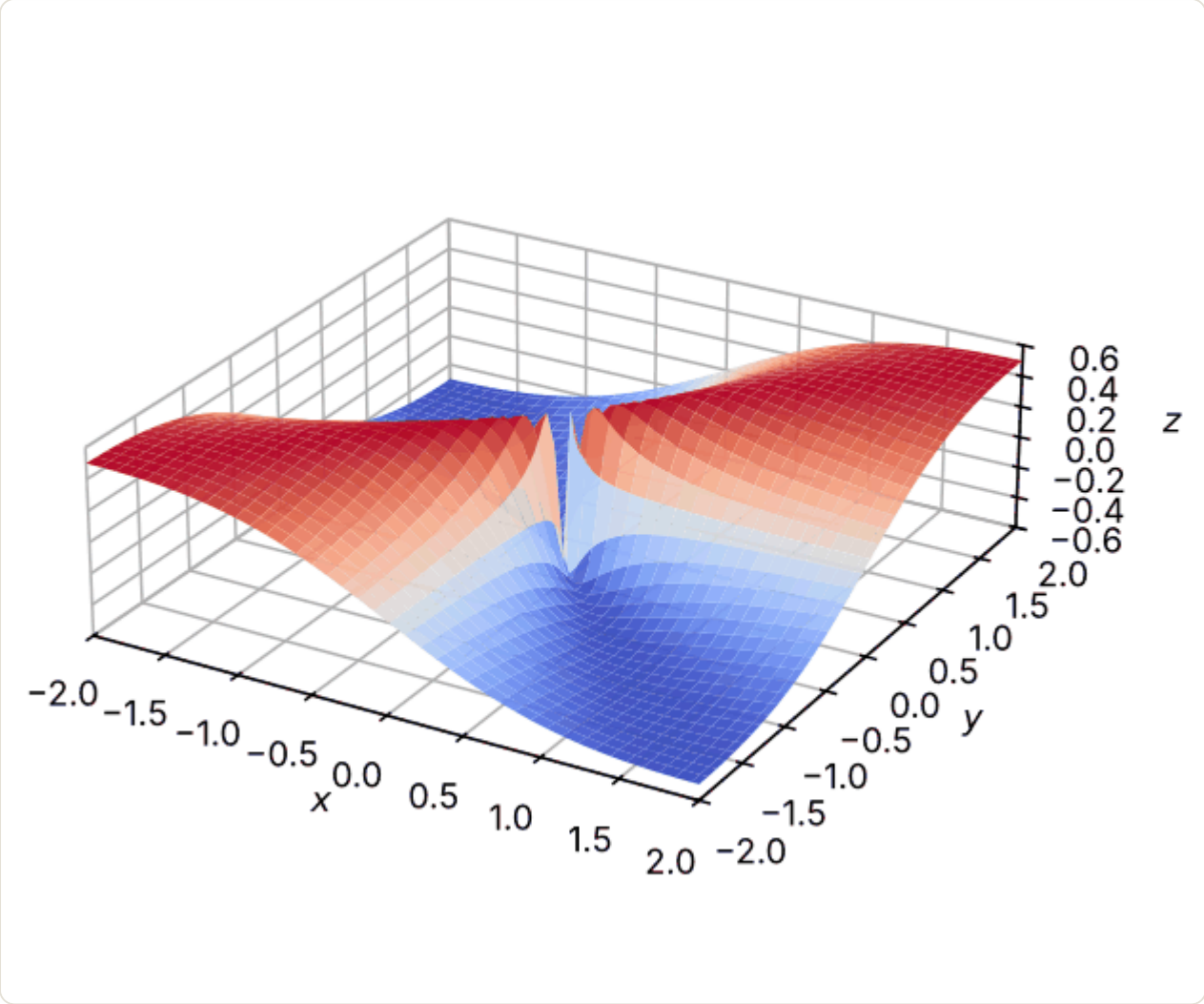
Jika $f(x,y) \to L_1$ sepanjang lintasan C_1 menuju (a,b) dan $f(x,y) \to L_2$ sepanjang lintasan C_2 dengan $L_1 \neq L_2$, maka $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ **tidak ada**.

CONTOH 2 — $\dfrac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2}$

Di $(0, 0)$: sepanjang sumbu x ($y = 0$): $f = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1$. Sepanjang sumbu y ($x = 0$): $f = -1 \to -1$. Limit tidak ada.

CONTOH 3 — $\dfrac{XY}{X^2 + Y^2}$

Sepanjang $y = mx$: $f = \dfrac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \dfrac{m}{1 + m^2}$, bergantung pada m: 0 untuk $m = 0$, $\frac{1}{2}$ untuk $m = 1$. Limit di $(0, 0)$ tidak ada. Pada grafik (gambar), permukaan "terpelintir" di sekitar asal sehingga tidak punya satu tinggi tunggal di sana.



Grafik $xy/(x^2 + y^2)$: nilai berubah menurut arah mendekati asal.

CONTOH 4 — LINTASAN LENGKUNG

$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. Sepanjang setiap garis $y = mx$: $f = \dfrac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \dfrac{m^2x}{1+m^4x^2} \to 0$; sepanjang sumbu juga 0. Tetapi sepanjang parabola $x = y^2$: $f = \dfrac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$. Limit tidak ada.

Pelajaran: memeriksa semua garis lurus belum cukup untuk membuktikan limit ada.

CONTOH 5 — SATU LINTASAN CUKUP MENOLAK

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ di asal. Sepanjang $y = mx$: $\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx}{x^2+m^2} \to 0$. Sepanjang $y = x^2$: $\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. Tidak ada limit.

3. Menunjukkan limit ada

Teorema apit

Bila $|f(x,y) - L| \le g(x,y)$ dan $g \to 0$, maka $f \to L$.

CONTOH 6 — MEMAKAI PENGAPIT

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$. Karena $x^2 \le x^2+y^2$, $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \le 3|y| \to 0$. Limitnya 0.

Koordinat kutub (untuk limit di titik asal)

Dengan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(x,y) \to (0,0)$ setara dengan $r \to 0^+$. Jika f dapat ditulis $r\cdot$ (fungsi terbatas dalam θ), limitnya 0.

CONTOH 7 — KUTUB

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to0} \dfrac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2} = \lim\limits_{r\to0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$, karena faktor trigonometri terbatas $\left|\cdot\right| \le 2$.

CONTOH 8 — LIMIT TERKENAL

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$: dengan $u = x^2+y^2 \to 0^+$, $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Limit $= 1$. Begitu pula $\lim \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

CONTOH 9 — KUTUB GAGAL BILA TAK TERBATAS

$\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta$: bergantung pada θ dan tidak menuju satu nilai tunggal; limit tidak ada (0 sepanjang sumbu y, 1 sepanjang sumbu x).

4. Kekontinuan

DEFINISI

f **kontinu di** (a,b) bila $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. f kontinu pada D bila kontinu di setiap titik D.

Polinomial kontinu di $\mathbb{R}^2$; fungsi rasional kontinu di semua titik di mana penyebut tak nol; komposisi fungsi kontinu kontinu.

CONTOH 10 — FUNGSI BAGIAN DEMI BAGIAN

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ kontinu di mana-mana: untuk titik selain asal, ia fungsi rasional dengan penyebut tak nol; di asal limitnya 0 (Contoh 6) sama dengan $f(0,0)$. Sebaliknya, $g = \frac{xy}{x^2+y^2}$ dengan $g(0,0) = 0$ *tidak* kontinu di asal (Contoh 3).

CONTOH 11 — DI MANA KONTINU?

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$ kontinu pada $x^2+y^2 > 1$ (di luar lingkaran satuan). $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x^2-y}$ kontinu di mana pun kecuali parabola $y = x^2$.

Tiga peubah

Definisi sama: bola kecil di $\mathbb{R}^3$ menggantikan cakram. Misalnya $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} \dfrac{xz+e^{y}}{x+z} = \dfrac{2+1}{3} = 1.$

5. Kesalahan umum

- Memeriksa hanya sumbu atau garis lalu menyimpulkan limit ada (Contoh 4 dan 5 membantahnya).
- Memakai kutub untuk limit di titik selain asal tanpa menggeser dulu.
- Mengira jika f kontinu terhadap tiap peubah secara terpisah maka kontinu secara gabungan. Itu tidak benar (Contoh 3 memberi kasus kontinu per peubah di semua titik tapi tidak kontinu di asal: $g(x,0)=0$ dan $g(0,y)=0$).

6. Ringkasan

- Limit ada hanya bila semua lintasan menuju nilai yang sama.
- Menolak: dua lintasan dengan nilai berbeda. Menerima: pengapit atau kutub.
- Kontinu: limit $=$ nilai fungsi; polinomial dan fungsi rasional kontinu di daerah asalnya.

Berikutnya 14.3 Turunan Parsial.

14.3 Turunan Parsial

Pada fungsi satu peubah, turunan mengukur laju perubahan. Pada fungsi dua peubah, laju perubahan bergantung pada arah. Langkah pertama yang paling sederhana: menggerakkan satu peubah saja dan menahan yang lain tetap.

1. Definisi dan notasi

TURUNAN PARSIAL

Untuk $f(x, y)$:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}, \qquad f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$

bila limitnya ada. Notasi lain: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = D_x f$.

Cara menghitung. Untuk f_x: anggap y konstanta dan turunkan terhadap x dengan aturan biasa. Untuk f_y: anggap x konstanta.

CONTOH 1 — TURUNAN POLINOMIAL

$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$: $f_x = 3x^2 + 2xy^3$, $f_y = 3x^2 y^2 - 4y$. Di $(2, 1)$: $f_x = 12 + 4 = 16$, $f_y = 12 - 4 = 8$.

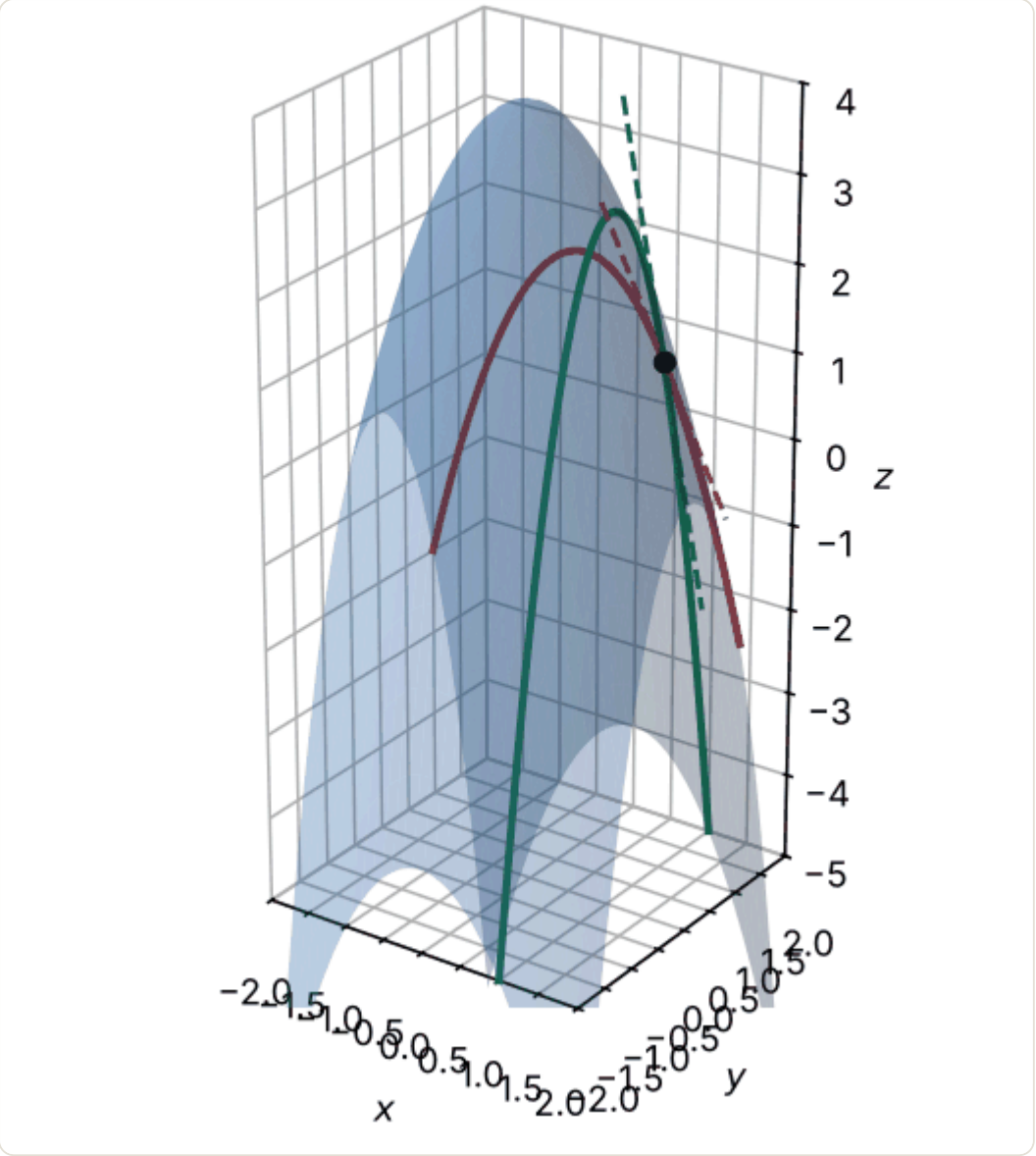
CONTOH 2 — FUNGSI TRANSENDEN

$f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$: $f_x = y e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y)$, $f_y = x e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y)$. $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$: $g_x = \dfrac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

2. Tafsir geometris dan laju perubahan

Grafik $z = f(x, y)$ dipotong bidang $y = b$ menghasilkan kurva $z = f(x, b)$. $f_x(a, b)$ adalah **kemiringan garis singgung** kurva ini di titik $(a, b, f(a, b))$. Serupa, $f_y(a, b)$ adalah kemiringan kurva

$z = f(a, y)$. Sebagai laju perubahan: f_x adalah laju perubahan z terhadap x ketika y tetap.



Permukaan $z = 4 - x^2 - 2y^2$; kurva merah ($y = 1$) dan hijau ($x = 1$) dengan garis singgungnya di $(1, 1, 1)$.

CONTOH 3 — SINGGUNG PADA IRISAN

$f = 4 - x^2 - 2y^2$, di $(1, 1)$: $f = 1$, $f_x = -2x = -2$, $f_y = -4y = -4$. Garis singgung pada irisan $y = 1$: arah $\langle 1, 0, -2 \rangle$; pada irisan $x = 1$: arah $\langle 0, 1, -4 \rangle$. Keduanya menentukan bidang singgung (14.4).

CONTOH 4 — MEMBACA KONTUR

Pada peta suhu, jika $T_x > 0$ di sebuah titik, suhu naik bila kita bergerak ke timur (arah x positif). Bila $T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$ (14.1), di $(1,1)$: $T_x = -\dfrac{200x}{(1+x^2+2y^2)^2} = -12{,}5$, $T_y = -\dfrac{400y}{(\cdot)^2} = -25$. Suhu turun 12,5 derajat per satuan jarak ke arah x dan 25 derajat per satuan ke arah y.

CONTOH 5 — GAS IDEAL

$PV = nRT$. Dengan $P = \dfrac{nRT}{V}$: $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ (tekanan turun bila volume naik pada suhu tetap) dan $\dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$. Hubungan siklik: $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{nR}{P}$ dan $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{nR}$, sehingga

$$\frac{\partial P}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{nRT}{V^2}\cdot\frac{nR}{P}\cdot\frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{PV} = -1.$$

Hasilnya -1, bukan $+1$ seperti yang "tampak" bila ∂ dianggap pecahan biasa.

3. Fungsi tiga peubah atau lebih

Turunkan terhadap satu peubah, anggap semua yang lain konstan.

CONTOH 6 — TIGA PEUBAH

$f(x,y,z) = xy + yz^2 + e^{xz}$: $f_x = y + ze^{xz}$, $f_y = x + z^2$, $f_z = 2yz + xe^{xz}$. Di $(1,2,0)$: $f_x = 2$, $f_y = 1$, $f_z = 1$.

4. Turunan parsial orde tinggi

$(f_x)_x = f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $(f_x)_y = f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, dan seterusnya. Untuk $f = x^3y^2 - 2x\,y + y^4$: $f_x = 3x^2y^2 - 2y$, $f_y = 2x^3y - 2x + 4y^3$; $f_{xx} = 6xy^2$, $f_{xy} = 6x^2y - 2$, $f_{yx} = 6x^2y - 2$, $f_{yy} = 2x^3 + 12y^2$.

TEOREMA CLAIRAUT

Bila f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada cakram yang memuat (a,b), maka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Akibatnya, untuk fungsi yang cukup mulus urutan turunan tidak penting. Ini menghemat pekerjaan: untuk $f = \sin(xy^2) + e^x \ln y$ lebih mudah memilih urutan yang menghasilkan ekspresi sederhana.

CONTOH 7 — MEMILIH URUTAN

$f(x,y,z) = e^{yz}\cos x + z^3 y$. Untuk f_{zyx}: turunkan lebih dulu terhadap x: $f_x = -e^{yz}\sin x$; lalu y: $-ze^{yz}\sin x$; lalu z: $-(1+yz)e^{yz}\sin x$. Mengubah urutan tidak mengubah hasil.

5. Persamaan diferensial parsial

CONTOH 8 — PERSAMAAN LAPLACE

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ dipenuhi $u = e^x \sin y$: $u_{xx} = e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \sin y$, jumlah 0. Juga $u = \ln(x^2+y^2)$: $u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, dan karena simetri $u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; jumlah 0. Fungsi seperti ini disebut *harmonik*; mereka menggambarkan suhu keadaan tunak dan potensial listrik.

CONTOH 9 — PERSAMAAN GELOMBANG

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Untuk $u = \sin(x-ct)$: $u_{tt} = -c^2\sin(x-ct)$, $u_{xx} = -\sin(x-ct)$, sehingga $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Gelombang yang merambat ke kanan dengan laju c.

CONTOH 10 — PERSAMAAN PANAS

$u_t = k u_{xx}$. Untuk $u = e^{-kt}\sin x$: $u_t = -ke^{-kt}\sin x$, $u_{xx} = -e^{-kt}\sin x$, jadi $u_t = k u_{xx}$. Pola sinus meluruh secara eksponensial karena panas menyebar.

6. Turunan implisit

CONTOH 11 — Z SEBAGAI FUNGSI IMPLISIT

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$ mendefinisikan z implisit. Turunkan terhadap x (anggap y tetap): $3x^2 + 3z^2 z_x = 6yz + 6xyz_x \Rightarrow z_x(3z^2 - 6xy) = 6yz - 3x^2$, jadi $z_x = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$. Serupa $z_y = \dfrac{2xz - y^2}{z^2 - 2xy}$. Di titik $(1,2,3)$ (periksa: $1+8+27 = 36 = 6\cdot 6$): $z_x = \dfrac{12-1}{9-4} = \dfrac{11}{5}$.

7. Kesalahan umum

- Lupa menganggap peubah lain konstan, mis. menurunkan y pada f_x.
- Menulis $\partial z/\partial x =$ "dz/dx" begitu saja; notasi ∂ menandakan peubah lain ditahan.
- Mengira Clairaut berlaku tanpa kekontinuan turunan orde dua.
- Kesalahan tanda pada turunan hasil bagi atau rantai.

8. Ringkasan

- f_x menahan y tetap; f_y menahan x tetap. Geometris: kemiringan irisan.
- Turunan orde tinggi; Clairaut: $f_{xy} = f_{yx}$ bila kontinu.
- Beberapa PDP penting: Laplace, gelombang, panas.
- Turunan implisit dengan menurunkan kedua ruas.

Berikutnya 14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear.

14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear

Pada fungsi satu peubah, garis singgung memberi hampiran linear terbaik di dekat sebuah titik. Untuk fungsi dua peubah, objek yang sepadan adalah **bidang singgung**.

1. Bidang singgung

PERSAMAAN BIDANG SINGGUNG

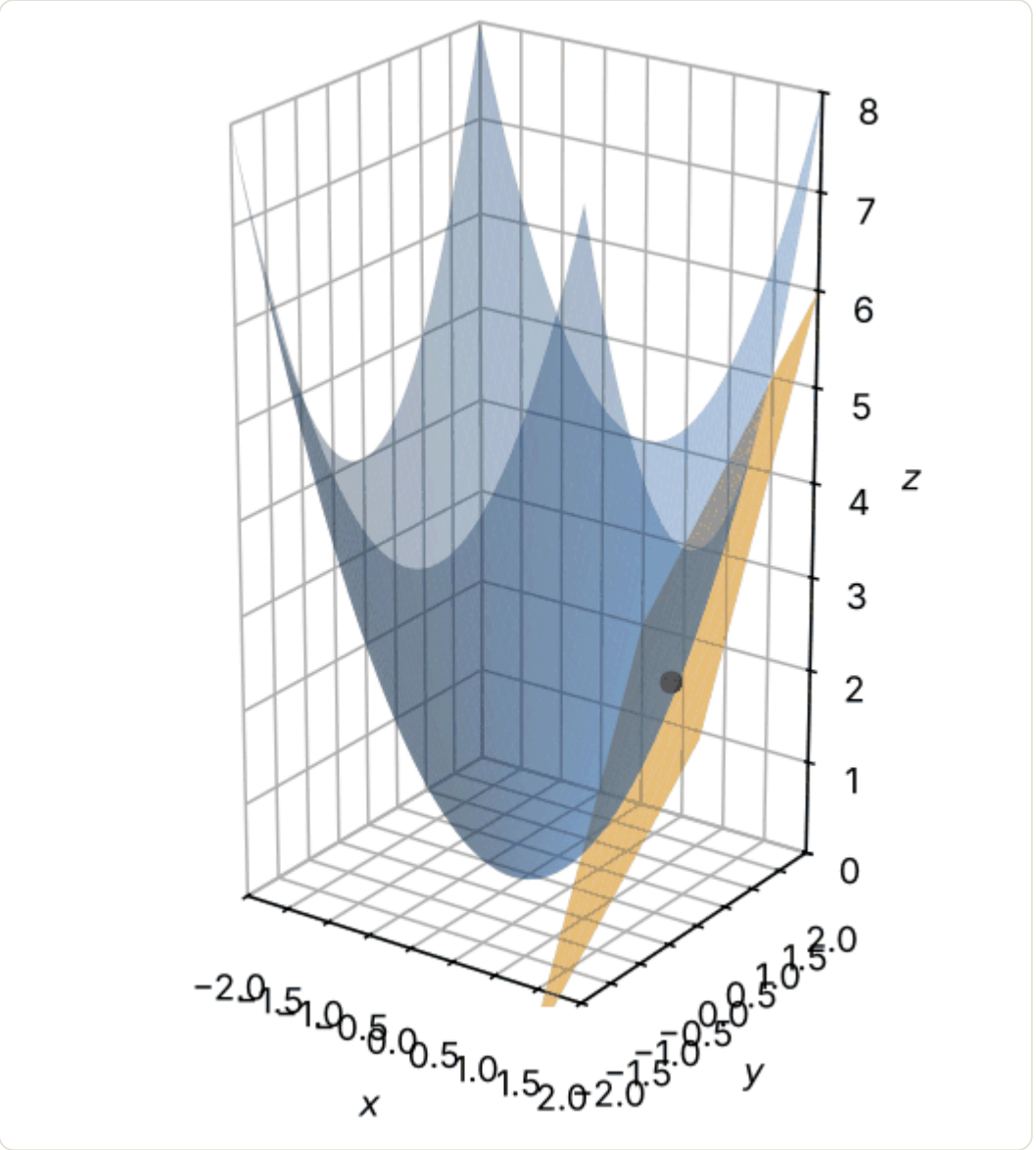
Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu. Bidang singgung pada permukaan $z = f(x, y)$ di titik $P(a, b, c)$, $c = f(a, b)$, adalah

$$z - c = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b).$$

Penurunan. Garis singgung irisan $y = b$ di P berarah $\mathbf{u} = \langle 1, 0, f_x \rangle$; garis singgung irisan $x = a$ berarah $\mathbf{v} = \langle 0, 1, f_y \rangle$. Normal bidang yang memuat keduanya: $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$. Persamaan bidang melalui P: $-f_x(x - a) - f_y(y - b) + (z - c) = 0$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 1 — PARABOLOID

$z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 2$. Bidang singgung: $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, yaitu $z = 2x + 2y - 2$.



Bidang singgung $z = 2x + 2y - 2$ pada paraboloid $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$.

CONTOH 2 — PARABOLOID LAIN

$z = 2x^2 + y^2$ di $(1, 1, 3)$: $f_x = 4x = 4$, $f_y = 2y = 2$. $z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. Vektor normalnya $\langle 4, 2, -1 \rangle$ (atau $\langle -4, -2, 1 \rangle$).

CONTOH 3 — KAPAN BIDANG SINGGUNG MENDATAR?

$z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$: $f_x = 2x - 4$, $f_y = 2y + 6$. Bidang singgung mendatar bila $f_x = f_y = 0$: $(2, -3)$, $z = 4 + 9 - 8 - 18 = -13$. Titik $(2, -3, -13)$ adalah dasar paraboloid (minimum, 14.7).

2. Hampiran linear

LINEARISASI

Fungsi

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

disebut **linearisasi** f di (a,b). Hampiran $f(x,y) \approx L(x,y)$ baik di dekat (a,b). Grafik L adalah bidang singgung.

CONTOH 4 — LINEARISASI DAN HAMPIRAN

$f(x,y) = xe^{xy}$ di $(1,0)$: $f = 1$, $f_x = e^{xy}(1+xy) = 1$, $f_y = x^2 e^{xy} = 1$. $L = 1 + (x-1) + y = x + y$. Maka $f(1{,}1, -0{,}1) \approx L = 1{,}0$; nilai sebenarnya $1{,}1e^{-0{,}11} \approx 0{,}9854$. Galat sekitar 1,5%.

CONTOH 5 — HAMPIRAN AKAR

$f = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ di $(2,1)$: $f = 3$, $f_x = -\dfrac{x}{f} = -\dfrac{2}{3}$, $f_y = -\dfrac{7y}{f} = -\dfrac{7}{3}$. $L = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1)$. Untuk $(1{,}95;\ 1{,}08)$: $L = 3 + 0{,}0333 - 0{,}1867 = 2{,}8467$. Nilai tepat $\sqrt{20 - 3{,}8025 - 8{,}1648} = \sqrt{8{,}0327} \approx 2{,}8342$. Galat $\approx 0{,}0125$, cukup kecil mengingat perubahan masukan sampai $0{,}08$.

3. Keterdiferensialan

DEFINISI

$z = f(x,y)$ **terdiferensialkan** di (a,b) bila $\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$ dapat ditulis

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

dengan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ bila $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

TEOREMA (SYARAT CUKUP)

Bila turunan parsial f_x, f_y ada di sekitar (a,b) dan kontinu di (a,b), maka f terdiferensialkan di (a,b). Jika terdiferensialkan, maka f kontinu di titik itu.

Keberadaan f_x dan f_y saja *tidak* menjamin keterdiferensialan, bahkan tidak menjamin kekontinuan: fungsi $g = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $g(0,0) = 0$ (14.2) memiliki $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$ tetapi tidak kontinu di asal.

4. Diferensial

DIFERENSIAL TOTAL

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Dengan $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, dz adalah perubahan sepanjang *bidang singgung* sedangkan Δz adalah perubahan sepanjang *permukaan*; $\Delta z \approx dz$ untuk perubahan kecil. Untuk tiga peubah, $dw = w_x\,dx + w_y\,dy + w_z\,dz$.

CONTOH 6 — VOLUME SILINDER

$V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$. Silinder berjari-jari $r = 5$ cm dan tinggi $h = 12$ cm diukur dengan galat maksimum 0,1 cm untuk keduanya: $dV = 2\pi(5)(12)(0{,}1) + \pi(25)(0{,}1) = 12\pi + 2{,}5\pi = 14{,}5\pi \approx 45{,}55\ \text{cm}^3$. Volume $300\pi \approx 942{,}5\ \text{cm}^3$; galat relatif $\approx 4{,}8\%$.

CONTOH 7 — BALOK

Balok berukuran $75 \times 60 \times 40$ cm dengan galat pengukuran maksimum $0{,}2$ cm per sisi. $V = xyz$, $dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = (2400 + 3000 + 4500)(0{,}2) = 1980\ \text{cm}^3$. $V = 180\,000\ \text{cm}^3$, galat relatif $\approx 1{,}1\%$. Galat relatif adalah jumlah galat relatif tiap sisi: $\frac{0{,}2}{75} + \frac{0{,}2}{60} + \frac{0{,}2}{40} = 0{,}0027 + 0{,}0033 + 0{,}005 = 0{,}011$.

CONTOH 8 — HAMBATAN PARALEL

$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Untuk $R_1=100$, $R_2=300$: $R=75\ \Omega$. $\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}=\frac{90000}{160000}=0{,}5625$; $\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}=\frac{10000}{160000}=0{,}0625$. Bila tiap hambatan memiliki galat $\pm1\ \Omega$, $dR\le(0{,}5625+0{,}0625)\cdot1=0{,}625\ \Omega$. Hambatan yang lebih kecil lebih mempengaruhi hasil.

5. Kesalahan umum

- Memakai bidang singgung jauh dari titik singgungnya; hampiran hanya baik dekat (a,b).
- Menyamakan Δz dengan dz: sama hanya pada hampiran.
- Menganggap keberadaan f_x, f_y cukup untuk keterdiferensialan.
- Lupa mengevaluasi turunan parsial di titik singgung sebelum memasukkannya ke persamaan bidang.

6. Ringkasan

- Bidang singgung: $z-c=f_x(x-a)+f_y(y-b)$; normal $\langle f_x, f_y, -1\rangle$.
- $L(x,y)$ hampiran linear; $dz=f_x\,dx+f_y\,dy$.
- Turunan parsial kontinu $\Rightarrow$ terdiferensialkan $\Rightarrow$ kontinu.
- Diferensial dipakai untuk menaksir galat pengukuran.

Berikutnya 14.5 Aturan Rantai.

14.5 Aturan Rantai

Pada satu peubah, aturan rantai berbunyi $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. Bila fungsi luar bergantung pada beberapa peubah antara yang masing-masing bergantung pada peubah lain, kita menjumlahkan lintasan perubahan.

1. Aturan rantai: satu peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 1)

Misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensialkan, dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$ terturunkan. Maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Alasan. Perubahan Δt menyebabkan Δx, Δy, dan dari keterdiferensialan (14.4) $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$. Bagi dengan Δt dan ambil limit. Intinya: z berubah lewat dua "jalur", x dan y, dan sumbangannya dijumlahkan.

CONTOH 1 — RANTAI LANGSUNG

$z = x^2 y + 3xy^4$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. Di $t = 0$: $x = 0$, $y = 1$. $z_x = 2xy + 3y^4 = 3$, $z_y = x^2 + 12xy^3 = 0$, $x' = 2\cos 2t = 2$, $y' = -\sin t = 0$. $\dfrac{dz}{dt} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6$.

CONTOH 2 — KERUCUT YANG BERUBAH

Volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Jari-jari bertambah 2 cm/s dan tinggi berkurang 3 cm/s. Pada saat $r = 10$, $h = 15$: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2\pi r h}{3}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{2\pi \cdot 150}{3}(2) + \dfrac{100\pi}{3}(-3) = 200\pi - 100\pi = 100\pi \approx 314{,}2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Volume bertambah.

CONTOH 3 — GERAK SEPANJANG KURVA

Suhu $T(x, y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ dan partikel bergerak sepanjang $x = t$, $y = t$. Pada $t = 1$: $T_x = -12{,}5$, $T_y = -25$ (14.3), $x' = y' = 1$. $\dfrac{dT}{dt} = -12{,}5 - 25 = -37{,}5$ derajat per satuan waktu: partikel merasakan suhu yang menurun.

2. Aturan rantai: dua peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 2)

Bila $z = f(x,y)$ dengan $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

DIAGRAM POHON

Gambarkan z di atas, cabang ke x dan y (turunan $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$), lalu dari tiap x, y cabang ke s, t. Turunan $\partial z/\partial s$ adalah jumlah hasil kali sepanjang semua lintasan dari z ke s.

CONTOH 4 — DUA PEUBAH BEBAS

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2 t$. $z_x = e^x \sin y$, $z_y = e^x \cos y$; $x_s = t^2$, $x_t = 2st$, $y_s = 2st$, $y_t = s^2$.

$$z_s = e^x \sin y\, t^2 + e^x \cos y\, 2st, \qquad z_t = e^x \sin y\, 2st + e^x \cos y\, s^2.$$

Di $s = 1, t = 2$: $x = 4$, $y = 2$; $z_s = e^4(4\sin 2 + 4\cos 2) \approx 107{,}7$ dan $z_t = e^4(4\sin 2 + \cos 2) \approx 175{,}9$.

CONTOH 5 — TIGA PEUBAH ANTARA

$w = x^2 + yz$, $x = u + v$, $y = uv$, $z = u - v$. Aturan rantai: $w_u = 2x \cdot 1 + z \cdot v + y \cdot 1$. Di $u = 1, v = 2$: $x = 3, y = 2, z = -1$: $w_u = 6 - 2 + 2 = 6$. Cek langsung: $w = (u+v)^2 + u^2 v - uv^2$, $w_u = 2(u+v) + 2uv - v^2 = 6 + 4 - 4 = 6$. Juga $w_v = 2x + zu - y = 6 - 1 - 2 = 3$.

CONTOH 6 — KOORDINAT KUTUB

Untuk $z = f(x,y)$ dengan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $z_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$ dan $z_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta$. Dari sini diperoleh $z_r^2 + \dfrac{1}{r^2} z_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$. Untuk $f = x^2 + y^2$ (jadi $z = r^2$): $z_r = 2r$, $z_\theta = 0$, dan memang $f_x^2 + f_y^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4r^2$.

3. Aturan rantai umum

Bila u fungsi n peubah $x_1, \ldots, x_n$, dan tiap x_i fungsi m peubah $t_1, \ldots, t_m$, maka untuk setiap j:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

Hitung per lintasan dan jumlahkan.

4. Turunan implisit

TEOREMA FUNGSI IMPLISIT (BENTUK TURUNAN)

Bila $F(x, y) = 0$ mendefinisikan y sebagai fungsi terturunkan dari x dan $F_y \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Untuk $F(x, y, z) = 0$ mendefinisikan $z = f(x, y)$, dengan $F_z \neq 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Alasan. Turunkan $F(x, y(x)) = 0$ terhadap x dengan aturan rantai: $F_x \cdot 1 + F_y \frac{dy}{dx} = 0$.

CONTOH 7 — KURVA FOLIUM

$x^3 + y^3 = 6xy$, $F = x^3 + y^3 - 6xy$: $F_x = 3x^2 - 6y$, $F_y = 3y^2 - 6x$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$. Di $(3, 3)$: $\dfrac{6 - 9}{9 - 6} = -1$. Garis singgung: $y - 3 = -(x - 3)$, yaitu $x + y = 6$.

CONTOH 8 — PERMUKAAN IMPLISIT

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$: $F_x = 3x^2 - 6yz$, $F_z = 3z^2 - 6xy$. $z_x = -\dfrac{3x^2 - 6yz}{3z^2 - 6xy} = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$, sama dengan yang diperoleh di 14.3, tetapi lebih cepat. Di $(1, 2, 3)$: $z_x = \frac{11}{5}$.

CONTOH 9 — KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian $f(x,y)=k$: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$. Untuk $f=x^2+2y^2$ di $(2,1)$: $-\dfrac{4}{4}=-1$, kemiringan garis singgung kontur -1. Bandingkan dengan gradien $\langle 4,4\rangle$, yang tegak lurus arah $\langle 1,-1\rangle$ (14.6).

5. Turunan orde dua dengan aturan rantai

CONTOH 10 — RANTAI DUA KALI

Bila $z=f(x,y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, maka $\dfrac{dz}{dt}=2tf_x+3t^2f_y$. Turunkan lagi ($f_x$, f_y sendiri fungsi t): $\dfrac{d^2z}{dt^2}=2f_x+2t\big(2t\,f_{xx}+3t^2f_{xy}\big)+6tf_y+3t^2\big(2t\,f_{yx}+3t^2f_{yy}\big)$. Untuk $f=xy$ (jadi $z=t^5$): $f_x=y=t^3$, $f_y=x=t^2$, $f_{xy}=1$, $f_{xx}=f_{yy}=0$: $2t^3+2t(3t^2)+6t\cdot t^2+3t^2(2t)=2t^3+6t^3+6t^3+6t^3=20t^3$; dan memang $(t^5)''=20t^3$.

6. Kesalahan umum

- Menghilangkan salah satu lintasan (lupa suku $f_y\,dy/dt$).
- Menulis dz/dt dengan d untuk turunan parsial, atau ∂ pada turunan fungsi satu peubah.
- Pada turunan implisit, lupa tanda minus di $-F_x/F_y$.
- Lupa mengevaluasi x,y di titik sebelum mensubstitusi ke turunan parsial.

7. Ringkasan

- $\dfrac{dz}{dt}=z_x x'+z_y y'$; untuk dua peubah bebas jumlahkan lintasan.
- Diagram pohon membantu mengorganisasi lintasan.
- Implisit: $dy/dx=-F_x/F_y$, $z_x=-F_x/F_z$.

Berikutnya 14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien.

14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien

f_x dan f_y mengukur laju perubahan ke arah sumbu. Bagaimana bila kita bergerak ke arah lain? Jawabannya adalah **turunan berarah**, dan jawabannya dihitung dengan sebuah vektor yang sangat penting: **gradien**.

1. Turunan berarah

DEFINISI

Turunan berarah f di (a,b) pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1,\, b + hu_2) - f(a,b)}{h}.$$

Ia adalah laju perubahan f per satuan jarak bila kita bergerak dari (a,b) ke arah $\mathbf{u}$. Dengan $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ diperoleh f_x; dengan $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ diperoleh f_y.

TEOREMA

Bila f terdiferensialkan, maka $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\,u_1 + f_y(x,y)\,u_2$.

Bukti. Definisikan $g(h) = f(a + hu_1, b + hu_2)$. Maka $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = g'(0)$. Aturan rantai (14.5) memberi $g'(h) = f_x\,u_1 + f_y\,u_2$ dihitung di $(a + hu_1, b + hu_2)$; di $h = 0$ diperoleh rumus. $\blacksquare$

Bila $\mathbf{u}$ membentuk sudut θ dengan sumbu x positif, $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ dan $D_{\mathbf{u}} f = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$.

2. Vektor gradien

GRADIEN

$$\nabla f = \langle f_x,\, f_y \rangle = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}, \qquad \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \text{ (tiga peubah).}$$

Maka $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.

CONTOH 1 — TURUNAN BERARAH

$f(x,y) = x^2y^3 - 4y$, titik $(2,1)$, arah $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ (sudut $30°$). $f_x = 2xy^3 = 4$, $f_y = 3x^2y^2 - 4 = 8$; $\nabla f(2,1) = \langle 4, 8 \rangle$. $D_{\mathbf{u}} f = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 4 \approx 7{,}464$.

CONTOH 2 — ARAH BUKAN SATUAN

Arah yang diberikan sebagai vektor $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$ harus dinormalkan: $\mathbf{u} = \frac{1}{5}\langle 3, -4 \rangle$. Untuk f di Contoh 1: $D_{\mathbf{u}} f = \frac{1}{5}(4 \cdot 3 + 8 \cdot (-4)) = \frac{12 - 32}{5} = -4$. Turun 4 per satuan jarak ke arah itu.

CONTOH 3 — TIGA PEUBAH

$f(x,y,z) = x \sin(yz)$ di $(1,3,0)$ ke arah $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$. $\nabla f = \langle \sin yz,\ xz\cos yz,\ xy\cos yz \rangle$, di titik: $\langle 0, 0, 3 \rangle$. $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\sqrt{6}$. $D_{\mathbf{u}} f = \dfrac{3(-1)}{\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} \approx -1{,}225$.

3. Arah pertumbuhan tercepat

TEOREMA

Misalkan f terdiferensialkan dan $\nabla f \neq \mathbf{0}$. Nilai maksimum $D_{\mathbf{u}} f$ adalah $|\nabla f|$, dicapai bila $\mathbf{u}$ searah ∇f. Nilai minimum $-|\nabla f|$ dicapai pada arah $-\nabla f$. Pada arah tegak lurus ∇f, $D_{\mathbf{u}} f = 0$.

Bukti. $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$, dengan θ sudut antara ∇f dan $\mathbf{u}$. Nilai maksimum $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$), minimum -1 ($\theta = \pi$), nol di $\theta = \pi/2$. ■

CONTOH 4 — ARAH TERCEPAT

Untuk f di Contoh 1 di $(2,1)$: laju kenaikan maksimum $|\langle 4, 8 \rangle| = \sqrt{80} \approx 8{,}944$ pada arah $\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Laju turun paling cepat $-8{,}944$ ke arah $-\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Perubahan nol pada arah $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle$ (garis singgung kurva ketinggian).

CONTOH 5 — PENDAKI DI BUKIT

Tinggi bukit $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$ (meter). Di $(60, 40)$: $\nabla z = \langle -0{,}01x, -0{,}02y\rangle = \langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$, $|\nabla z| = 1$. Tanjakan paling curam: arah $\langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$ dengan kemiringan 1 (sudut 45°). Bila pendaki berjalan ke arah $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1\rangle$: $D_{\mathbf{u}} z = \dfrac{-0{,}6 - 0{,}8}{\sqrt{2}} \approx -0{,}99$, turun hampir 1 meter per meter. Untuk berjalan mendatar ia harus mengikuti arah $\pm\langle 0{,}8, -0{,}6\rangle$.

CONTOH 6 — SUHU DAN SEMUT

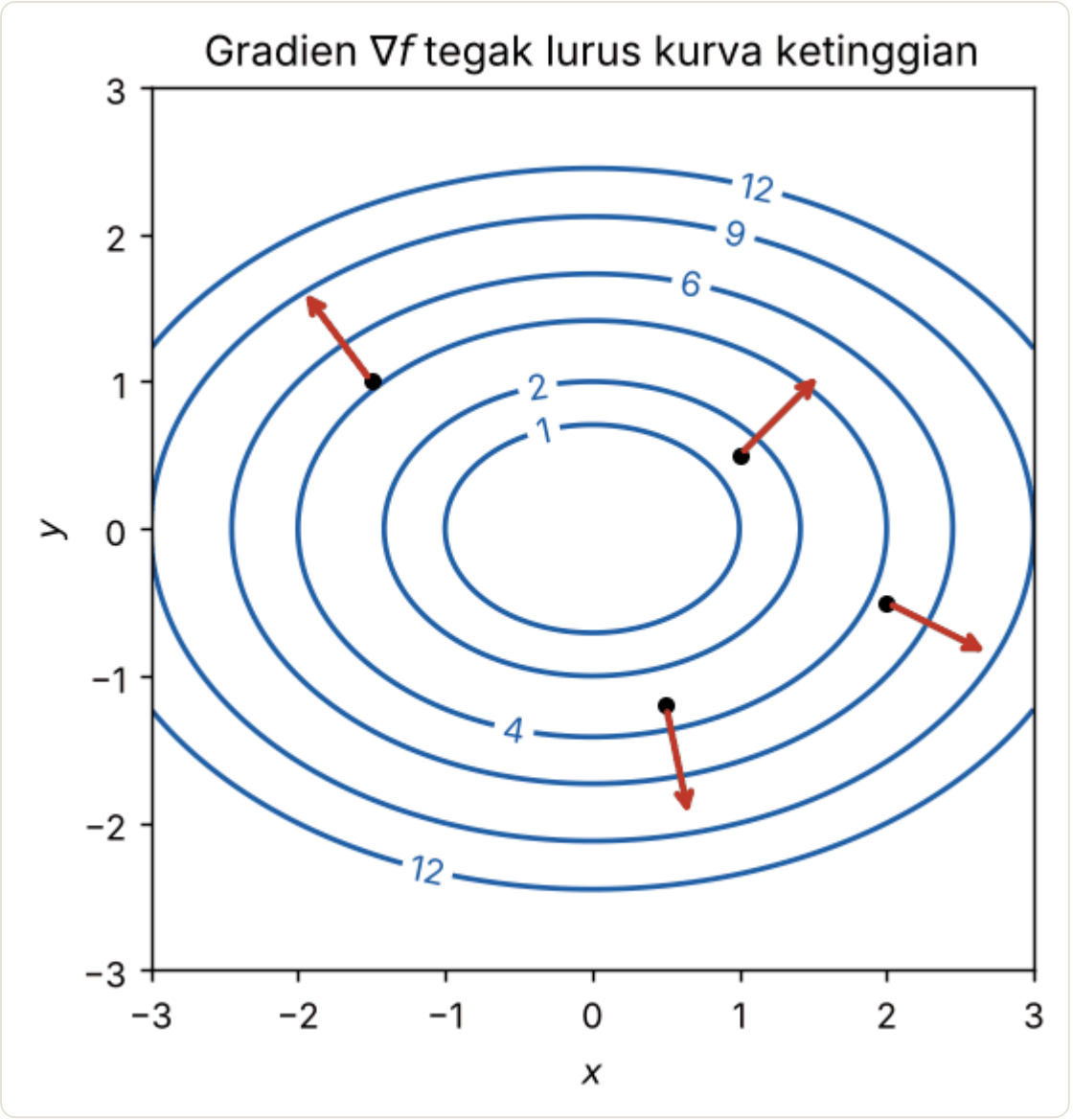
Suhu $T = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ di $(1, 1)$: $\nabla T = \langle -12{,}5, -25\rangle$. Semut yang ingin menghangat secepat mungkin bergerak ke arah $\nabla T \propto \langle -1, -2\rangle$ (menuju asal, tempat panas); yang ingin mendingin bergerak ke $\langle 1, 2\rangle$. Laju maksimum $|\nabla T| = \sqrt{12{,}5^2 + 25^2} \approx 27{,}95$ derajat per satuan jarak.

4. Gradien tegak lurus kurva ketinggian

TEOREMA

Di setiap titik P pada kurva ketinggian $f(x, y) = k$ (atau permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$), vektor $\nabla f(P)$ tegak lurus garis singgung (atau bidang singgung) kurva (permukaan) tersebut di P.

Bukti (kurva). Misalkan $\mathbf{r}(t)$ parametrisasi kurva ketinggian. Karena $f(\mathbf{r}(t)) = k$, aturan rantai memberi $\nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, yaitu $\nabla f \perp \mathbf{r}'$, vektor singgung. Argumen sama berlaku untuk setiap kurva pada permukaan ketinggian, jadi ∇f tegak lurus semua singgung di P. $\blacksquare$



Gradien (panah merah) tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah f naik.

BIDANG SINGGUNG DAN GARIS NORMAL PERMUKAAN KETINGGIAN

Untuk permukaan $F(x,y,z)=k$ di $P(x_0,y_0,z_0)$ dengan $\nabla F(P)\neq\mathbf{0}$:

$$F_x(P)(x-x_0)+F_y(P)(y-y_0)+F_z(P)(z-z_0)=0,$$

dan garis normal $\dfrac{x-x_0}{F_x}=\dfrac{y-y_0}{F_y}=\dfrac{z-z_0}{F_z}$.

CONTOH 7 — ELIPSOID

$F=\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=3$ di $(-2,1,-3)$ (periksa: $1+1+1=3$). $\nabla F=\langle\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{9}\rangle=\langle-1,2,-\frac{2}{3}\rangle$. Bidang singgung: $-(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$. Kalikan -3: $3x-6y+2z=-18$. Garis normal: $\langle-2-s,\ 1+2s,\ -3-\frac{2}{3}s\rangle$.

CONTOH 8 — GRAFIK SEBAGAI PERMUKAAN KETINGGIAN

Grafik $z = f(x, y)$ adalah permukaan ketinggian $F = f(x, y) - z = 0$, dengan $\nabla F = \langle f_x, f_y, -1 \rangle$ normalnya, sesuai 14.4. Untuk $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $\langle 2, 2, -1 \rangle$, bidang $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, sama dengan $z = 2x + 2y - 2$.

CONTOH 9 — SINGGUNG KONTUR

Kontur $x^2 + 2y^2 = 3$ di $(1, 1)$: $\nabla f = \langle 2, 4 \rangle$. Garis singgung kontur: $2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$, yaitu $x + 2y = 3$.

5. Kesalahan umum

- Memakai vektor arah yang bukan satuan. Normalkan dulu.
- Mengira $|\nabla f|$ adalah laju pada arah tertentu: itu laju *maksimum*.
- Menyamakan ∇f dengan arah kurva ketinggian: ia *tegak lurus*.
- Menghitung gradien sebelum mengevaluasinya di titik yang diminta.

6. Ringkasan

- $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ satuan.
- Maksimum $|\nabla f|$ pada arah ∇f; minimum pada $-\nabla f$; nol tegak lurus ∇f.
- ∇f tegak lurus kurva/permukaan ketinggian; dipakai untuk bidang singgung dan garis normal.

Berikutnya 14.7 Nilai Maksimum dan Minimum.

14.7 Nilai Maksimum dan Minimum

Salah satu penerapan terpenting turunan: mencari nilai terbesar dan terkecil. Pada dua peubah gagasan dasarnya sama dengan satu peubah, tetapi ada satu jenis titik baru: titik pelana.

1. Definisi

MAKSIMUM DAN MINIMUM

f mempunyai **maksimum lokal** di (a, b) bila $f(x, y) \leq f(a, b)$ untuk semua (x, y) dalam suatu cakram di sekitar (a, b); $f(a, b)$ disebut nilai maksimum lokal. **Minimum lokal** didefinisikan dengan $\geq$. Bila ketaksamaan berlaku untuk semua (x, y) di daerah asal, nilainya **mutlak** (global).

TEOREMA FERMAT (DUA PEUBAH)

Jika f mempunyai maksimum atau minimum lokal di (a, b) dan turunan parsial pertamanya ada di sana, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$.

Alasannya: fungsi satu peubah $g(x) = f(x, b)$ mempunyai ekstrem lokal di $x = a$, jadi $g'(a) = f_x(a, b) = 0$; serupa untuk f_y. Titik dengan $f_x = f_y = 0$ (atau salah satu turunan tidak ada) disebut **titik kritis**. Titik kritis hanyalah *kandidat*: tidak semuanya ekstrem.

Titik kritis yang bukan maksimum maupun minimum lokal disebut **titik pelana**: di sekitarnya f naik ke beberapa arah dan turun ke arah lain (seperti $f = x^2 - y^2$ di asal).

2. Uji turunan kedua

UJI TURUNAN KEDUA

Misalkan turunan parsial kedua f kontinu di sekitar (a, b), dengan $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Definisikan

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \text{ di } (a, b).$$

- $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$: **minimum lokal**.
- $D > 0$ dan $f_{xx} < 0$: **maksimum lokal**.
- $D < 0$: **titik pelana**.
- $D = 0$: uji tidak memberi kesimpulan.

Gagasan. Di dekat titik kritis, f menyerupai bentuk kuadrat $\frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2)$. Bentuk ini positif untuk semua $(h, k) \neq \mathbf{0}$ tepat bila $f_{xx} > 0$ dan $D > 0$ (kriteria matriks definit positif); negatif bila $f_{xx} < 0$, $D > 0$; berganda tanda bila $D < 0$.

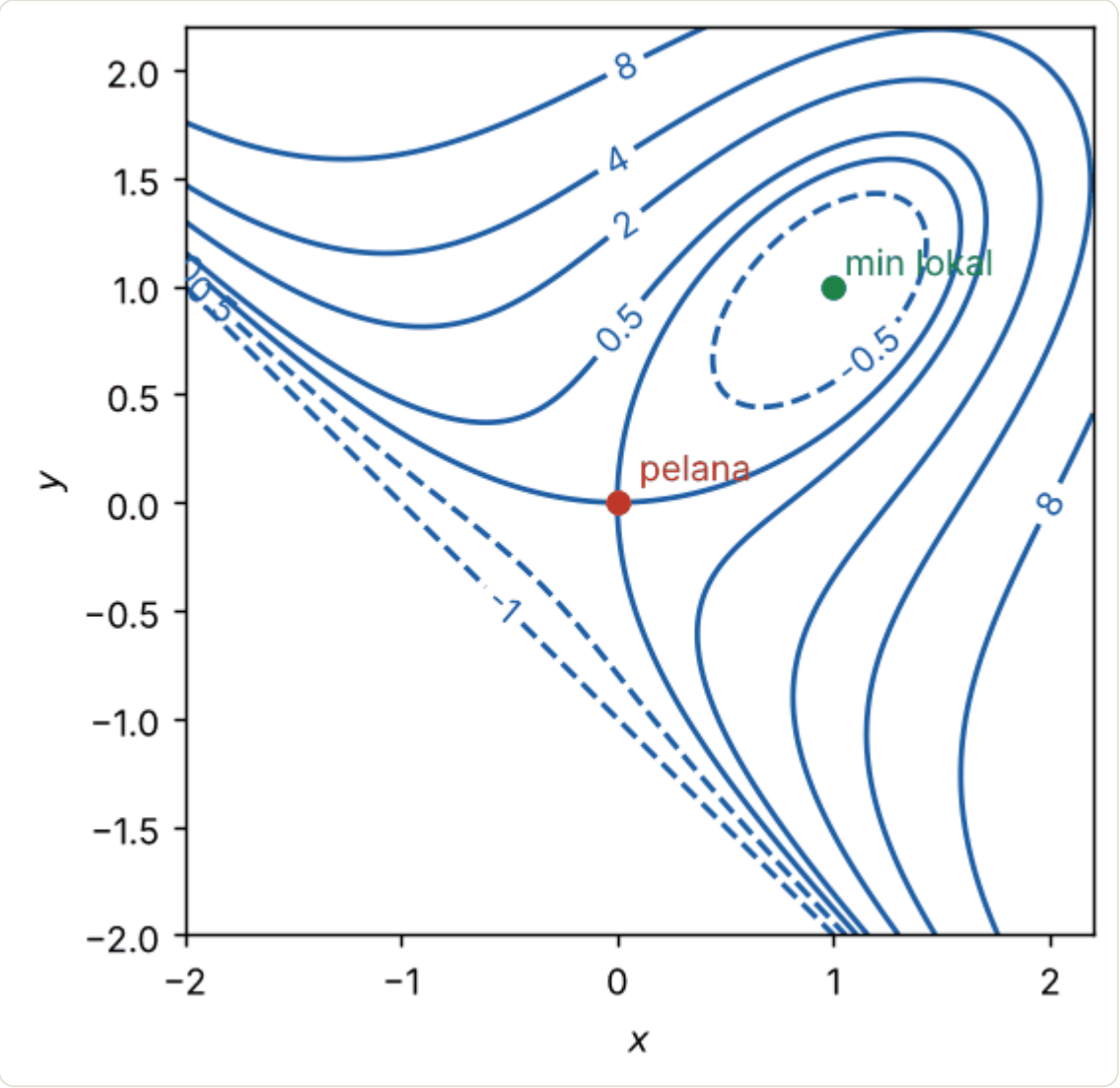
CONTOH 1 — TIGA TITIK KRITIS

$f = x^4 + y^4 - 4xy$. $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$. Dari $f_x = 0$: $y = x^3$; masukkan: $4x^9 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$. Titik kritis: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$, $D = 144x^2y^2 - 16$.

- $(0, 0)$: $D = -16 < 0$: pelana.
- $(1, 1)$: $D = 128 > 0$, $f_{xx} = 12 > 0$: minimum lokal, $f = 1 + 1 - 4 = -2$.
- $(-1, -1)$: $D = 128$, $f_{xx} = 12$: minimum lokal, $f = -2$.

CONTOH 2 — $F = X^3 + Y^3 - 3XY$

$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$; $f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$. Titik: $(0, 0)$, $(1, 1)$. $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, $D = 36xy - 9$. Di $(0, 0)$: $D = -9$: pelana. Di $(1, 1)$: $D = 27 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$: minimum lokal $f = -1$.



Kontur $f = x^3 + y^3 - 3xy$: pelana di $(0, 0)$, minimum lokal di $(1, 1)$.

CONTOH 3 — $D = 0$

Untuk $f = x^4 + y^4$ di $(0, 0)$: $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$, $D = 0$: uji gagal, tetapi jelas $(0, 0)$ minimum (nilai ≥ 0). Untuk $g = x^2 + y^3$: titik kritis $(0, 0)$, $D = 0$; sepanjang sumbu y negatif $g < 0$, sepanjang sumbu x $g > 0$: bukan ekstrem (pelana). Kesimpulannya, saat $D = 0$ perlu analisis langsung.

CONTOH 4 — JARAK TITIK KE BIDANG

Cari titik pada bidang $x + 2y + z = 4$ yang terdekat dengan $(1, 0, -2)$. Substitusi $z = 4 - x - 2y$: $d^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$. $\partial_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14$; $\partial_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24$. Selesaikan: $x + y = \frac{7}{2}$, $4x + 10y = 24 \Rightarrow 6y = 10$, $y = \frac{5}{3}$, $x = \frac{11}{6}$, $z = -\frac{7}{6}$. $d^2 = \frac{25}{36} + \frac{100}{36} + \frac{25}{36} = \frac{150}{36}$, $d = \frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}041$, sama dengan $\frac{|1+0-2-4|}{\sqrt{6}}$ (12.5). Bentuk d^2 merupakan paraboloid terbuka ke atas, jadi titik kritis adalah minimum global.

CONTOH 5 — KOTAK TANPA TUTUP

Kotak persegi panjang tanpa tutup bervolume 32 m³: minimalkan luas bahan $A = xy + 2xz + 2yz$ dengan $z = \frac{32}{xy}$: $A = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$. $A_x = y - \frac{64}{x^2} = 0$, $A_y = x - \frac{64}{y^2} = 0 \Rightarrow x = y = 4$, $z = 2$, $A = 16 + 16 + 16 = 48$ m². $A_{xx} = \frac{128}{x^3} = 2 > 0$, $A_{xy} = 1$, $D = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$: minimum. Alas persegi, tinggi setengah sisi alas.

3. Nilai ekstrem mutlak pada daerah tertutup

TEOREMA NILAI EKSTREM

Jika f kontinu pada himpunan $D \subset \mathbb{R}^2$ yang tertutup dan terbatas, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak di D.

Metode (tiga langkah).

1. Cari nilai f di titik kritis di bagian dalam D.
2. Cari nilai ekstrem f pada batas D (kurangi ke fungsi satu peubah, atau pakai Lagrange, 14.8).
3. Nilai terbesar dan terkecil di antara semuanya adalah maksimum dan minimum mutlak.

CONTOH 6 — PERSEGI PANJANG

$f = x^3 - 3x + y^2$ pada $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.
Dalam: $f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $f_y = 2y = 0$: $f(1, 0) = -2$, $f(-1, 0) = 2$.
Sisi $y = \pm 1$: $g(x) = x^3 - 3x + 1$, $g' = 0$ di $x = \pm 1$: $g(1) = -1$, $g(-1) = 3$; ujung $g(2) = 3$, $g(-2) = -1$.
Sisi $x = 2$: $2 + y^2 \in [2, 3]$; sisi $x = -2$: $-2 + y^2 \in [-2, -1]$.
Nilai-nilai kandidat: $-2,\ 2,\ -1,\ 3,\ -2,\ -1$. Maksimum mutlak 3 (di $(-1, \pm 1)$ dan $(2, \pm 1)$); minimum mutlak -2 (di $(1, 0)$ dan $(-2, 0)$).

CONTOH 7 — SEGITIGA

$f = x^2 + y^2 - 2x$ pada segitiga $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Dalam: $f_x = 2x - 2 = 0$, $f_y = 2y = 0 \Rightarrow (1, 0)$, yang berada di batas (sisi bawah). Sisi $y = 0$, $0 \le x \le 2$: $x^2 - 2x \in [-1, 0]$, min -1 di $x = 1$. Sisi $x = 0$, $0 \le y \le 2$: $y^2 \in [0, 4]$. Sisi miring $y = 2 - x$: $x^2 + (2 - x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$, minimum di $x = \frac{3}{2}$: $2 \cdot \frac{9}{4} - 9 + 4 = -\frac{1}{2}$; ujung: $x = 0$: 4; $x = 2$: 0. Maksimum mutlak 4 di $(0, 2)$; minimum mutlak -1 di $(1, 0)$.

4. Kesalahan umum

- Menganggap setiap titik kritis adalah ekstrem; pelana adalah kemungkinan ketiga.
- Lupa memeriksa batas pada daerah tertutup.
- Memakai uji turunan kedua saat $D = 0$.
- Salah tanda: $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, bukan $f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2$.

5. Ringkasan

- Ekstrem lokal $\Rightarrow f_x = f_y = 0$ (titik kritis).
- $D > 0$, $f_{xx} > 0$: min; $D > 0$, $f_{xx} < 0$: maks; $D < 0$: pelana.
- Pada daerah tertutup terbatas: bandingkan titik kritis dan nilai pada batas.

Berikutnya 14.8 Pengali Lagrange.

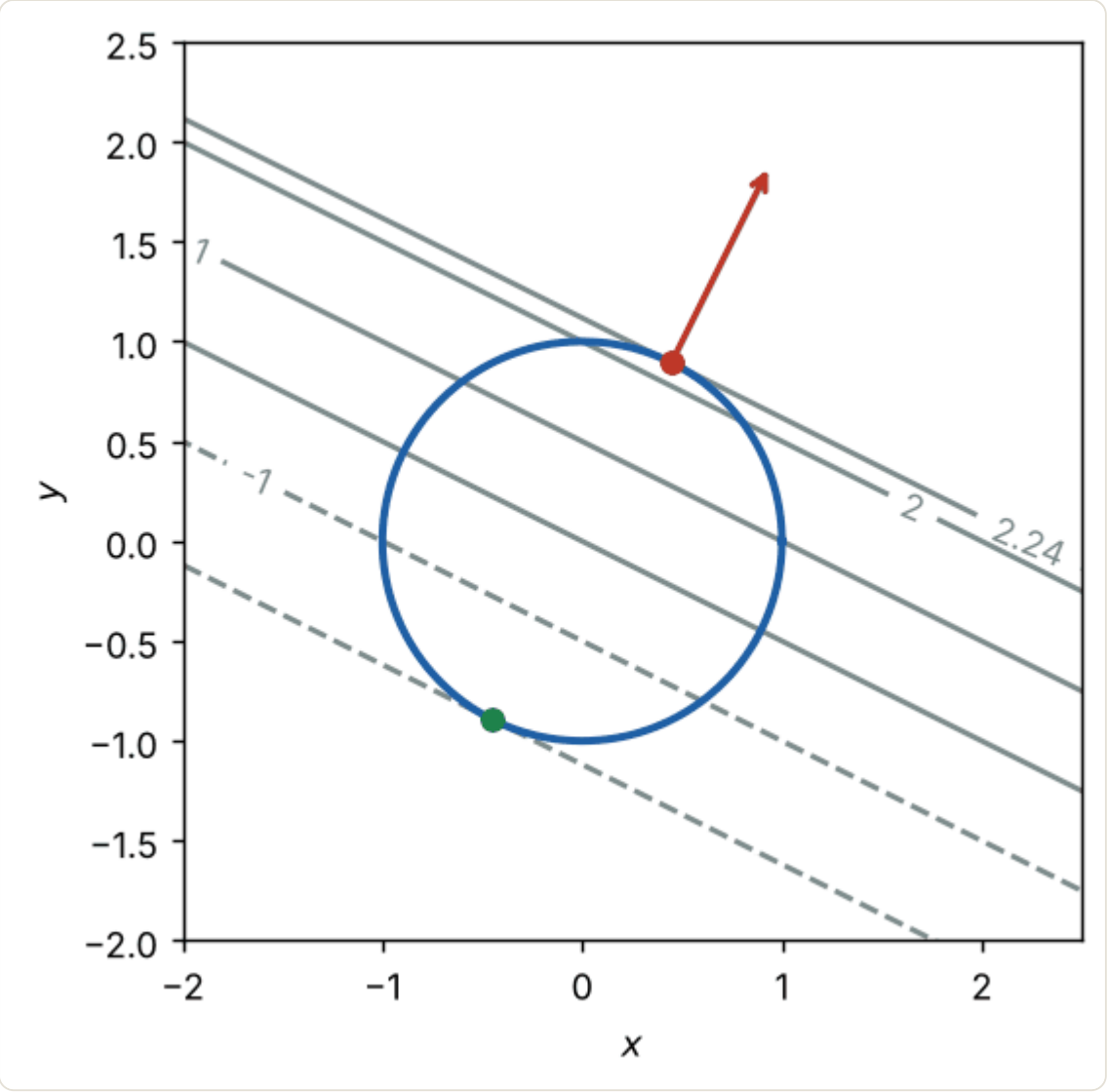
14.8 Pengali Lagrange

Banyak masalah optimasi mempunyai *kendala*: memaksimalkan hasil dengan anggaran tertentu, meminimalkan bahan dengan volume tertentu. Metode **pengali Lagrange** menangani ini tanpa harus menyelesaikan kendala secara eksplisit.

1. Gagasan geometris

Maksimalkan $f(x, y)$ dengan kendala $g(x, y) = k$. Kurva kendala $g = k$ adalah sebuah kurva di bidang. Kita memakai kurva ketinggian $f = c$ dan menaikkan c sejauh masih menyentuh kurva kendala. Nilai c terbesar tercapai pada titik di mana kurva ketinggian *menyinggung* kurva kendala. Di titik singgung, keduanya mempunyai garis singgung sama, jadi gradiennya sejajar:

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$



Maksimumkan $f = x + 2y$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$: kontur f menyinggung lingkaran di titik merah.

2. Metode

METODE PENGALI LAGRANGE (SATU KENDALA)

Untuk mencari ekstrem $f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = k$ (dengan $\nabla g \neq \mathbf{0}$):

1. Selesaikan sistem $\nabla f = \lambda \nabla g$ dan $g = k$; yaitu $f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$, $f_z = \lambda g_z$, $g = k$.
2. Hitung f di semua titik (x, y, z) hasilnya. Terbesar = maksimum, terkecil = minimum (bila ekstrem ada).

λ disebut **pengali Lagrange**. Hal yang sama berlaku untuk dua peubah (hilangkan z).

Catatan. Bila g berupa kurva tertutup dan terbatas (lingkaran, elips, dsb.), teorema nilai ekstrem menjamin ekstrem ada. Pada kendala tak terbatas (mis. hiperbola), periksa dengan cara lain apakah titik yang ditemukan memang maksimum atau minimum.

CONTOH 1 — FUNGSI LINEAR PADA LINGKARAN

Maksimalkan dan minimalkan $f = x + 2y$ dengan $x^2 + y^2 = 1$. $\nabla f = \langle 1, 2\rangle = \lambda\langle 2x, 2y\rangle \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$. Masukkan ke kendala: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4}$, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Titik: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ dengan $f = \sqrt{5}$ (maksimum) dan $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ dengan $f = -\sqrt{5}$ (minimum). Cocok dengan Cauchy–Schwarz: $|x + 2y| \le \sqrt{1+4}\sqrt{x^2+y^2}$.

CONTOH 2 — KOTAK TERTUTUP

Kotak tertutup bervolume 1000 cm³ dengan luas permukaan terkecil. $f = 2(xy + yz + zx)$, $g = xyz = 1000$. $f_x = 2(y+z) = \lambda yz$, $f_y = 2(x+z) = \lambda xz$, $f_z = 2(x+y) = \lambda xy$. Kalikan persamaan pertama dengan x, kedua dengan y, ketiga dengan z: $2x(y+z) = 2y(x+z) = 2z(x+y) = \lambda xyz$. Dari dua pertama: $xz = yz \Rightarrow x = y$ (karena $z \neq 0$); dari yang kedua dan ketiga: $xy = xz \Rightarrow y = z$. Jadi $x = y = z = 10$ (kubus), luas $= 600$ cm².

CONTOH 3 — EKSTREM PADA CAKRAM

Cari ekstrem mutlak $f = x^2 + 2y^2 - x$ pada cakram $x^2 + y^2 \le 1$. *Dalam:* $f_x = 2x - 1 = 0$, $f_y = 4y = 0$: $(\frac{1}{2}, 0)$, $f = -\frac{1}{4}$. *Batas* $x^2 + y^2 = 1$ dengan Lagrange: $2x - 1 = 2\lambda x$, $4y = 2\lambda y$. Dari yang kedua: $y = 0$ atau $\lambda = 2$. Bila $y = 0$: $x = \pm 1$, $f(1,0) = 0$, $f(-1,0) = 2$. Bila $\lambda = 2$: $2x - 1 = 4x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, $y^2 = \frac{3}{4}$, $f = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ di $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Maksimum mutlak $\frac{9}{4}$; minimum mutlak $-\frac{1}{4}$ di $(\frac{1}{2}, 0)$.

CONTOH 4 — JARAK TERDEKAT

Titik pada $x^2 + y^2 = 4$ yang terjauh dan terdekat ke $(3, 4)$? Minimalkan $f = (x-3)^2 + (y-4)^2$, $g = x^2 + y^2 = 4$. $2(x-3) = 2\lambda x$, $2(y-4) = 2\lambda y \Rightarrow x = \frac{3}{1-\lambda}$, $y = \frac{4}{1-\lambda}$, jadi (x, y) sejajar $(3, 4)$: $(x, y) = s(3, 4)$, $25s^2 = 4$, $s = \pm\frac{2}{5}$. Terdekat $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$, jarak $5 - 2 = 3$; terjauh $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$, jarak $5 + 2 = 7$. Sesuai gambaran geometris: pusat lingkaran, titik, dan titik ekstrem segaris.

3. Dua kendala

DUA KENDALA

Untuk ekstrem $f(x,y,z)$ dengan $g(x,y,z)=k$ dan $h(x,y,z)=l$: selesaikan

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h,\quad g=k,\quad h=l.$$

Artinya ∇f terletak pada bidang yang direntang $\nabla g,\nabla h$ (tegak lurus kurva irisan).

CONTOH 5 — SILINDER DAN BIDANG

Ekstrem $f=z$ pada kurva irisan $x^2+y^2=1$ dan $x+y+z=2$. $\langle 0,0,1\rangle=\lambda\langle 2x,2y,0\rangle+\mu\langle 1,1,1\rangle$. Komponen z: $\mu=1$. Komponen x,y: $2\lambda x+1=0$, $2\lambda y+1=0\Rightarrow x=y$. Dari silinder: $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $z=2-x-y=2\mp\sqrt{2}$. Maksimum $2+\sqrt{2}\approx 3{,}414$ di $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},2+\sqrt{2}\right)$; minimum $2-\sqrt{2}\approx 0{,}586$. (Sesuai dengan elips irisan, titik tertinggi dan terendah.)

4. Contoh ekonomi dan arti λ

CONTOH 6 — PRODUKSI DENGAN ANGGARAN

Produksi $P=L^{0{,}6}K^{0{,}4}$. Biaya satu unit tenaga kerja 2 dan modal 5; anggaran 100: $2L+5K=100$. $P_L=\frac{0{,}6P}{L}=2\lambda$, $P_K=\frac{0{,}4P}{K}=5\lambda$. Bagi: $\dfrac{0{,}6K}{0{,}4L}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow K=\dfrac{4}{15}L$. Masukkan: $2L+\frac{4}{3}L=100\Rightarrow L=30$, $K=8$. $P=30^{0{,}6}8^{0{,}4}\approx 17{,}68$. Pola umum Cobb–Douglas: L dan K memakai bagian anggaran $0{,}6$ dan $0{,}4$: $2L=60$, $5K=40$.

ARTI λ

$\lambda=\dfrac{dP^*}{d(\text{anggaran})}$: perubahan nilai optimum akibat kenaikan satu satuan batas kendala. Pada Contoh 6: $\lambda=\frac{P_L}{2}=\frac{0{,}6P}{2L}\approx 0{,}1768$. Verifikasi: bila anggaran dinaikkan menjadi 101, $L=30{,}3$, $K=8{,}08$, P naik $\approx 0{,}1768$. Disebut *harga bayangan*.

5. Kesalahan umum

- Lupa menyertakan persamaan kendala $g = k$ dalam sistem.
- Membuang solusi $x = 0$ atau $y = 0$ ketika membagi (seperti pada Contoh 3).
- Tidak membandingkan nilai f di semua titik kandidat.
- Mengira semua titik kandidat adalah maksimum atau semuanya minimum.

6. Ringkasan

- Ekstrem terkendala: $\nabla f = \lambda \nabla g$ dan $g = k$.
- Dua kendala: $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
- Pada daerah tertutup: titik kritis dalam + Lagrange pada batas.
- λ adalah laju perubahan optimum terhadap batas kendala.

Bab 14 berakhir di sini. Bab berikutnya, 15.1, memperkenalkan integral rangkap.

Bab 15: Integral Ganda

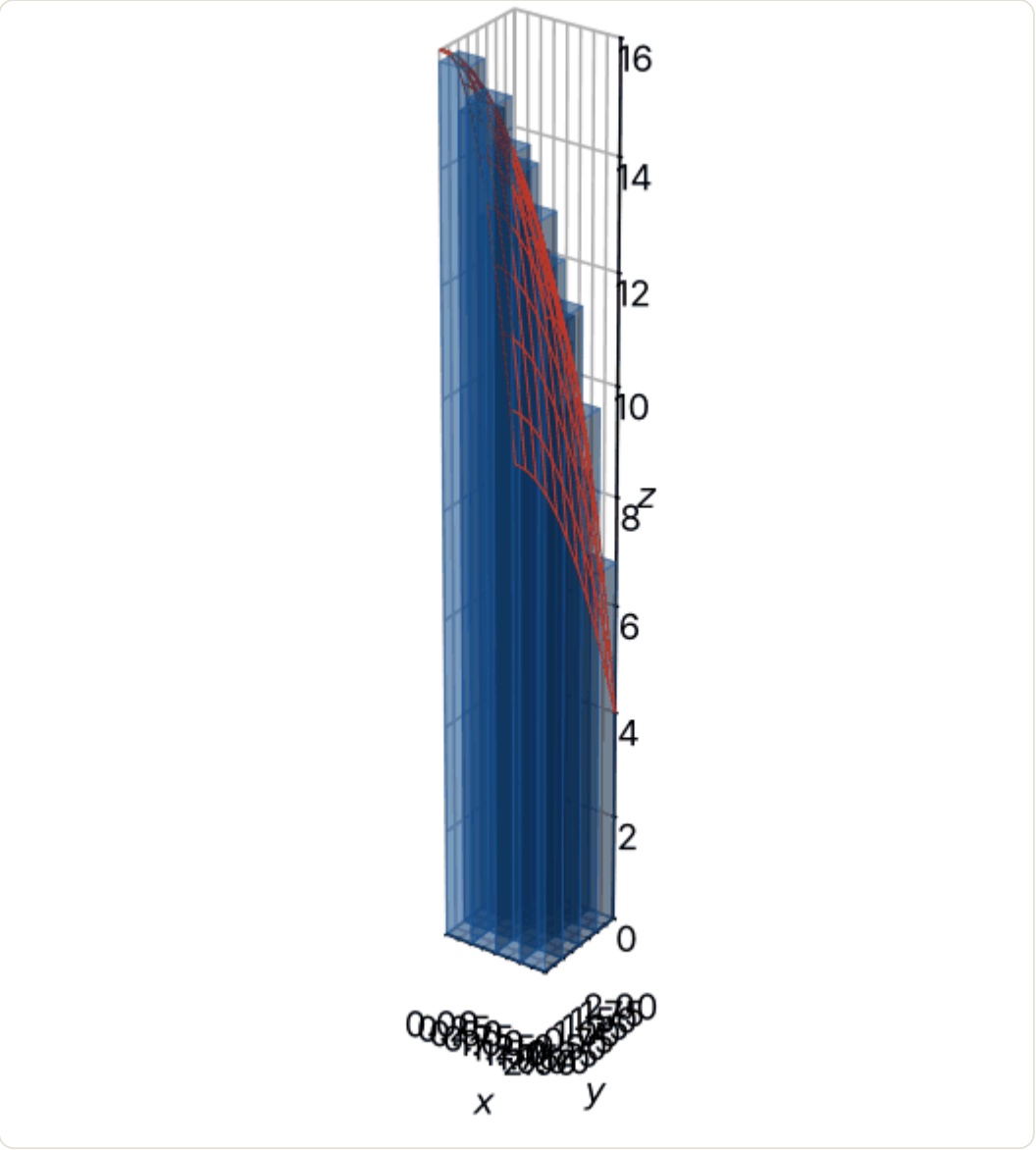
15.1 Integral Ganda Dua atas Persegi Panjang

Integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ menjumlahkan nilai f di sepanjang selang, dan mengukur luas di bawah kurva. Integral ganda dua menjumlahkan nilai $f(x,y)$ di atas sebuah daerah di bidang dan mengukur **volume** di bawah permukaan.

1. Volume dan jumlah Riemann

Misalkan $f(x,y) \geq 0$ pada persegi panjang tertutup $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Padatan S yang terletak di atas R dan di bawah grafik $z = f(x,y)$ kita hampiri sebagai berikut:

1. Bagi $[a,b]$ menjadi m selang lebar $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ dan $[c,d]$ menjadi n selang lebar $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Ini membagi R menjadi mn persegi panjang kecil R_{ij} dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$.
2. Pilih titik contoh (x_{ij}^*, y_{ij}^*) di tiap R_{ij}. Balok di atas R_{ij} berketinggian $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ mempunyai volume $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.
3. Jumlahkan: $V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$ (*jumlah Riemann ganda*).



Hampiran volume di bawah $z = 16 - x^2 - 2y^2$ dengan 4×4 balok (titik tengah).

DEFINISI INTEGRAL GANDA DUA

Integral ganda dua f atas persegi panjang R:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A,$$

bila limit ada. Bila f kontinu (atau terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus), limit ada dan tidak bergantung pada pilihan titik contoh. Bila $f \geq 0$, $\iint_R f\,dA$ adalah volume padatan di bawah grafik f dan di atas R.

CONTOH 1 — JUMLAH RIEMANN BEBERAPA PILIHAN

$f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pada $R = [0,2] \times [0,2]$, $m = n = 2$ ($\Delta A = 1$).
Titik sudut kiri-bawah: $f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 16 + 14 + 15 + 13 = 58$.
Titik tengah $(0{,}5;0{,}5), (0{,}5;1{,}5), (1{,}5;0{,}5), (1{,}5;1{,}5)$: $15{,}25 + 11{,}25 + 13{,}25 + 9{,}25 = 49$.
Nilai sebenarnya $\iint_R f\,dA = 48$ (dihitung di 15.2). Aturan titik tengah (49) jauh lebih dekat dari sudut kiri-bawah (58), karena f turun ke arah kanan dan atas sehingga sudut kiri-bawah selalu melebih-lebihkan.

CONTOH 2 — HAMPIRAN TABEL

Curah hujan (cm) di empat titik tengah sebuah daerah 4×4 km dibagi 2×2: $1{,}2;\ 0{,}8;\ 1{,}5;\ 1{,}1$. Tiap persegi 2×2 km luasnya 4 km². Total volume air $\approx 4(1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}5 + 1{,}1) = 4(4{,}6) = 18{,}4$ km²·cm. Rata-rata curah hujan $= 18{,}4/16 = 1{,}15$ cm.

2. Nilai rata-rata

NILAI RATA-RATA

$$f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Untuk contoh di atas: $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

3. Sifat-sifat

- $\iint_R [f + g]\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA$.
- $\iint_R cf\,dA = c\iint_R f\,dA$.
- Bila $f \geq g$ pada R, maka $\iint_R f\,dA \geq \iint_R g\,dA$.
- Bila $R = R_1 \cup R_2$ tidak tumpang tindih (kecuali di batas), $\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$.
- $m\,A(R) \leq \iint_R f\,dA \leq M\,A(R)$ bila $m \leq f \leq M$ pada R.
- $\iint_R 1\,dA = A(R)$.

CONTOH 3 — MEMAKAI KESIMETRIAN

$\iint_R \dfrac{\sin x}{1+y^2}\,dA$ dengan $R=[-\pi,\pi]\times[0,1]$. Karena $\sin x$ fungsi ganjil terhadap x dan R simetris terhadap $x=0$, integralnya $=0$ tanpa perhitungan panjang.

CONTOH 4 — BATAS NILAI INTEGRAL

Pada $R=[0,1]\times[0,2]$, $1\le x^2+y^2+1\le 6$. Maka $2\le \iint_R (x^2+y^2+1)\,dA\le 12$ (luas $R=2$).

CONTOH 5 — VOLUME DARI GEOMETRI

$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA$ dengan $R=[-1,1]\times[-2,2]$: grafik $z=\sqrt{1-x^2}$ adalah setengah silinder lingkaran jari-jari 1 sepanjang sumbu y (panjang 4). Volume $=\frac{1}{2}\pi(1)^2\cdot 4=2\pi$.

4. Kesalahan umum

- Mengartikan integral ganda sebagai luas. $\iint_R f\,dA$ adalah volume (bila $f\ge 0$); luas R adalah $\iint_R 1\,dA$.
- Menghitung jumlah Riemann tanpa mengalikan dengan ΔA.
- Mengabaikan nilai negatif: bagian di bawah bidang xy menyumbang volume bertanda negatif.

5. Ringkasan

- $\iint_R f\,dA=\lim \sum f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A$; volume bila $f\ge 0$.
- Aturan titik tengah memberi hampiran yang baik.
- Sifat linear, aditif, monoton; nilai rata-rata $=\frac{1}{A}\iint f\,dA$.

Berikutnya 15.2: cara menghitungnya dengan integral berulang.

15.2 Integral Berulang

Menghitung integral ganda dari definisi limit hampir mustahil. Untungnya ada teorema yang mengubahnya menjadi dua integral satu peubah berurutan.

1. Integral parsial dan integral berulang

$\int_c^d f(x,y)\,dy$ berarti integrasi terhadap y dengan x dianggap konstan; hasilnya fungsi x. Integral hasilnya terhadap x memberi **integral berulang**:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

Integral dalam dihitung lebih dulu, dari dalam ke luar.

CONTOH 1 — DUA URUTAN

$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{2}$. Dengan urutan dibalik: $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 dy = \int_1^2 9y\,dy = 9\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{2}$. Hasilnya sama.

2. Teorema Fubini

TEOREMA FUBINI

Jika f kontinu pada $R = [a,b]\times[c,d]$, maka

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Berlaku juga bila f terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, asalkan integral berulangnya ada.)

Gagasan geometris. Untuk x tetap, $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ adalah luas irisan padatan oleh bidang yang tegak lurus sumbu x. Mengintegrasikan luas irisan sepanjang x memberi volume (prinsip Cavalieri). Mengiris pada arah lain memberi urutan lain, dengan volume yang sama.

CONTOH 2 — VOLUME NYATA

$\iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA$ dengan $R = [0,2] \times [0,2]$: $\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[16y - x^2 y - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \tfrac{16}{3}\right) dx = \int_0^2 \left(\tfrac{80}{3} - 2x^2\right) dx = \tfrac{160}{3} - \tfrac{16}{3} = 48.$

CONTOH 3 — PILIH URUTAN YANG MUDAH

$\iint_R y e^{xy}\,dA$, $R = [0,1] \times [0,2]$. Integrasikan lebih dulu terhadap x (karena $\int y e^{xy} dx = e^{xy}$ sederhana): $\int_0^2 \int_0^1 y e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^2 (e^y - 1)\,dy = e^2 - 3 \approx 4{,}389$. Bila dibalik, integral dalam $\int y e^{xy} dy$ memerlukan integrasi parsial dan jauh lebih rumit.

CONTOH 4 — FUNGSI TERPISAH

Bila $f(x,y) = g(x)h(y)$ dan $R = [a,b] \times [c,d]$, maka $\iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$. Misalnya $\iint_{[0,\pi/2]^2} \sin x \cos y\,dA = 1 \cdot 1 = 1.$

CONTOH 5 — INTEGRASI TERHADAP X LEBIH DULU

Hitung $\iint_{[1,2]\times[0,\pi]} y \sin(xy)\,dA$. Integrasi terhadap x lebih dulu: $\int_1^2 y\sin(xy)\,dx = [-\cos(xy)]_1^2 = \cos y - \cos 2y$. Lalu $\int_0^\pi (\cos y - \cos 2y)\,dy = 0 - 0 = 0.$

3. Penerapan pada volume

CONTOH 6 — PADATAN DI BAWAH BIDANG

Volume padatan di bawah bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas $R = [0,1] \times [0,1]$: $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (4 - x - 1)\,dx = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$.

CONTOH 7 — VOLUME ANTARA DUA PERMUKAAN

Volume di antara $z = x^2 + y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas) di atas $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pada R berlaku $x^2 + y^2 \le 2$, sehingga $x^2 + y^2 \le 8 - (x^2 + y^2)$ dan urutan permukaan benar. $V = \iint_R (8 - 2x^2 - 2y^2)\, dA = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 32 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$. (Karena $\iint_R x^2 dA = \int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.)

4. Kesalahan umum

- Salah menaruh batas: pada $dy\, dx$, batas dalam untuk y, batas luar untuk x.
- Menjadikan x variabel saat mengintegrasikan terhadap y (atau sebaliknya).
- Menganggap faktorisasi $\iint g(x)h(y)$ bekerja pada daerah bukan persegi panjang. Pada daerah umum, batas bergantung pada peubah lain.

5. Ringkasan

- Integral berulang: hitung dari dalam ke luar, menahan peubah lain konstan.
- Fubini: untuk f kontinu pada persegi panjang, urutan tidak penting.
- Pilih urutan yang membuat integral dalam termudah.

Berikutnya 15.3: daerah yang bukan persegi panjang.

15.3 Integral Ganda Dua atas Daerah Umum

Daerah yang kita integrasikan jarang berupa persegi panjang. Di sini kita memperluas integral ganda ke daerah terbatas D berbentuk umum dengan menggunakan batas yang bergantung pada peubah lain.

1. Integral atas daerah umum

Untuk daerah terbatas D, kurung D dalam persegi panjang R dan definisikan $F(x,y) = f(x,y)$ bila $(x,y) \in D$ dan $F = 0$ di luar D. Maka $\iint_D f\,dA := \iint_R F\,dA$. Dalam praktik kita memakai dua jenis daerah.

DAERAH TIPE I (BATAS ATAS DAN BAWAH BERUPA FUNGSI X)

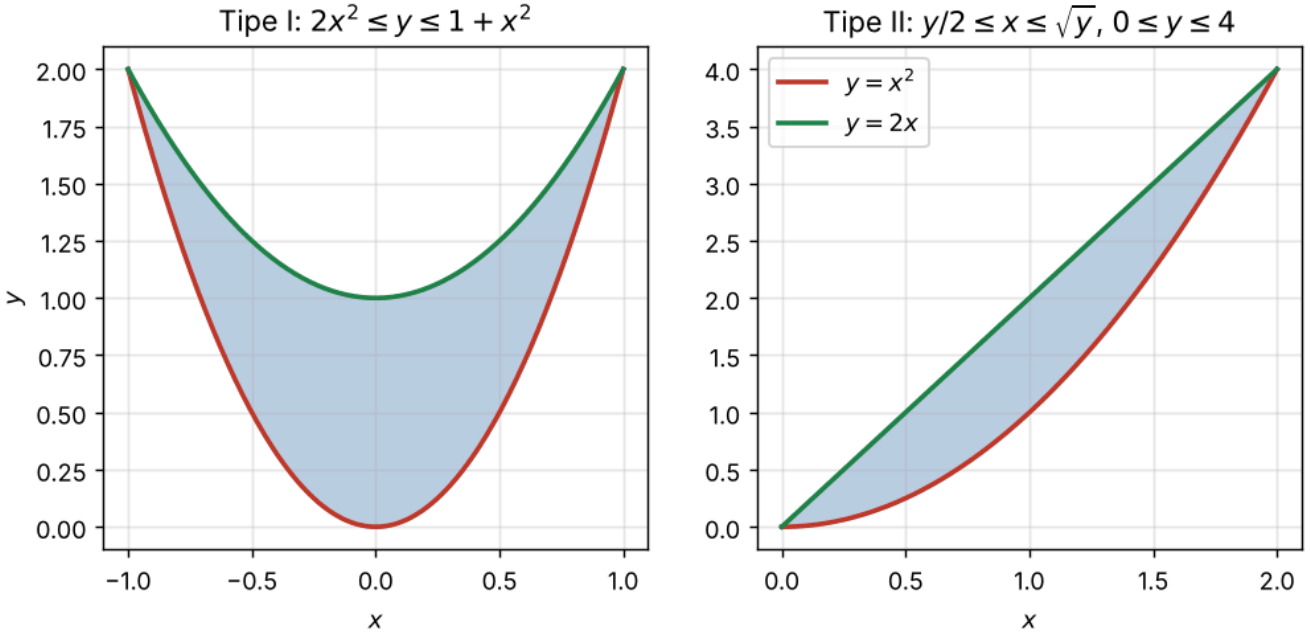
$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ dengan g_1, g_2 kontinu. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

DAERAH TIPE II (BATAS KIRI DAN KANAN BERUPA FUNGSI Y)

$D = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



Kiri: tipe I, dibatasi parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Kanan: tipe II, daerah di antara $y = x^2$ dan $y = 2x$.

CARA MENYUSUN BATAS

1. Gambar daerah D.
2. Untuk tipe I: gambar anak panah vertikal melalui D dari batas bawah ke batas atas; itulah batas y. Batas x adalah ujung kiri dan kanan seluruh daerah.
3. Untuk tipe II: anak panah horizontal; batas x dari kiri ke kanan, batas y adalah ujung bawah dan atas.

Batas integral dalam boleh memuat peubah luar; batas integral luar harus konstanta.

2. Contoh

CONTOH 1 — TIPE I

$\iint_D (x + 2y)\,dA$, D antara parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Perpotongan: $2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$. Untuk $-1 \le x \le 1$, $2x^2 \le y \le 1 + x^2$.

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2 \Big]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + x - x^3 + 2x^2 - 3x^4\right) d$$

Suku ganjil x dan $-x^3$ saling menghapus pada selang simetris: $2\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \dfrac{32}{15} \approx 2{,}133$.

CONTOH 2 — TIPE II

$\iint_D (x+y)\,dA$, D antara $y = x^2$ dan $y = 2x$ (titik potong $(0,0)$ dan $(2,4)$). Sebagai tipe II: $0 \le y \le 4$, $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$. Sebagai tipe I: $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 2x$: $\int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x} dx$. Di $y = 2x$ suku dalam kurung bernilai $2x^2 + 2x^2 = 4x^2$; di $y = x^2$ bernilai $x^3 + \frac{x^4}{2}$. Jadi integralnya $\int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx$ dan hasilnya $\frac{32}{3} - 4 - \frac{16}{5} = \frac{160 - 60 - 48}{15} = \frac{52}{15} \approx 3{,}467$.

CONTOH 3 — DAERAH DI ANTARA $Y = X$ DAN $Y = X^2$

D: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$. $\iint_D (x+y)\,dA = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$.

CONTOH 4 — VOLUME TETRAHEDRON

Padatan dibatasi bidang $x + 2y + z = 2$ dan bidang-bidang koordinat (oktan pertama). Alas: segitiga di bidang xy dengan $z = 0$: $x + 2y = 2$, jadi $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$. Tinggi $z = 2 - x - 2y$.

$$V = \int_0^2 \int_0^{1 - x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \left[-\tfrac{2}{3}\left(1 - \tfrac{x}{2}\right)^3\right]_0^2 = \tfrac{2}{3}.$$

Cek geometris: $V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$ (tetrahedron dengan rusuk saling tegak lurus 2, 1, 2).

CONTOH 5 — LUAS DARI INTEGRAL GANDA

$A(D) = \iint_D 1\,dA$. Untuk daerah Contoh 1: $\int_{-1}^{1} \left[(1 + x^2) - 2x^2\right] dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Untuk daerah Contoh 2: $\int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Kebetulan sama.

3. Membalik urutan integrasi

Kadang integral berulang hanya dapat dihitung bila urutannya dibalik: gambar daerah dari batas yang diberikan, lalu tulis ulang sebagai tipe lain.

CONTOH 6 — ANTITURUNAN TIDAK ELEMENTER

$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$. $\int e^{y^2}\,dy$ tidak punya antiturunan elementer. Daerahnya $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$: segitiga dengan titik $(0,0), (0,1), (1,1)$. Sebagai tipe II: $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.
$\int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \approx 0{,}859$.

CONTOH 7 — PEMBALIKAN DENGAN COSINUS

$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dx\,dy$. Daerah: $0 \le y \le 2$, $y^2 \le x \le 4$, yaitu $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{x}$.
Balik: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^4 = \frac{\sin 16}{4} \approx -0{,}072$.

4. Sifat tambahan

- Jika $D = D_1 \cup D_2$ dan D_1, D_2 tidak tumpang tindih kecuali di batas: $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$.
- $m\,A(D) \le \iint_D f\,dA \le M\,A(D)$ bila $m \le f \le M$.
- Nilai rata-rata: $f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(D)}\iint_D f\,dA$.

CONTOH 8 — TAKSIRAN

$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dA$ untuk D cakram $x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$ (luas $\frac{\pi}{4}$). Pada D: $0 \le \sin(x^2+y^2) \le \sin\frac{1}{4} \approx 0{,}247$. Maka $0 \le \iint \le 0{,}247 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 0{,}194$.

5. Kesalahan umum

- Batas luar yang memuat peubah. Batas luar harus konstanta.
- Tidak menggambar daerah, sehingga batas tertukar.
- Pada pembalikan urutan, lupa bahwa batas lama menjadi batas yang berbeda: gambar dulu.
- Salah tanda ketika kurva atas dan bawah tertukar (hasil luas negatif).

6. Ringkasan

- Tipe I: $a \le x \le b$, $g_1 \le y \le g_2$. Tipe II: $c \le y \le d$, $h_1 \le x \le h_2$.
- Gambar daerah, tulis batas, hitung dari dalam ke luar.

- Membalik urutan dapat menghindari antiturunan yang tak elementer.

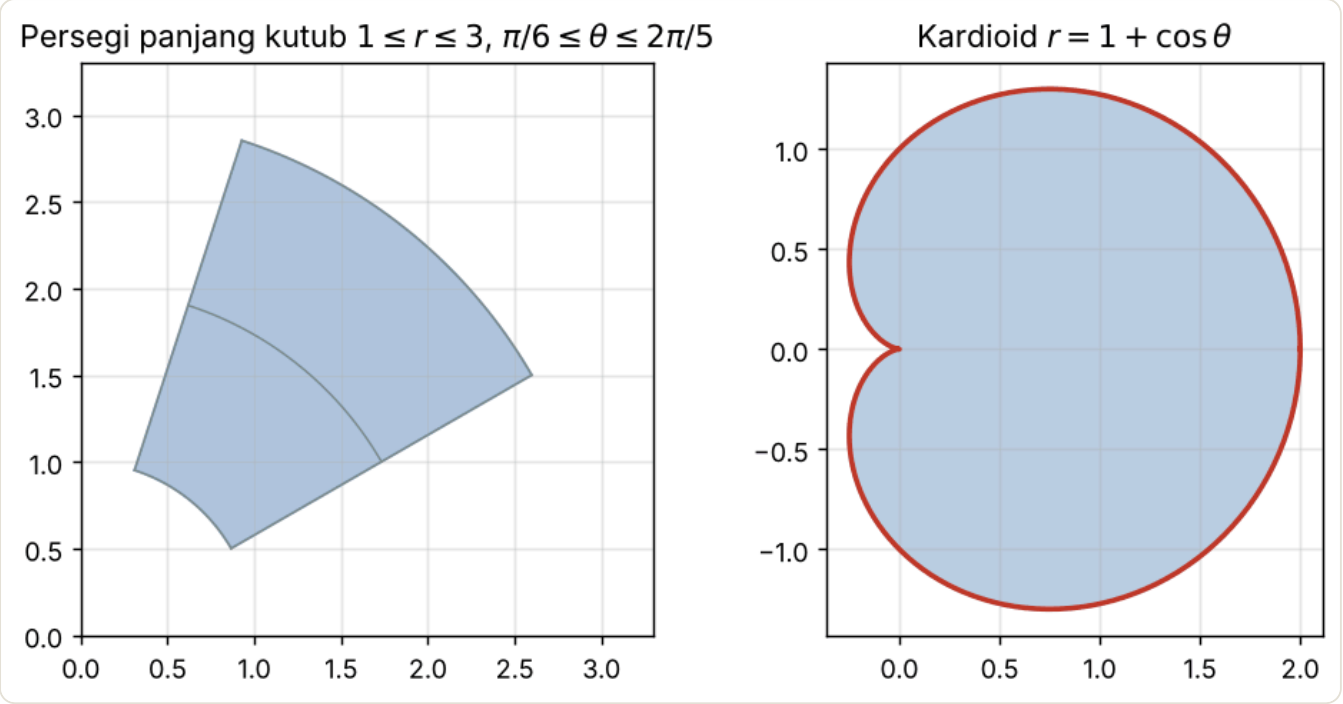
Berikutnya 15.4: koordinat kutub.

15.4 Integral Ganda Dua dalam Koordinat Kutub

Bila daerah berupa lingkaran, cincin, atau juring, atau bila integran memuat $x^2 + y^2$, koordinat kutub jauh lebih cocok daripada koordinat Kartesius.

1. Persegi panjang kutub

Dalam koordinat kutub, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. **Persegi panjang kutub** adalah $R = \{(r,\theta) : a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ (dengan $0 \le a < b$, $\beta - \alpha \le 2\pi$).



Kiri: persegi panjang kutub. Kanan: daerah di dalam kardioid.

Mengapa muncul faktor r. Bagi R menjadi persegi panjang kutub kecil R_{ij} dengan lebar Δr dan sudut $\Delta\theta$. Luas sektor cincin $= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$ dengan r_i^* rata-rata jari-jari. Jadi $\Delta A_{ij} = r_i^*\Delta r\Delta\theta$: luas elemen lebih besar bila lebih jauh dari titik asal.

PERUBAHAN KE KOORDINAT KUTUB

Jika f kontinu pada persegi panjang kutub R: $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta.$$

Bentuk $dA = r\,dr\,d\theta$. Jangan lupa faktor r.

CONTOH 1 — PARABOLOID

Volume di bawah $z = 4 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang xy: daerah $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA DAN KERUCUT

Belahan bola atas $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (jari-jari 3): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{9 - r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = 18\pi$ (sesuai $\frac{2}{3}\pi \cdot 27$). Padatan di bawah kerucut $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang xy: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3 - r) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 9\pi$, sesuai rumus kerucut $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3$.

CONTOH 3 — INTEGRAN DENGAN $X^2 + Y^2$

$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, D cakram satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2}(e - 1) = \pi(e - 1) \approx 5{,}398$. Di Kartesius integral ini tak dapat dihitung secara elementer.

2. Daerah kutub umum

DAERAH Θ-SEDERHANA

Jika $D = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$, maka

$$\iint_D f\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

Dengan $f = 1$: $A(D) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[h_2^2 - h_1^2\right] d\theta$.

CONTOH 4 — LUAS KARDIOID

$r = 1 + \cos\theta$: $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}$.

CONTOH 5 — LINGKARAN YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

$\iint_D x\,dA$ dengan $D:\ x^2 + y^2 \le 2x$, yaitu $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. Dalam kutub: $r^2 \le 2r\cos\theta \Rightarrow r \le 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi$. Cek: $\iint x\,dA = \bar{x}\cdot A = 1\cdot\pi$ (pusat massa di $x=1$, luas π).

CONTOH 6 — CINCIN

$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ untuk $1 \le x^2 + y^2 \le 9$: $\int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1}{r}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$.

3. Integral Gauss

CONTOH 7 — $\int_{-\infty}^{\infty} E^{-X^2}\,DX = \sqrt{\Pi}$

Misalkan $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Maka $I^2 = \iint e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$. Jadi $I = \sqrt{\pi}$ (karena $I > 0$). Hasil ini fondasi distribusi normal dalam statistika.

4. Kapan memakai koordinat kutub?

- Daerah: lingkaran, cakram, cincin, juring, kardioid, kurva $r = f(\theta)$.
- Integran: bergantung pada $x^2 + y^2$, atau pada $y/x = \tan\theta$.
- Hindari bila daerah berbentuk persegi atau segitiga umum.

5. Kesalahan umum

- Lupa faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.

- Lupa mengubah x, y dalam integran menjadi $r\cos\theta$, $r\sin\theta$.
- Batas θ salah untuk lingkaran yang tidak berpusat di asal (mis. $r = 2\cos\theta$ hanya memakai $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- Memakai $0 \le \theta \le \pi$ untuk lingkaran penuh. Lingkaran penuh di sekitar asal perlu 2π.

6. Ringkasan

- $dA = r\,dr\,d\theta$; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
- Daerah: $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$.
- Aplikasi: volume paraboloid/bola/kerucut, integral Gauss.

Berikutnya 15.5 Penerapan Integral Ganda Dua.

15.5 Penerapan Integral Ganda Dua

Integral ganda dua mengukur lebih dari volume. Dengan memilih integran yang tepat kita menghitung massa lamina, pusat massa, momen inersia, probabilitas, dan nilai harapan.

1. Kerapatan dan massa

Lamina (keping tipis) menempati daerah D di bidang dengan **rapat massa** (massa per satuan luas) $\rho(x,y)$ kontinu. Massa potongan kecil ΔA di (x,y) adalah $\approx \rho\,\Delta A$; menjumlahkan:

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA.$$

Hal yang sama berlaku untuk muatan listrik (kerapatan muatan σ): $Q = \iint_D \sigma\,dA$.

2. Momen dan pusat massa

MOMEN DAN PUSAT MASSA

Momen terhadap sumbu x dan y:

$$M_x = \iint_D y\,\rho\,dA, \qquad M_y = \iint_D x\,\rho\,dA.$$

Pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Bila ρ konstan, pusat massa disebut **sentroid** dan hanya bergantung pada bentuk D.

CONTOH 1 — SEGITIGA DENGAN KERAPATAN $X+Y$

Lamina segitiga $D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$, $\rho = x+y$. $m = \int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. $M_y = \iint x(x+y)\,dA = \frac{1}{8}$, $M_x = \frac{1}{8}$ (simetri antara x dan y). Pusat massa: $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{1/8}{1/3} = \dfrac{3}{8}$. Bandingkan sentroid segitiga $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: massa lebih terkonsentrasi menjauhi asal karena ρ naik ke arah itu.

CONTOH 2 — SETENGAH CAKRAM

Sentroid setengah cakram $D:\ x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0$ ($\rho=1$): $A=\frac{\pi a^2}{2}$; $\bar{x}=0$ (simetri).
$M_x=\iint y\,dA=\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{a^3}{3}\cdot 2=\frac{2a^3}{3}$. $\bar{y}=\dfrac{2a^3/3}{\pi a^2/2}=\dfrac{4a}{3\pi}\approx 0{,}424a$.

3. Momen inersia

Momen inersia mengukur kesulitan memutar benda. Partikel bermassa m pada jarak d dari sumbu mempunyai momen inersia md^2. Untuk lamina:

$$I_x=\iint_D y^2\rho\,dA,\qquad I_y=\iint_D x^2\rho\,dA,\qquad I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho\,dA=I_x+I_y.$$

I_0 adalah *momen inersia polar* terhadap titik asal. **Jari-jari girasi** R terhadap sumbu: $mR^2=I$, jadi $R=\sqrt{I/m}$.

CONTOH 3 — CAKRAM HOMOGEN

Cakram $x^2+y^2\le a^2$, ρ konstan, massa $m=\rho\pi a^2$. $I_0=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{1}{2}ma^2$. Karena simetri, $I_x=I_y=\frac{1}{4}ma^2$. Jari-jari girasi terhadap sumbu x: $R=\frac{a}{2}$.

CONTOH 4 — MOMEN INERSIA SEGITIGA CONTOH 1

Untuk lamina Contoh 1: $I_x=\iint y^2(x+y)\,dA=\frac{1}{15}$, $I_y=\frac{1}{15}$ (simetri), $I_0=\frac{2}{15}$. Jari-jari girasi $R_x=\sqrt{I_x/m}=\sqrt{\frac{1/15}{1/3}}=\sqrt{\frac{1}{5}}\approx 0{,}447$.

4. Probabilitas

Dua peubah acak kontinu X,Y mempunyai **fungsi kerapatan gabungan** $f(x,y)\ge 0$ dengan $\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dA=1$. Peluang titik (X,Y) jatuh di D:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)\,dA.$$

Nilai harapan: $\mu_1=E[X]=\iint x f\,dA$, $\mu_2=E[Y]=\iint y f\,dA$.

CONTOH 5 — KERAPATAN POLINOMIAL

$f(x,y) = x + y$ pada $[0,1]^2$ (nol di tempat lain). Cek: $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1$. $P(X+Y \le 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{3}$. $E[X] = \iint x(x+y)\,dA = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$ (sama untuk Y).

CONTOH 6 — KERAPATAN EKSPONENSIAL

$f(x,y) = 2e^{-x-2y}$ untuk $x, y \ge 0$. Cek: $\int_0^\infty e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty 2e^{-2y}dy = 1 \cdot 1$. Karena f terpisah, X dan Y bebas. $P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty 2e^{-x-2y}dx\,dy = \int_0^\infty 2e^{-3y}dy = \frac{2}{3}$. $E[X] = 1$, $E[Y] = \frac{1}{2}$.

5. Muatan dan nilai rata-rata

CONTOH 7 — MUATAN TOTAL

Muatan terdistribusi pada cakram $x^2 + y^2 \le 1$ dengan kerapatan $\sigma = \sqrt{x^2+y^2}$ C/m². $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$ C.

CONTOH 8 — SUHU RATA-RATA

Suhu $T = 100 - x^2 - y^2$ pada cakram $x^2 + y^2 \le 4$. $\iint T\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (100 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi(200 - 4) = 392\pi$. Luas 4π. Suhu rata-rata $= \dfrac{392\pi}{4\pi} = 98$.

6. Kesalahan umum

- Lupa membagi momen dengan massa saat mencari $\bar{x}, \bar{y}$.
- Menyamakan sentroid dan pusat massa saat ρ tidak konstan.
- Menulis $I_x = \iint x^2 \rho\,dA$: momen terhadap sumbu x memakai y^2.
- Kerapatan peluang yang tidak berintegral 1.

7. Ringkasan

- $m = \iint \rho\,dA$; $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.
- $I_x = \iint y^2\rho$, $I_y = \iint x^2\rho$, $I_0 = I_x + I_y$.

- Peluang $= \iint_D f\, dA$; $E[X] = \iint x f\, dA$.

Berikutnya 15.6 Luas Permukaan.

15.6 Luas Permukaan

Kita sudah dapat menghitung panjang kurva (10.2, 13.3) dan volume padatan (15.2). Sekarang giliran luas sebuah permukaan lengkung S di ruang.

1. Permukaan sebagai grafik $z = f(x, y)$

Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu pada D. Bagi D menjadi persegi panjang kecil R_{ij} berluas $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Di atas R_{ij}, permukaan kira-kira berupa jajargenjang bagian dari bidang singgung (14.4). Jajargenjang itu dibentangkan oleh vektor

$$\mathbf{a} = \langle \Delta x,\, 0,\, f_x \Delta x \rangle, \qquad \mathbf{b} = \langle 0,\, \Delta y,\, f_y \Delta y \rangle.$$

Luasnya $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Hitung $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Delta x \Delta y \, \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$, sehingga

$$\Delta S_{ij} \approx \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\; \Delta A.$$

Menjumlahkan dan mengambil limit memberi:

LUAS PERMUKAAN GRAFIK

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA.$$

(Ini analog dari $L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ untuk kurva.)

FAKTOR KEMIRINGAN

$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \dfrac{1}{\cos \gamma}$, dengan γ sudut antara bidang singgung dan bidang xy (sudut antara $\langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ dan $\mathbf{k}$). Permukaan yang lebih miring mempunyai luas lebih besar daripada proyeksinya. Bila bidang datar, faktor sama dengan 1.

2. Contoh

CONTOH 1 — BIDANG

Bagian bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas persegi $[0,1]^2$: $f_x = -1$, $f_y = -2$, faktor $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Luas $= \sqrt{6} \cdot 1 \approx 2{,}449$. (Konstan karena kemiringan konstan.)

CONTOH 2 — PARABOLOID

Luas bagian paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 9$. Proyeksinya cakram $x^2 + y^2 \le 9$. $f_x = 2x$, $f_y = 2y$: $\sqrt{1 + 4r^2}$. Dengan kutub: $A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117{,}3$.

CONTOH 3 — BELAHAN BOLA

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$: $f_x = -\dfrac{x}{z}$, $f_y = -\dfrac{y}{z}$, $1 + f_x^2 + f_y^2 = \dfrac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2} = \dfrac{a^2}{z^2}$. Faktor $= \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^a \dfrac{a\, r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a = 2\pi a^2$. Seluruh bola: $4\pi a^2$. (Integralnya takwajar di $r = a$ tetapi konvergen.)

CONTOH 4 — KERUCUT

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ untuk $0 \le z \le h$: $f_x = \frac{x}{r}$, $f_y = \frac{y}{r}$, faktor $\sqrt{2}$. $A = \sqrt{2} \cdot \pi h^2$. Untuk $h = 3$: $9\sqrt{2}\pi \approx 39{,}99$. Cek: luas selimut kerucut $\pi r s$ dengan $r = h$, $s = h\sqrt{2}$: $\sqrt{2}\pi h^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PELANA DI ATAS CAKRAM

$z = xy$ di atas $x^2 + y^2 \le 1$: $\sqrt{1 + y^2 + x^2}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 3{,}829$ (cakram datar luas $\pi \approx 3{,}142$).

CONTOH 6 — INTEGRAL KARTESIUS

$z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ di atas $[0,1]^2$: $f_x = \sqrt{x}$, $f_y = \sqrt{y}$. $A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\left[(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\right] dx = \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right) \approx 1{,}4066$.

3. Permukaan parametrik

Bila permukaan diberikan oleh $\mathbf{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$, $(u,v) \in D$, vektor $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v$ menyinggung permukaan, dan

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA.$$

Grafik $z = f(x,y)$ adalah kasus khusus $\mathbf{r} = \langle x, y, f(x,y)\rangle$, $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$.

CONTOH 7 — BOLA LEWAT PARAMETRISASI

Bola jari-jari a: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $\mathbf{r}_\phi = \langle a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi\rangle$, $\mathbf{r}_\theta = \langle -a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0\rangle$. $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2\sin\phi\,\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\rangle$, panjang $a^2\sin\phi$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$. Faktor $a^2\sin\phi$ ini akan muncul lagi di koordinat bola (15.9).

CONTOH 8 — SILINDER

Silinder $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le h$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$. $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, 0\rangle$, panjang a. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} a\, dz\, d\theta = 2\pi a h$, yaitu keliling kali tinggi.

CONTOH 9 — PARABOLOID KEDUA

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ untuk $x^2 + y^2 \le 3$: faktor $\sqrt{1+r^2}$. $A = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{14\pi}{3} \approx 14{,}66$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $\iint_D z\, dA$ atau luas D sebagai luas permukaan. Luas D hanya luas proyeksi.
- Lupa faktor r ketika berpindah ke kutub setelah membentuk $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.
- Menggunakan rumus grafik pada permukaan yang tidak berupa grafik terhadap D yang dipilih (mis. bola penuh): gunakan parametrisasi.

5. Ringkasan

- Grafik: $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA$.

- Parametrik: $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$.
- Pengujian: bola $4\pi a^2$, silinder $2\pi a h$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 15.7 Integral Rangkap Tiga.

15.7 Integral Rangkap Tiga

Bila integran bergantung pada tiga peubah dan daerahnya berupa padatan di ruang, kita memakai integral rangkap tiga. Gagasannya sama dengan integral ganda dua, dengan satu dimensi tambahan.

1. Integral rangkap tiga atas balok

Untuk balok $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, bagi menjadi lmn balok kecil B_{ijk} dengan volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Pilih titik contoh dan jumlahkan:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V.$$

Bila f kontinu, limit ada. Teorema Fubini berlaku: integral rangkap tiga sama dengan integral berulang dalam urutan apa pun (enam kemungkinan urutan).

CONTOH 1 — BALOK

$\iiint_B xyz^2\,dV$, $B = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$. Karena integran terpisah: $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-1}^{2} y\,dy \cdot \int_0^3 z^2 dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{4} = 6{,}75$.

2. Padatan umum

Untuk padatan terbatas E, integral $\iiint_E f\,dV$ didefinisikan dengan memperluas f menjadi nol di luar E. Kita menghitungnya sebagai berikut. Pandang E sebagai padatan yang terletak antara dua permukaan di atas daerah D di bidang xy.

PADATAN TIPE 1 (ANTARA DUA GRAFIK $Z = U_1(X,Y)$ DAN $Z = U_2(X,Y)$)

$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$. Maka

$$\iiint_E f\,dV = \iint_D \Big[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dA.$$

Bila D tipe I: $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, maka

$$\iiint_E f\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f\,dz\,dy\,dx.$$

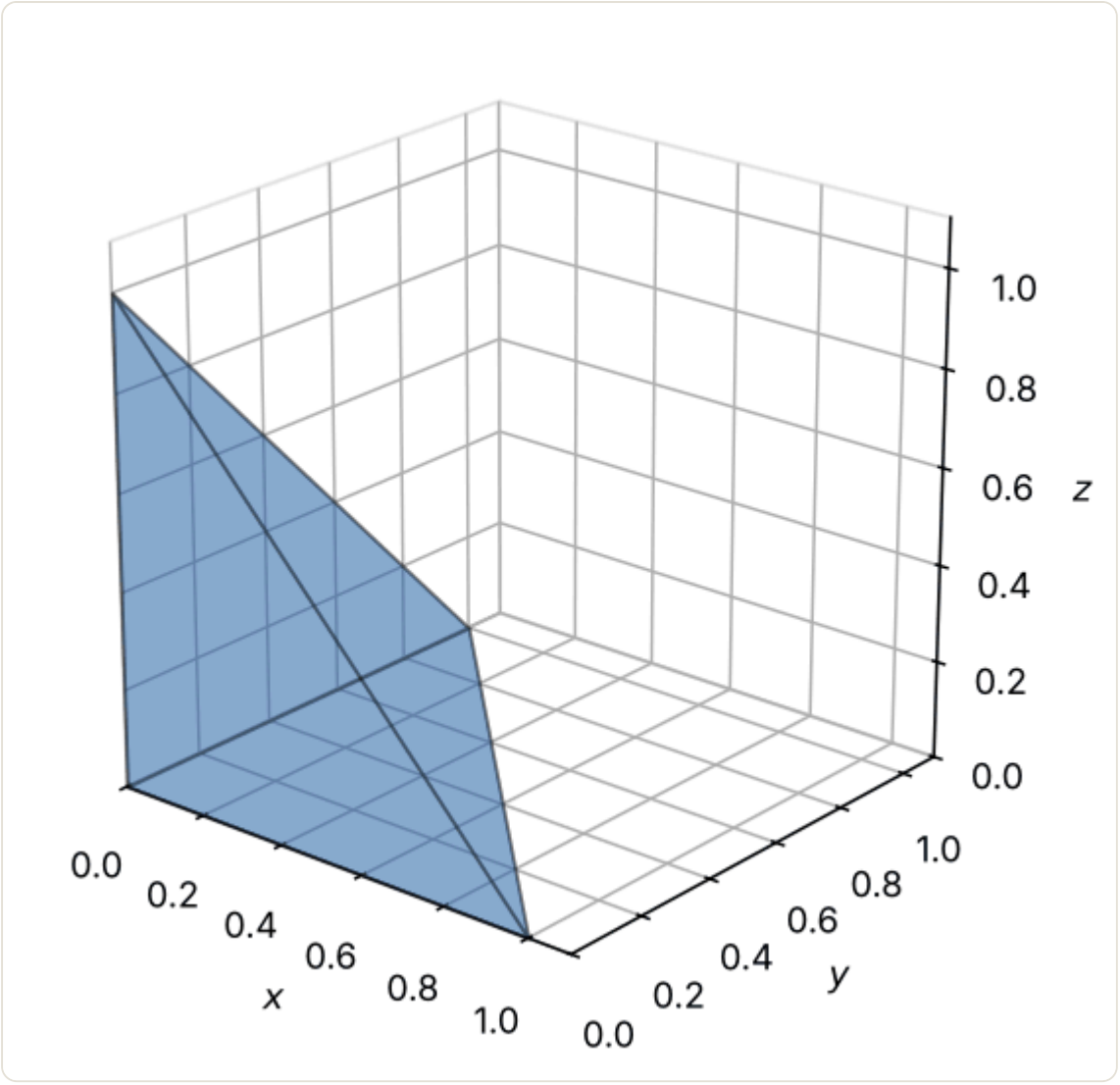
Padatan tipe 2 dan tipe 3 didefinisikan serupa dengan D di bidang yz atau xz (batas dalam berupa x atau y).

STRATEGI

1. Gambar E dan proyeksinya D pada bidang koordinat.
2. Tentukan permukaan bawah dan atas (batas integral dalam).
3. Tentukan batas D (dua integral luar).
4. Hitung dari dalam ke luar.

CONTOH 2 — TETRAHEDRON

E: padatan di oktan pertama di bawah bidang $x + y + z = 1$. D: segitiga $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$; $0 \le z \le 1 - x - y$. Volume: $\iiint 1\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$. Dan $\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{24}$. Maka koordinat z sentroid $\bar{z} = \dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$ (dan sama untuk $\bar{x}, \bar{y}$ karena simetri).



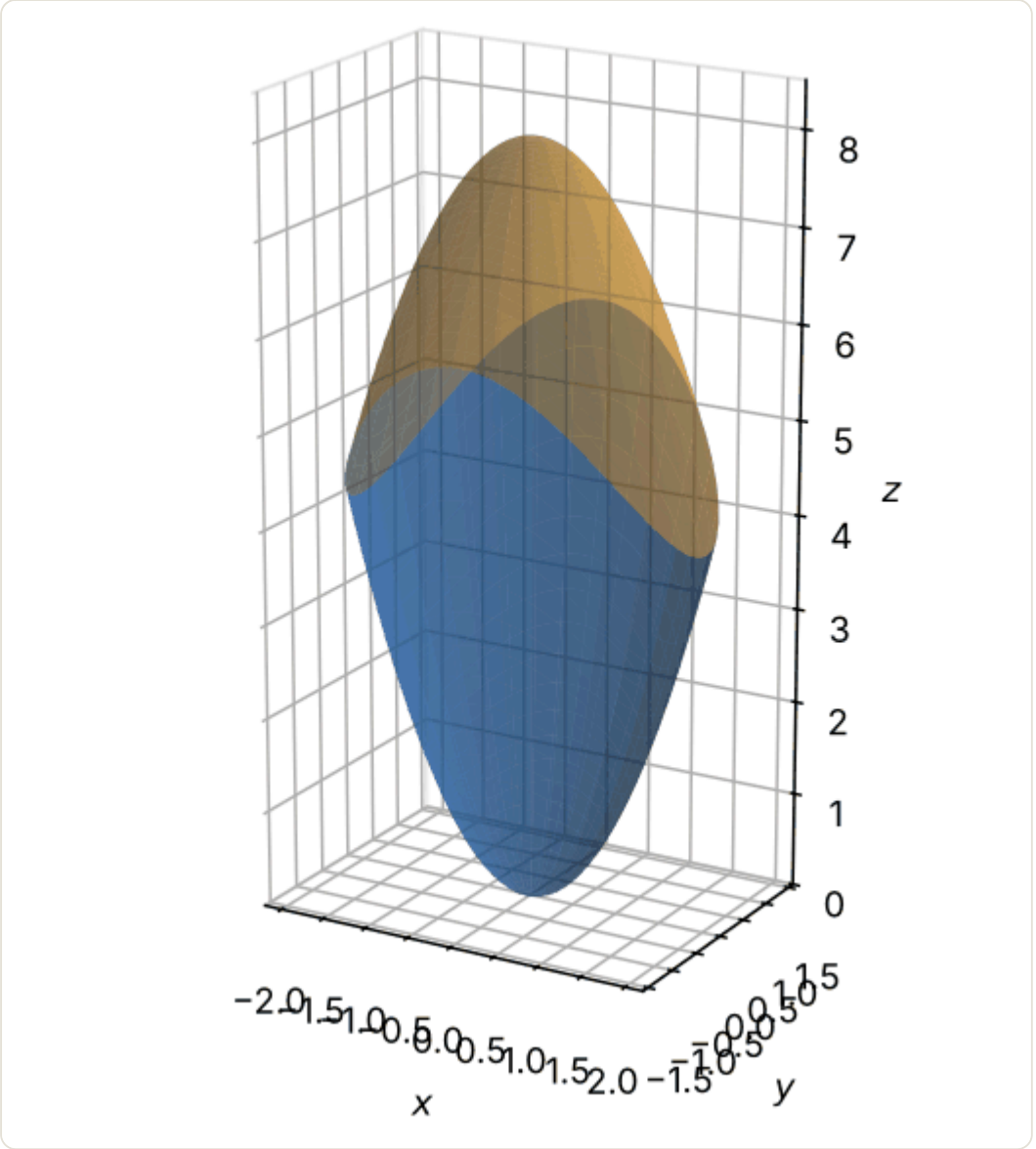
Tetrahedron dibatasi bidang koordinat dan $x + y + z = 1$.

CONTOH 3 — TETRAHEDRON LAIN

$\iiint_E 2x\,dV$, E di oktan pertama di bawah bidang $2x + 3y + z = 6$. Proyeksi: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2 - \frac{2x}{3}$; $0 \le z \le 6 - 2x - 3y$. Integral dalam: $\int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz = 2x(6 - 2x - 3y)$. Dengan $a = 6 - 2x$: $\int_0^{a/3} (a - 3y)\,dy = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$. Sisa: $\int_0^3 2x \dfrac{(6-2x)^2}{6} dx = \frac{4}{3}\int_0^3 x(3-x)^2 dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{27}{4} = 9$.

CONTOH 4 — ANTARA DUA PARABOLOID

Volume padatan yang dibatasi $z = x^2 + 3y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas). Perpotongan: $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, elips D. $V = \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dA$. Substitusi $x = 2r\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\,r\sin\theta$ (elips menjadi $r \le 1$), Jacobian $2\sqrt{2}\,r$ (15.10): $8 - 2x^2 - 4y^2 = 8 - 8r^2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 8(1 - r^2)\,2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = 16\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = 8\sqrt{2}\,\pi \approx 35{,}54$.



Padatan di antara $z = x^2 + 3y^2$ (biru) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (oranye).

CONTOH 5 — MENGUBAH URUTAN

Padatan di bawah $z = 1 - y$ dan di atas bidang xy, $0 \le x \le 2, y \ge 0$. $V = \int_0^2 \int_0^1 (1 - y)\, dy\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Sebagai padatan tipe 3 (proyeksi pada bidang yz): segitiga $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1 - y$, dan x dari 0 sampai 2: $\int_0^1 \int_0^{1-y} 2\, dz\, dy = 1$.

3. Penerapan

RUMUS

Volume $V(E) = \iiint_E 1\,dV$. Nilai rata-rata $f_{\text{rata}} = \frac{1}{V(E)}\iiint_E f\,dV$. Bila padatan mempunyai kerapatan $\rho(x,y,z)$:

$$m = \iiint_E \rho\,dV, \quad M_{yz} = \iiint x\rho\,dV,\ M_{xz} = \iiint y\rho\,dV,\ M_{xy} = \iiint z\rho\,dV,$$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right), \qquad I_x = \iiint (y^2+z^2)\rho\,dV,\ I_y = \iiint (x^2+z^2)$$

CONTOH 6 — MASSA DENGAN KERAPATAN VARIABEL

Kubus $[0,1]^3$ dengan $\rho = x+y+z$: $m = 3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy\,dz = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (karena $\iiint x = \frac{1}{2}$, sama untuk y, z). $M_{yz} = \iiint x(x+y+z)\,dV = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$. $\bar{x} = \dfrac{5/6}{3/2} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$; sama untuk $\bar{y}, \bar{z}$. Pusat massa bergeser ke arah sudut $(1,1,1)$, di mana kerapatan terbesar.

CONTOH 7 — NILAI RATA-RATA

Rata-rata $f = z$ pada tetrahedron Contoh 2: $\dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. Rata-rata $f = x$ pada kubus satuan: $\frac{1}{2}$.

CONTOH 8 — PELUANG TIGA PEUBAH

Kerapatan gabungan $f(x,y,z) = 6e^{-x-2y-3z}$, $x,y,z \ge 0$: $\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty 2e^{-2y}dy\int_0^\infty 3e^{-3z}dz = 1$. $P(X\le 1, Y\le 1, Z\le 1) = (1-e^{-1})(1-e^{-2})(1-e^{-3}) \approx 0{,}632\cdot 0{,}865\cdot 0{,}950 \approx 0{,}519$.

4. Kesalahan umum

- Memakai batas z yang salah karena tidak menggambar padatan.
- Batas integral luar tidak konstan.
- Lupa membuat $\iiint 1\,dV$ jika yang diminta volume.
- Menyamakan $\bar{x}$ dengan M_{xz}/m: $\bar{x}$ memakai momen terhadap bidang yz, M_{yz}.

5. Ringkasan

- Integral rangkap tiga $=$ integral berulang dalam tiga integral satu peubah.
- Padatan tipe 1: $(x, y) \in D, u_1 \leq z \leq u_2$.
- Volume, massa, pusat massa, momen inersia, dan peluang adalah penerapan utama.

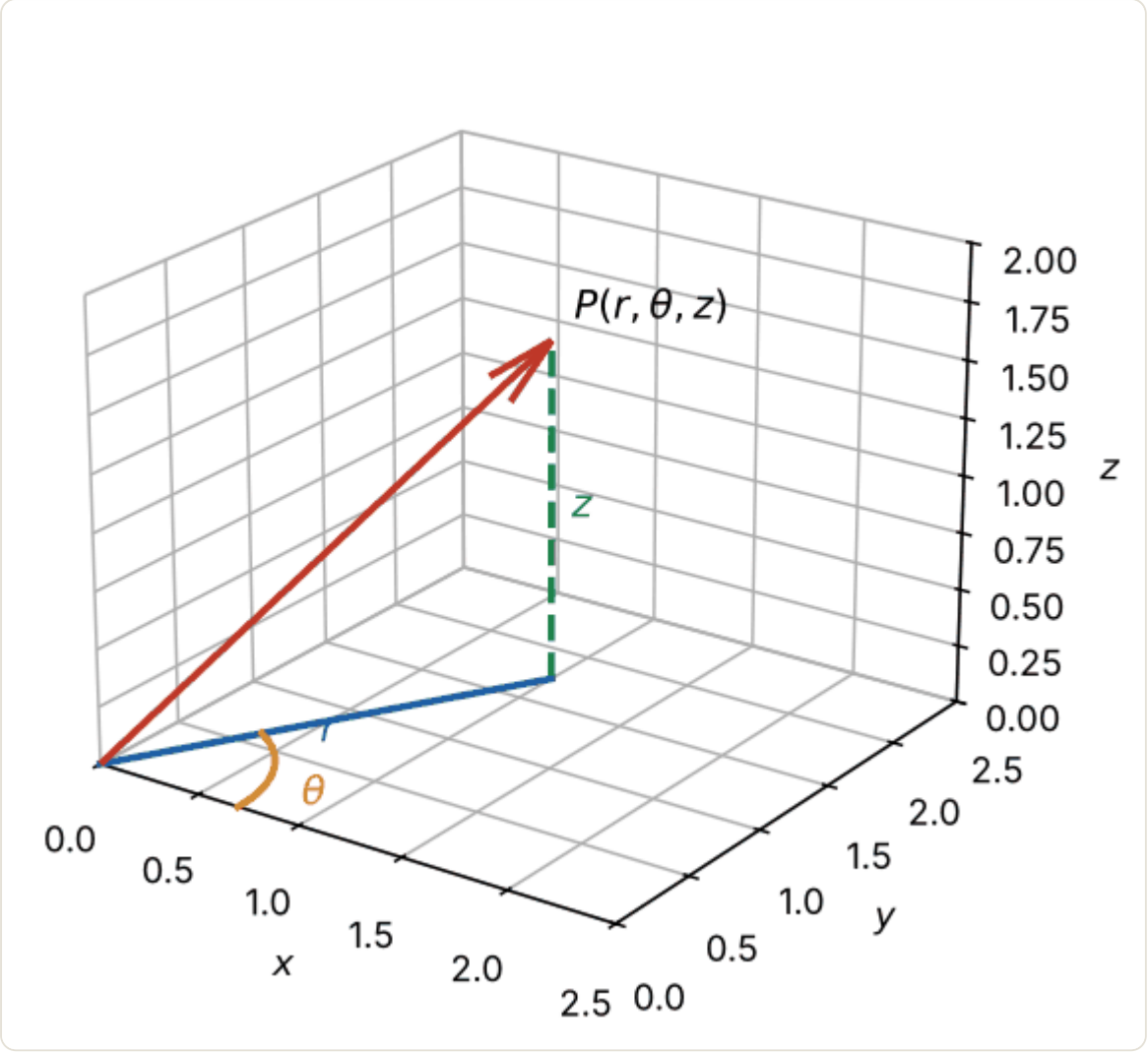
Berikutnya 15.8: koordinat tabung.

15.8 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Tabung

Seperti koordinat kutub memudahkan integral ganda atas cakram, **koordinat tabung** (silinder) memudahkan integral rangkap tiga atas padatan yang mempunyai sumbu simetri.

1. Koordinat tabung

Titik P di ruang dinyatakan oleh (r, θ, z): (r, θ) adalah koordinat kutub proyeksi P pada bidang xy, dan z adalah ketinggian.



Koordinat tabung (r, θ, z).

KONVERSI

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Permukaan sederhana: $r = c$ silinder, $\theta = c$ setengah bidang vertikal, $z = c$ bidang mendatar, $z = r$ kerucut, $z = r^2$ paraboloid.

CONTOH 1 — MENGUBAH KOORDINAT

- Titik tabung $(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$: $x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$, $y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$, $z = 1$: $(-1, \sqrt{3}, 1)$.
- Titik Kartesius $(3, -3, -7)$: $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\tan\theta = -1$ dan titik di kuadran IV, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (atau $\frac{7\pi}{4}$), $z = -7$.
- Persamaan $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ menjadi $r^2 + z^2 = 4$.

2. Integral rangkap tiga dalam koordinat tabung

Bila $E = \{(r, \theta, z) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ u_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \le z \le u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)\}$, maka

$$\iiint_E f\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1}^{u_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Elemen volume: $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$ (elemen luas kutub $r\, dr\, d\theta$ dikalikan dz).

CONTOH 2 — VOLUME DI ANTARA PARABOLOID DAN BIDANG

Padatan di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 4$: $r^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^2 (4 - r^2) r\, dr = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 3 — ANTARA DUA PARABOLOID PUTAR

Padatan antara $z = r^2$ dan $z = 8 - r^2$: perpotongan $r^2 = 8 - r^2 \Rightarrow r = 2$. $V = 2\pi\int_0^2 (8 - 2r^2) r\, dr = 2\pi(16 - 8) = 16\pi \approx 50{,}27$.

CONTOH 4 — INTEGRAN DENGAN $\sqrt{X^2+Y^2}$

$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, E di dalam silinder $x^2+y^2=9$, antara $z=-2$ dan $z=5$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^5 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 9\cdot 7 = 126\pi \approx 395{,}8$.

CONTOH 5 — MOMEN INERSIA SILINDER

Silinder padat jari-jari a, tinggi h, kerapatan konstan ρ, sumbu = sumbu z. $I_z = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \rho\cdot 2\pi\cdot h\cdot \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2 h)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$.

CONTOH 6 — DI DALAM BOLA DAN DI ATAS KERUCUT

Padatan E di dalam bola $x^2+y^2+z^2\le 4$ dan di atas kerucut $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$. Dalam tabung: $r\le z\le\sqrt{4-r^2}$, dan $r\le\sqrt{4-r^2}\Rightarrow r\le\sqrt{2}$. $V = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)r\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\approx 4{,}907$.
(Bentuk "kerucut es krim"; ulangi dengan koordinat bola di 15.9.)

CONTOH 7 — PUSAT MASSA KERUCUT

Kerucut padat $r\le z\le h$, kerapatan konstan. Volume: $\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_r^h r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^h(h-r)r\,dr = 2\pi\frac{h^3}{6} = \frac{\pi h^3}{3}$. $\iiint z\,dV = 2\pi\int_0^h\int_r^h zr\,dz\,dr = 2\pi\int_0^h\frac{h^2-r^2}{2}r\,dr = 2\pi\cdot\frac{h^4}{8} = \frac{\pi h^4}{4}$. $\bar{z} = \dfrac{\pi h^4/4}{\pi h^3/3} = \dfrac{3h}{4}$, diukur dari titik puncak (yaitu $\frac{h}{4}$ dari alas).

3. Kapan memakai koordinat tabung?

- Padatan: silinder, paraboloid putar, kerucut berporos sumbu z, padatan yang proyeksinya pada bidang xy adalah cakram atau cincin.
- Integran memuat x^2+y^2.
- Bila sumbu simetri adalah sumbu lain, tukar peran peubah (mis. $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ dan x sebagai tinggi).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor r.

- Salah menentukan batas r dari proyeksi: batas r harus dari proyeksi padatan pada bidang xy, bukan dari satu permukaan saja.
- Lupa mengubah $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$, atau $x^2 + y^2 + z^2$ menjadi $r^2 + z^2$.

5. Ringkasan

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.
- Cocok untuk padatan yang berporos pada satu sumbu.
- Penerapan: volume, massa, pusat massa, momen inersia.

Berikutnya 15.9 Koordinat Bola.

15.9 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Bola

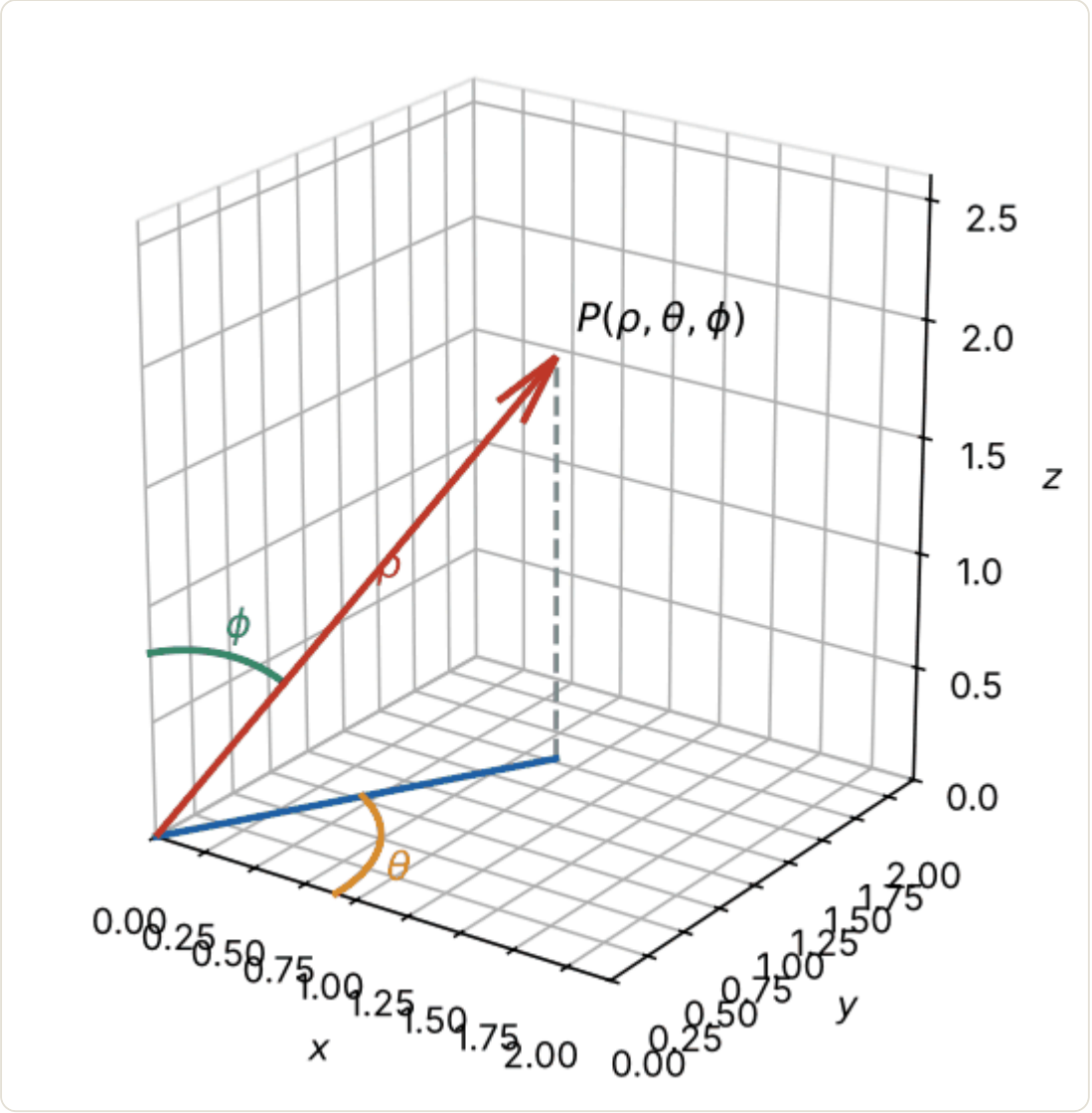
Untuk padatan yang simetris terhadap sebuah titik (bola, kerucut berpusat di titik asal, bagian bola), **koordinat bola** adalah pilihan terbaik.

1. Koordinat bola

DEFINISI

Titik P dinyatakan oleh (ρ, θ, ϕ):

- $\rho = |OP| \geq 0$: jarak dari titik asal,
- θ: sudut azimut, sama seperti pada koordinat tabung (diukur dari sumbu x positif di bidang xy),
- $\phi \in [0, \pi]$: sudut antara sumbu z positif dan ruas garis OP.



Koordinat bola (ρ, θ, ϕ).

KONVERSI

Dari segitiga siku-siku OPQ dengan Q proyeksi P di bidang xy: $|OQ| = r = \rho \sin\phi$ dan $z = \rho\cos\phi$. Maka

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Permukaan: $\rho = c$ bola berpusat di asal; $\theta = c$ setengah bidang vertikal; $\phi = c$ kerucut (setengah kerucut) dengan puncak di asal; $\phi = \frac{\pi}{2}$ bidang xy.

CONTOH 1 — KONVERSI TITIK

- $(\rho, \theta, \phi) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.
- Titik $(0, 2, -2)$: $\rho = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$, $\cos\phi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

CONTOH 2 — PERSAMAAN PERMUKAAN

- $z = \sqrt{x^2+y^2}$: $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ (kerucut).
- $x^2+y^2+z^2 = 2z$: $\rho^2 = 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho = 2\cos\phi$, bola $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.
- $x^2+y^2 = 1$: $\rho\sin\phi = 1$, silinder (kurang cocok di koordinat bola).

2. Elemen volume

Potongan kecil padatan dibatasi ρ sampai $\rho+\Delta\rho$, ϕ sampai $\phi+\Delta\phi$, θ sampai $\theta+\Delta\theta$. Ia hampir berupa balok dengan rusuk: $\Delta\rho$ (arah radial), $\rho\Delta\phi$ (busur lingkaran besar), dan $\rho\sin\phi\,\Delta\theta$ (busur sejajar bidang xy, jari-jari $\rho\sin\phi$). Volume $\approx \rho^2\sin\phi\,\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$.

INTEGRAL RANGKAP TIGA DALAM KOORDINAT BOLA

$$\iiint_E f\,dV = \int_\alpha^\beta \int_c^d \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

untuk $E = \{a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ c \le \phi \le d\}$ ("baji bola"). $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.

3. Contoh

CONTOH 3 — VOLUME BOLA

$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

CONTOH 4 — EKSPONENSIAL

$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, B bola satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}(e-1) = \frac{4\pi}{3}(e-1) \approx 7{,}198$.

CONTOH 5 — KERUCUT ES KRIM

Padatan di dalam bola $\rho \le 2$ dan di atas kerucut $\phi = \frac{\pi}{4}$ (yaitu $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}) \approx 4{,}907$. Sama dengan hasil 15.8 Contoh 6, tetapi jauh lebih singkat. Rumus umum untuk bola jari-jari a dengan sudut setengah puncak ϕ_0: $V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$.

CONTOH 6 — ANTARA DUA BOLA

Padatan $1 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$: $V = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{8-1}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}33$.

CONTOH 7 — BELAHAN BOLA

$\iiint_H z \, dV$, H belahan bola atas jari-jari a: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}$. Volume $H = \frac{2}{3}\pi a^3$. Maka $\bar{z} = \dfrac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3} = \dfrac{3a}{8}$: pusat massa belahan bola homogen berada di $\frac{3}{8}a$ di atas pusatnya.

CONTOH 8 — MOMEN INERSIA BOLA

Bola padat homogen (kerapatan ρ_0, massa $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$): $I_z = \rho_0 \iiint (x^2 + y^2)\, dV = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi\rho_0 a^5}{15} = \frac{2}{5}ma^2$. (Gunakan $\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi = \frac{4}{3}$.)

CONTOH 9 — JARAK RATA-RATA DARI PUSAT

Jarak rata-rata titik di dalam bola jari-jari a dari pusatnya: $\dfrac{\iiint \rho \, dV}{V} = \dfrac{4\pi \cdot a^4/4}{4\pi a^3/3} = \frac{3}{4}a$ (lebih besar dari $\frac{a}{2}$ karena volume lebih banyak di dekat permukaan).

CONTOH 10 — BOLA YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

Bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ berpersamaan $\rho \le 2\cos\phi, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Volume $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos\phi)^3}{3} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4\pi}{3}$. Benar untuk bola jari-jari 1.

4. Memilih koordinat

Bentuk padatan / integran	Koordinat
Persegi panjang, tetrahedron, bidang	Kartesius
Silinder, paraboloid putar, memuat $x^2 + y^2$	Tabung
Bola, kerucut berpuncak di asal, memuat $x^2 + y^2 + z^2$	Bola

5. Kesalahan umum

- Memakai ϕ untuk sudut di bidang xy dan θ untuk sudut dari sumbu z (tertukar dengan konvensi di sini).
- Lupa faktor $\rho^2 \sin\phi$ (bukan hanya ρ^2).
- ϕ berada pada $[0, \pi]$, bukan $[0, 2\pi]$.
- Lupa mengubah $z = \rho\cos\phi$ pada integran.

6. Ringkasan

- $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$.
- $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.
- Cocok untuk bola dan kerucut berpusat di titik asal.

Berikutnya 15.10: perubahan peubah secara umum.

15.10 Perubahan Peubah dalam Integral Ganda

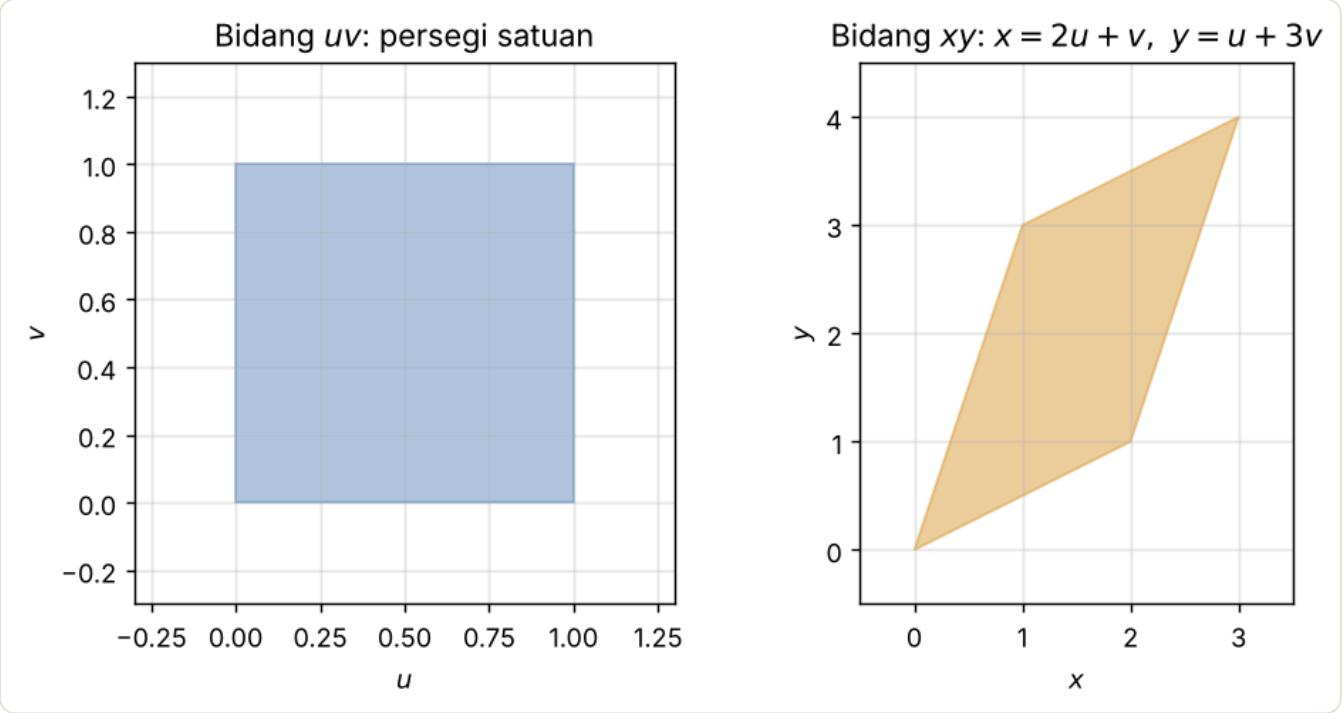
Pada integral satu peubah, substitusi $x = g(u)$ mengubah $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(g(u))\,g'(u)\,du$. Koordinat kutub, tabung, dan bola adalah substitusi khusus untuk integral ganda. Subbab ini memberi aturan umumnya, dengan **Jacobian** menggantikan $g'(u)$.

1. Transformasi

Transformasi T dari bidang uv ke bidang xy: $T(u,v) = (x,y)$ dengan $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$, dengan g, h mempunyai turunan parsial kontinu. Bila T satu-satu, T memetakan daerah S di bidang uv ke daerah R di bidang xy ($R = T(S)$), dan kita dapat berpindah bolak-balik.

CONTOH 1 — TRANSFORMASI LINEAR

$T:\ x = 2u + v,\ y = u + 3v$. Persegi satuan $S = [0,1]^2$ dipetakan menjadi jajargenjang dengan titik sudut $T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (2,1)$, $T(1,1) = (3,4)$, $T(0,1) = (1,3)$. Luas jajargenjang $= |\langle 2,1\rangle \times \langle 1,3\rangle| = |6 - 1| = 5$: luas S (yaitu 1) dikalikan 5.



Persegi satuan (kiri) dipetakan ke jajargenjang berluas 5 (kanan).

2. Jacobian

DETERMINAN JACOBI

Jacobian T:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Gagasan. Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ dipetakan hampir menjadi jajargenjang yang dibentangkan oleh $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$ (dengan $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$). Luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$. Jadi Jacobian adalah *faktor penskalaan luas* lokal.

CONTOH 2 — JACOBIAN BEBERAPA TRANSFORMASI

- Linear di Contoh 1: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$.
- Kutub $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.
  (Inilah asal faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.)
- $x = au, y = bv$: Jacobian ab.
- $x = u^2 - v^2, y = 2uv$: $\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2$.

3. Rumus perubahan peubah

PERUBAHAN PEUBAH (DUA PEUBAH)

Misalkan T transformasi C^1 satu-satu dengan Jacobian tak nol, memetakan S pada R. Untuk f kontinu,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Perhatikan tanda nilai mutlak.

STRATEGI

1. Pilih u, v sehingga daerah R menjadi sederhana (mis. persegi panjang) dan/atau integran menjadi sederhana.
2. Selesaikan x, y dalam u, v dan hitung $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (atau hitung $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ dan balik: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$).
3. Tentukan batas baru di bidang uv, lalu hitung.

CONTOH 3 — JAJARGENJANG

$\iint_R xy\,dA$ dengan $R = T(S)$, $S = [0,1]^2$, T pada Contoh 1. $xy = (2u+v)(u+3v) = 2u^2 + 7uv + 3v^2$. $\iint_R xy\,dA = 5\int_0^1\int_0^1 (2u^2+7uv+3v^2)\,du\,dv = 5\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{4} + 1\right) = 5 \cdot \frac{41}{12} = \frac{205}{12} \approx 17{,}08$.

CONTOH 4 — ELIPS

Daerah R : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$. Substitusi $x = au$, $y = bv$, $J = ab$; S: cakram $u^2 + v^2 \le 1$. Luas $= \iint_S ab\,du\,dv = \pi ab$. Juga $\iint_R x^2\,dA = a^3 b \iint_S u^2\,du\,dv = a^3 b \cdot \frac{\pi}{4}$. Untuk $a = 2, b = 1$: $\iint x^2\,dA = 2\pi$.

CONTOH 5 — DAERAH DI ANTARA HIPERBOLA DAN GARIS

Cari luas daerah R di kuadran pertama yang dibatasi $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$. Pilih $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$: R menjadi persegi $1 \le u \le 4, 1 \le v \le 4$. Hitung $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = 2v$. Maka $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$. Luas $= \int_1^4\int_1^4 \dfrac{1}{2v}\,dv\,du = 3 \cdot \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{3}{2}\ln 4 = 3\ln 2 \approx 2{,}079$.

CONTOH 6 — INTEGRAN YANG RUMIT

$\iint_R \exp\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dA$, R segitiga $(0,0), (1,0), (0,1)$. Misalkan $u = x + y$, $v = x - y$; maka $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$, nilai mutlak $\frac{1}{2}$. Daerah: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$ menjadi $0 \le u \le 1$, $-u \le v \le u$. $\iint = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e - e^{-1}\right)du = \dfrac{e - e^{-1}}{4} \approx 0{,}588$.

CONTOH 7 — MEMERIKSA KUTUB

$\iint_D x\,dA$ pada cakram $(x-1)^2+y^2\le 1$: geser $x=1+u, y=v$ ($J=1$): $\iint_{u^2+v^2\le 1}(1+u)\,du\,dv = \pi + 0 = \pi$, sama dengan 15.4 Contoh 5.

4. Tiga peubah

JACOBIAN TIGA PEUBAH

Untuk $T(u,v,w)=(x,y,z)$:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}, \qquad \iiint_R f\,dV = \iiint_S f\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

CONTOH 8 — KOORDINAT TABUNG DAN BOLA

- Tabung: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$: determinan $= r$ (sama dengan kutub).
- Bola: $x=\rho\sin\phi\cos\theta, y=\rho\sin\phi\sin\theta, z=\rho\cos\phi$: determinan terhadap (ρ,ϕ,θ) bernilai mutlak $\rho^2\sin\phi$, sehingga $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (15.9).

CONTOH 9 — TRANSFORMASI LINEAR TIGA DIMENSI

$x=u+v, y=v+w, z=w+u$: $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix} = 1(1-0)-1(0-1)+0 = 2$. Kubus satuan di uvw dipetakan ke jajaran genjang tiga dimensi (parallelepiped) bervolume 2.

CONTOH 10 — VOLUME ELIPSOID

Elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$: $x=au, y=bv, z=cw$, $J=abc$, S bola satuan: $V = abc\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc$.

5. Kesalahan umum

- Lupa nilai mutlak pada Jacobian (luas tak boleh negatif).
- Memakai $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ padahal yang dibutuhkan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (saling berkebalikan).

- Tidak mengubah batas daerah ke koordinat baru.
- Transformasi yang tidak satu-satu (mis. $u = x^2$ pada daerah yang memuat x positif dan negatif).

6. Ringkasan

- $dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$; $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$.
- Kutub: $J = r$; tabung: $J = r$; bola: $J = \rho^2 \sin\phi$.
- Pilih transformasi yang menyederhanakan daerah atau integran.

Bab 15 berakhir di sini. Bab berikutnya, 16.1, membahas medan vektor dan integral garis.

Bab 16: Kalkulus Vektor

16.1 Medan Vektor

Di Bab 14 setiap titik di bidang diberi sebuah *bilangan* (suhu, tinggi). Sekarang setiap titik diberi sebuah *vektor*: arah dan kecepatan angin, kuat dan arah gaya gravitasi, medan listrik. Objek seperti ini disebut **medan vektor**, dan subbab-subbab Bab 16 membangun kalkulus untuknya.

1. Definisi

MEDAN VEKTOR

Misalkan $D \subseteq \mathbb{R}^2$. **Medan vektor pada** D adalah fungsi $\mathbf{F}$ yang mengaitkan setiap titik $(x, y) \in D$ dengan vektor dua dimensi $\mathbf{F}(x, y)$:

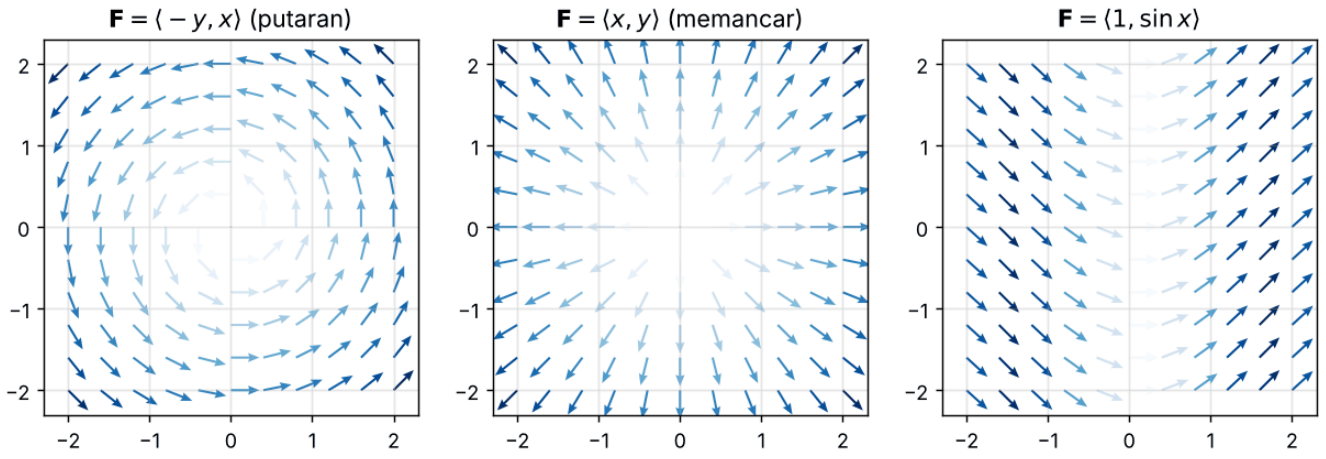
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle.$$

Di ruang, untuk $E \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z) \rangle.$$

P, Q, R disebut *fungsi komponen* (fungsi skalar). $\mathbf{F}$ kontinu atau terdiferensialkan bila semua komponennya demikian.

Cara menggambarnya: pilih beberapa titik, dan gambar panah $\mathbf{F}(x, y)$ dengan titik awal di (x, y) (tidak harus panjang sebenarnya; sering dinormalkan atau diskalakan).



Tiga medan vektor bidang: putaran, memancar, dan medan $\langle 1, \sin x \rangle$. Warna menunjukkan besar vektor.

CONTOH 1 — MEMBACA MEDAN

- $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: di $(1, 0)$ vektor $\langle 0, 1 \rangle$; di $(0, 1)$ vektor $\langle -1, 0 \rangle$; di $(-1, 0)$ vektor $\langle 0, -1 \rangle$. Vektor selalu tegak lurus $\langle x, y \rangle$ dan panjangnya $\sqrt{x^2 + y^2}$: medan putaran berlawanan arah jarum jam, makin cepat di tepi. (Kecepatan sebuah cakram yang berputar dengan kecepatan sudut 1.)
- $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: vektor posisi; menunjuk ke luar dari titik asal dengan panjang $|\mathbf{r}|$.
- $\mathbf{F} = \langle y, 0 \rangle$: aliran horizontal ke kanan di atas sumbu x, ke kiri di bawahnya, panjang bertambah dengan $|y|$: *geseran* (aliran sungai yang lajunya bervariasi dari tengah ke tepi).

CONTOH 2 — MEDAN DI RUANG

$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 0, 0, z \rangle = z\,\mathbf{k}$: vektor vertikal, ke atas di atas bidang xy, ke bawah di bawahnya, panjang $|z|$. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{\langle x, y, z \rangle}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$: medan *kuadrat terbalik*, menunjuk keluar, panjang $1/|\mathbf{r}|^2$.

2. Medan fisika

CONTOH 3 — GRAVITASI DAN LISTRIK (HUKUM KUADRAT TERBALIK)

Benda bermassa M di titik asal menarik benda bermassa m di $\mathbf{r}$ dengan gaya

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}.$$

Besarnya $\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2}$, arahnya ke titik asal. Medan listrik muatan titik Q: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Struktur matematisnya identik.

CONTOH 4 — MEDAN KECEPATAN

Fluida yang mengalir dalam pipa dengan profil $\mathbf{v}(x,y) = \langle 1 - y^2, 0\rangle$, $-1 \le y \le 1$: kecepatan maksimum 1 di tengah ($y=0$) dan nol di dinding ($y=\pm 1$). Aliran udara $\mathbf{V}(x,y,z)$ di atmosfer adalah contoh medan kecepatan tiga dimensi yang berubah terhadap waktu.

3. Medan gradien dan medan konservatif

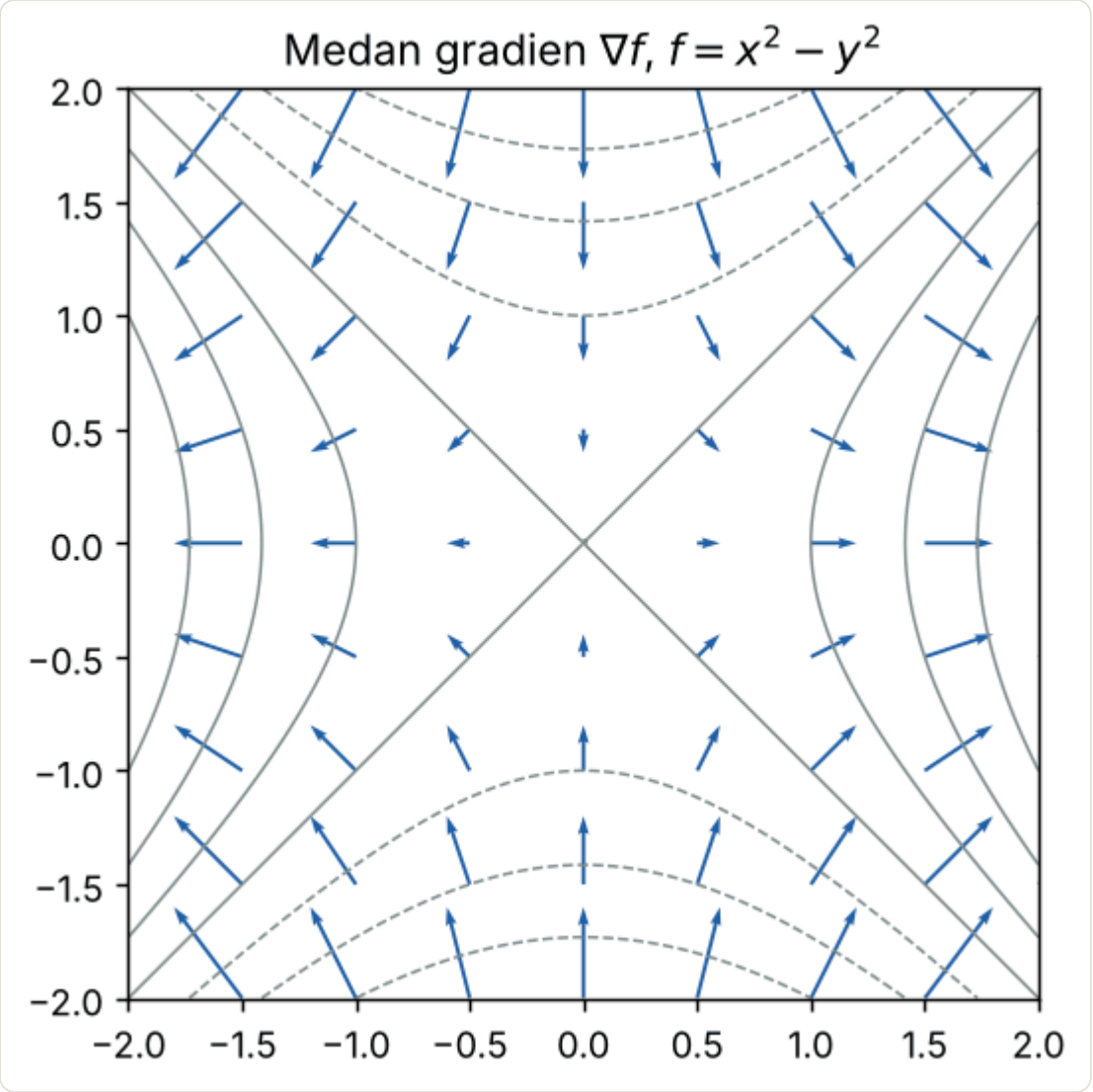
GRADIEN SEBAGAI MEDAN VEKTOR

Bila f fungsi skalar terdiferensialkan, gradiennya

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \left(\text{di ruang } \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle\right)$$

adalah medan vektor, disebut **medan gradien**. Medan $\mathbf{F}$ disebut **konservatif** bila $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu fungsi skalar f; f disebut **fungsi potensial** dari $\mathbf{F}$.

Dari 14.6, ∇f tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah f naik paling cepat. Jadi gambar medan gradien selalu "memotong tegak lurus" kontur.



$f = x^2 - y^2$: panah $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle$ tegak lurus kurva ketinggian.

CONTOH 5 — GRADIEN

$f(x, y) = x^2 y - y^3$: $\nabla f = \langle 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Di $(1, 1)$: $\langle 2, -2 \rangle$. Medan gaya $\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$ dikatakan konservatif dengan potensial f.

CONTOH 6 — POTENSIAL GRAVITASI

$f(\mathbf{r}) = \dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|}$. Maka $\nabla \dfrac{1}{|\mathbf{r}|} = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ (turunkan $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$), jadi $\nabla f = -\dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}$: medan gravitasi konservatif. Dalam fisika, energi potensial adalah $-f$.

TIDAK SEMUA MEDAN ADALAH GRADIEN

Medan putaran $\langle -y, x \rangle$ bukan gradien: bila $f_x = -y$ dan $f_y = x$ maka $f_{xy} = -1$ tetapi $f_{yx} = 1$, bertentangan dengan Clairaut (14.3). Di 16.3 kita turunkan syarat umumnya: untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif harus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

4. Garis aliran

Garis aliran (garis arus) medan $\mathbf{F}$ adalah kurva $\mathbf{r}(t)$ yang vektor singgungnya di setiap titik sama dengan $\mathbf{F}$: $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. Ini adalah lintasan partikel yang terbawa fluida.

CONTOH 7 — GARIS ALIRAN MEDAN PUTARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: $x' = -y$, $y' = x$. Maka $x'' = -y' = -x$, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = -x' = c_1 \sin t - c_2 \cos t$. Misalnya $x(0) = 1, y(0) = 0$: $x = \cos t, y = \sin t$, lingkaran satuan. Garis aliran adalah lingkaran berpusat di asal.

CONTOH 8 — GARIS ALIRAN MEDAN MEMANCAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: $x' = x,\ y' = y \Rightarrow x = ae^t,\ y = be^t$: garis lurus dari titik asal ke luar, $y = \frac{b}{a}x$.

5. Kesalahan umum

- Menyamakan medan vektor dengan medan skalar. $\mathbf{F}$ mempunyai arah di setiap titik.
- Menggambar semua panah dengan panjang sebenarnya sehingga saling menutupi: normalkan atau skalakan.
- Menganggap setiap medan adalah gradien.

6. Ringkasan

- $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ atau $\langle P, Q, R \rangle$: vektor di tiap titik.
- Contoh fisika: gravitasi, listrik, kecepatan fluida, angin.
- ∇f adalah medan gradien; $\mathbf{F} = \nabla f$ konservatif dengan potensial f.
- Garis aliran: $\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Berikutnya 16.2 Integral Garis.

16.2 Integral Garis

Integral tentu menjumlahkan sepanjang sebuah selang pada sumbu. **Integral garis** menjumlahkan sepanjang sebuah *kurva* di bidang atau ruang. Ada dua jenis, tergantung apa yang dijumlahkan: besaran skalar (massa kawat) atau komponen medan vektor searah kurva (usaha).

1. Integral garis terhadap panjang busur

Misalkan C kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $a \le t \le b$, dan f fungsi skalar kontinu. Bagi C menjadi busur kecil dengan panjang Δs_i, pilih titik contoh (x_i^*, y_i^*), dan jumlahkan $f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$.

INTEGRAL GARIS (TERHADAP S)

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Di ruang: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$. Hasilnya tidak bergantung pada parametrisasi dan arah penelusuran.

Dengan $f \equiv 1$ kita memperoleh panjang kurva $L = \int_C ds$. Bila $f \ge 0$, $\int_C f\,ds$ adalah luas "tirai" yang berdiri di atas C setinggi f.

CONTOH 1 — SETENGAH LINGKARAN

$\int_C (2 + x^2 y)\,ds$, C bagian atas lingkaran satuan: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t \rangle$, $0 \le t \le \pi$, $|\mathbf{r}'| = 1$.
$\int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\,dt = 2\pi + \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = 2\pi + \tfrac{2}{3} \approx 6{,}950$.

CONTOH 2 — MASSA KAWAT

Kawat berbentuk heliks $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$, dengan kerapatan linear $\rho = z$ (g/cm). $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$. Massa $= \int_C z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot 2\pi^2 \approx 27{,}9$ g. Panjang kawat $= 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}886$ cm.

CONTOH 3 — KURVA SEPOTONG-SEPOTONG

$\int_C x\,ds$, C terdiri dari ruas C_1 dari $(0,0)$ ke $(1,0)$ dan ruas C_2 dari $(1,0)$ ke $(1,1)$. C_1: $x=t, y=0, ds=dt$: $\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$. C_2: $x=1, y=t, ds=dt$: $\int_0^1 1\,dt=1$. Jumlah $\frac{3}{2}$. Integral garis atas kurva sepotong-sepotong adalah jumlah integral masing-masing potong.

2. Integral garis terhadap x dan y

TERHADAP X DAN Y

$$\int_C P\,dx=\int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt, \qquad \int_C Q\,dy=\int_a^b Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt,$$

dan $\int_C P\,dx+Q\,dy=\int_a^b \big[P\,x'(t)+Q\,y'(t)\big]\,dt$.

Berbeda dengan ds, integral ini **berubah tanda bila arah kurva dibalik** ($\int_{-C} P\,dx=-\int_C P\,dx$), karena Δx berganti tanda.

3. Integral garis medan vektor (usaha)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja pada partikel yang bergerak sepanjang C, usaha pada busur pendek Δs_i adalah $\approx \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\Delta s_i$, dengan $\mathbf{T}$ vektor singgung satuan.

INTEGRAL GARIS MEDAN VEKTOR

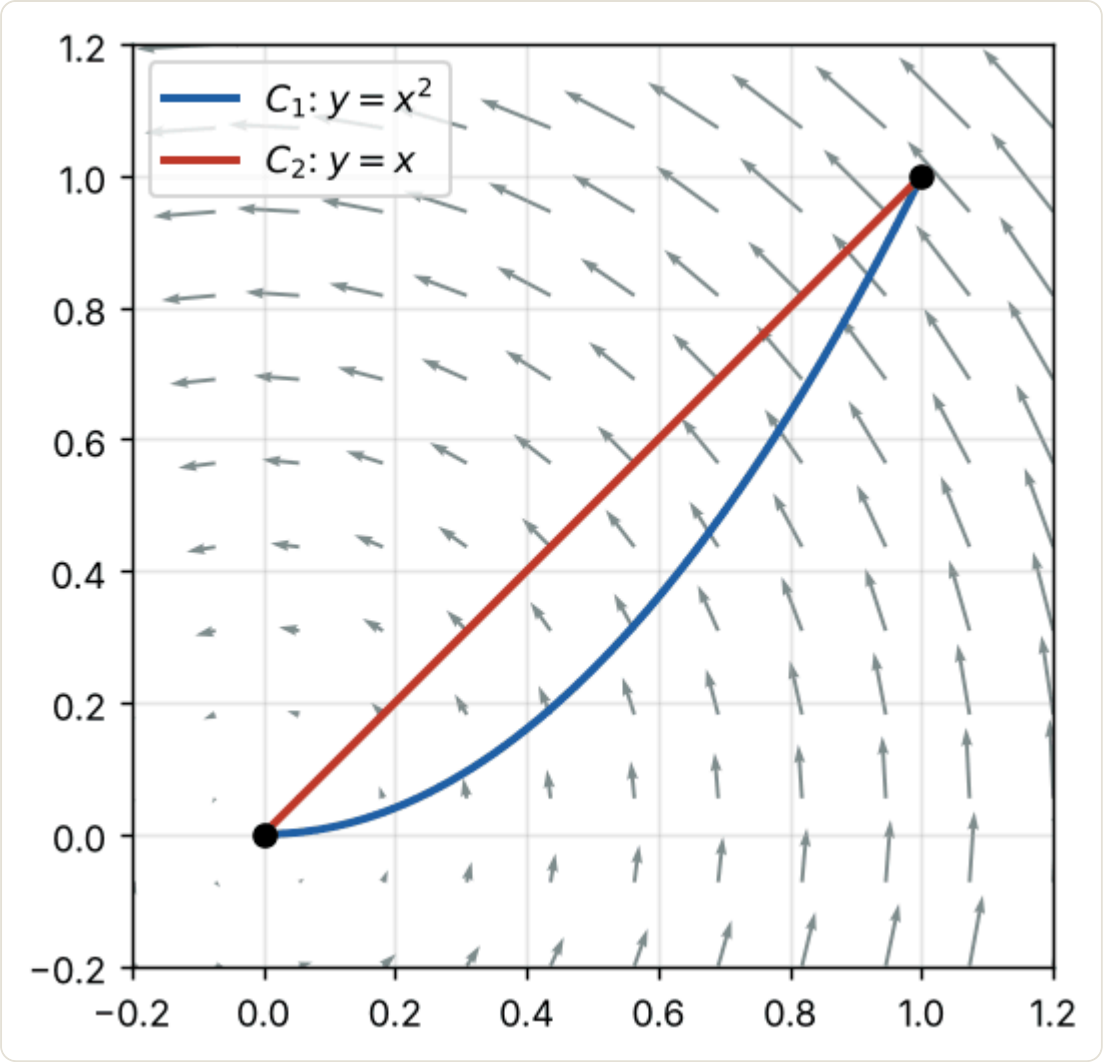
Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ dan kurva mulus $C:\ \mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt=\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Dalam komponen, $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle$: $\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$. Bila $\mathbf{F}$ gaya, ini **usaha** yang dilakukan $\mathbf{F}$ pada partikel sepanjang C. Bila C tertutup, ditulis $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (*sirkulasi*).

CONTOH 4 — KETERGANTUNGAN PADA LINTASAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat dua lintasan (gambar).
C_1: $\mathbf{r} = \langle t, t^2 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t^2, t \rangle$: $\int_0^1 (-t^2 + 2t^2)\, dt = \frac{1}{3}$.
C_2: $\mathbf{r} = \langle t, t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t, t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 1 \rangle$: $\int_0^1 (-t + t)\, dt = 0$.
Dua lintasan berbeda, usaha berbeda: medan ini bukan konservatif (16.3).



Dua lintasan dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ dalam medan $\langle -y, x \rangle$.

CONTOH 5 — USAHA SEPANJANG HELIKS

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + t = t$. $\int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2 \approx 19{,}74$. (Hasil sama dengan $\frac{1}{2}(|\mathbf{r}(2\pi)|^2 - |\mathbf{r}(0)|^2) = \frac{1}{2}(1 + 4\pi^2 - 1)$, karena medan ini konservatif.)

CONTOH 6 — SIRKULASI PADA LINGKARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, C lingkaran satuan berlawanan arah jarum jam: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t = 1$, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$. Searah jarum jam: -2π.

CONTOH 7 — RUAS GARIS

$\mathbf{F} = \langle xy,\ y - x,\ z \rangle$, C: ruas dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,3)$, $\mathbf{r} = \langle t, 2t, 3t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$. $\mathbf{F} = \langle 2t^2, t, 3t \rangle$ (karena $y - x = 2t - t = t$). $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 2t^2 + 2t + 9t = 2t^2 + 11t$. $\int_0^1 (2t^2 + 11t)\, dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{2} = \frac{37}{6} \approx 6{,}167$.

4. Fluks melalui kurva bidang

Untuk kurva C tertutup sederhana dan medan $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$, **fluks keluar** melalui C adalah $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar; sama dengan $\oint_C P\, dy - Q\, dx$ bila C berlawanan arah jarum jam.

CONTOH 8 — FLUKS KELUAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$ melalui lingkaran jari-jari R: $\mathbf{n} = \langle x, y \rangle / R$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = R$, $\oint R\, ds = R \cdot 2\pi R = 2\pi R^2$ (untuk $R = 1$, 2π). Lewat rumus $P\, dy - Q\, dx$ dengan $x = \cos t, y = \sin t$: $\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = 2\pi$.

5. Sifat-sifat

- $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (arah dibalik).
- $\int_C f\, ds$ tidak berubah bila arah dibalik.
- Nilai tidak bergantung pada parametrisasi selama arahnya sama.
- Linear: $\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.
- Kurva sepotong-sepotong: jumlahkan.

6. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}'(t)|$ pada $\int f\, ds$.
- Mengevaluasi $\mathbf{F}$ pada titik, bukan pada $\mathbf{r}(t)$.
- Mengabaikan arah: $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ berubah tanda bila arah dibalik.

- Menganggap nilai integral garis medan hanya bergantung pada ujung-ujung kurva (benar hanya untuk medan konservatif).

7. Ringkasan

- $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt$ (skalar).
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$ (usaha, sirkulasi).
- Arah penting untuk integral medan, tidak untuk $\int f\,ds$.

Berikutnya 16.3 Teorema Dasar untuk Integral Garis.

16.3 Teorema Dasar Integral Garis

Teorema Dasar Kalkulus berkata $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$: integral turunan hanya bergantung pada nilai di *ujung-ujung*. Untuk integral garis ada analog yang sama indahnya, berlaku untuk medan gradien.

1. Teorema dasar untuk integral garis

TEOREMA

Misalkan C kurva mulus yang diberikan oleh $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, dan f fungsi terdiferensialkan dengan ∇f kontinu pada C. Maka

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big).$$

Bukti. Dengan aturan rantai (14.5), $\dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Maka $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ oleh Teorema Dasar Kalkulus satu peubah. ■

CONTOH 1 — HITUNG TANPA PARAMETRISASI

$\mathbf{F} = \langle 2xy + \cos y,\ x^2 - x\sin y \rangle = \nabla f$ dengan $f = x^2 y + x\cos y$. Untuk kurva C apa pun dari $(0,0)$ ke $(1,\pi)$: $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1,\pi) - f(0,0) = \pi + \cos\pi - 0 = \pi - 1 \approx 2{,}142$.

CONTOH 2 — GRAVITASI

Medan gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{k}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \nabla \dfrac{k}{|\mathbf{r}|}$. Usaha yang dilakukan gravitasi untuk memindahkan benda dari jarak 2 ke jarak 1 dari pusat, lewat lintasan apa pun yang tidak melewati pusat: $\dfrac{k}{1} - \dfrac{k}{2} = \dfrac{k}{2}$. Hanya jarak awal dan akhir yang berpengaruh.

2. Bebas lintasan dan medan konservatif

BEBAS LINTASAN

$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ **bebas lintasan** di D bila untuk dua titik A, B di D, integralnya sama untuk semua lintasan C dari A ke B di D.

TEOREMA (KESETARAAN)

Misalkan $\mathbf{F}$ kontinu pada daerah terbuka dan terhubung D. Tiga pernyataan berikut setara:

1. $\mathbf{F}$ konservatif: $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu f.
2. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ bebas lintasan di D.
3. $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk setiap kurva tertutup C di D.

Gagasan bukti. (1)⇒(2): teorema dasar di atas. (2)⇔(3): kurva tertutup C adalah lintasan C_1 dari A ke B diikuti kebalikan lintasan C_2 dari A ke B; $\oint_C = \int_{C_1} - \int_{C_2}$, jadi nol tepat bila $\int_{C_1} = \int_{C_2}$. (2)⇒(1): tetapkan titik A dan definisikan $f(x,y) = \int_A^{(x,y)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (terdefinisi karena bebas lintasan); menghitung f_x dengan lintasan horizontal terakhir menghasilkan $f_x = P$, serupa $f_y = Q$.

CONTOH YANG MENUNJUKKAN PERBEDAAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$ (16.2, Contoh 4 dan 6): sirkulasi di lingkaran satuan $= 2\pi \neq 0$, jadi tidak bebas lintasan dan bukan konservatif.

3. Menguji apakah medan konservatif

SYARAT PERLU

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$ konservatif dan P, Q mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada D, maka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{di seluruh } D.$$

Di ruang, $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$: $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$, $Q_z = R_y$ (yaitu $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 16.5).

Bukti: bila $P = f_x$, $Q = f_y$, maka $P_y = f_{xy}$, $Q_x = f_{yx}$, sama oleh Clairaut.

SYARAT CUKUP

Jika $P_y = Q_x$ pada daerah D yang **terbuka dan sederhana terhubung** (terhubung dan tanpa "lubang"; setiap kurva tertutup dapat dikecilkan menjadi satu titik di dalam D), maka $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif. Hal serupa berlaku di ruang.

CONTOH 3 — UJI SEDERHANA

- $\mathbf{F} = \langle xy, x^2 \rangle$: $P_y = x$, $Q_x = 2x$: tidak sama, *tidak konservatif*.
- $\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$: $P_y = 2x = Q_x$ di seluruh $\mathbb{R}^2$ (sederhana terhubung): konservatif.
- $\mathbf{F} = \langle ye^x + \sin y,\ e^x + x\cos y \rangle$: $P_y = e^x + \cos y = Q_x$: konservatif.

CONTOH 4 — JEBAKAN DAERAH BERLUBANG

$\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$ pada $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $P_y = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q_x$, tetapi sirkulasi di lingkaran satuan: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\oint = 2\pi \neq 0$. D tidak sederhana terhubung (lubang di titik asal), maka syarat cukup tidak berlaku: $\mathbf{F}$ tidak konservatif pada D. (Ia adalah $\nabla\theta$, gradien sudut kutub, yang bukan fungsi bernilai tunggal di D.)

4. Mencari fungsi potensial

CONTOH 5 — DUA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Telah diuji konservatif. Cari f dengan $f_x = 3 + 2xy$, $f_y = x^2 - 3y^2$. Integrasikan f_x terhadap x: $f = 3x + x^2y + g(y)$. Turunkan terhadap y: $f_y = x^2 + g'(y)$, samakan dengan $x^2 - 3y^2$: $g' = -3y^2$, $g = -y^3$. $f = 3x + x^2y - y^3 + C$. Usaha dari $(1,2)$ ke $(3,1)$: $f(3,1) - f(1,2) = (9 + 9 - 1) - (3 + 2 - 8) = 17 - (-3) = 20$.

CONTOH 6 — TIGA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle y^2,\ 2xy + e^{3z},\ 3ye^{3z} \rangle$. Uji: $P_y = 2y = Q_x$, $P_z = 0 = R_x$, $Q_z = 3e^{3z} = R_y$: konservatif. $f_x = y^2 \Rightarrow f = xy^2 + g(y,z)$. $f_y = 2xy + g_y = 2xy + e^{3z} \Rightarrow g_y = e^{3z} \Rightarrow g = ye^{3z} + h(z)$. $f_z = 3ye^{3z} + h'(z) = 3ye^{3z} \Rightarrow h' = 0$. $f = xy^2 + ye^{3z}$. Usaha dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,0)$: $f(1,2,0) - f(0,0,0) = (4 + 2) - 0 = 6$.

CONTOH 7 — USAHA MELEWATI LINTASAN RUMIT

$\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 \rangle = \nabla(x^2 y)$. Usaha sepanjang lintasan apa pun dari $(1,1)$ ke $(2,3)$: $x^2 y\Big| = 12 - 1 = 11$, tanpa parametrisasi. Bila C adalah kurva tertutup, usahanya 0.

5. Kekekalan energi

Misalkan medan gaya $\mathbf{F} = \nabla f$ menggerakkan partikel bermassa m sepanjang $\mathbf{r}(t)$. Hukum Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$, kecepatan $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. Usaha

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, dt = m \int_a^b \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'\, dt = \frac{m}{2}\left[|\mathbf{v}(b)|^2 - |\mathbf{v}(a)|^2 \right] = K(B) - K(A),$$

dengan $K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$ energi kinetik (karena $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'$). Teorema dasar memberi $W = f(B) - f(A)$. Definisikan energi potensial $U = -f$; maka $K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$: **energi mekanik kekal**. Inilah mengapa medan konservatif memakai nama itu.

CONTOH 8 — BENDA JATUH

Gravitasi dekat permukaan: $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle = \nabla(-mgz)$, $U = mgz$. Benda dilepas dari $z = h$ (kecepatan nol): di $z = 0$, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Dengan $h = 5$ m, $g = 9{,}8$: $v = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ m/s, tanpa memperhatikan lintasan (jatuh bebas, atau meluncur pada bidang licin).

6. Kesalahan umum

- Memakai $f(B) - f(A)$ pada medan yang tidak konservatif.
- Menyimpulkan konservatif hanya dari $P_y = Q_x$ tanpa memeriksa daerahnya sederhana terhubung (Contoh 4).
- Menghilangkan fungsi $g(y)$ pada langkah mencari potensial.
- Menyamakan $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk satu kurva dengan konservatif; syaratnya berlaku untuk *semua* kurva tertutup.

7. Ringkasan

- $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.
- Konservatif $\Leftrightarrow$ bebas lintasan $\Leftrightarrow$ sirkulasi nol pada kurva tertutup.

- Uji: $P_y = Q_x$ (dan seterusnya); cukup bila daerahnya sederhana terhubung.
- Potensial dicari dengan integrasi berurutan; energi mekanik kekal.

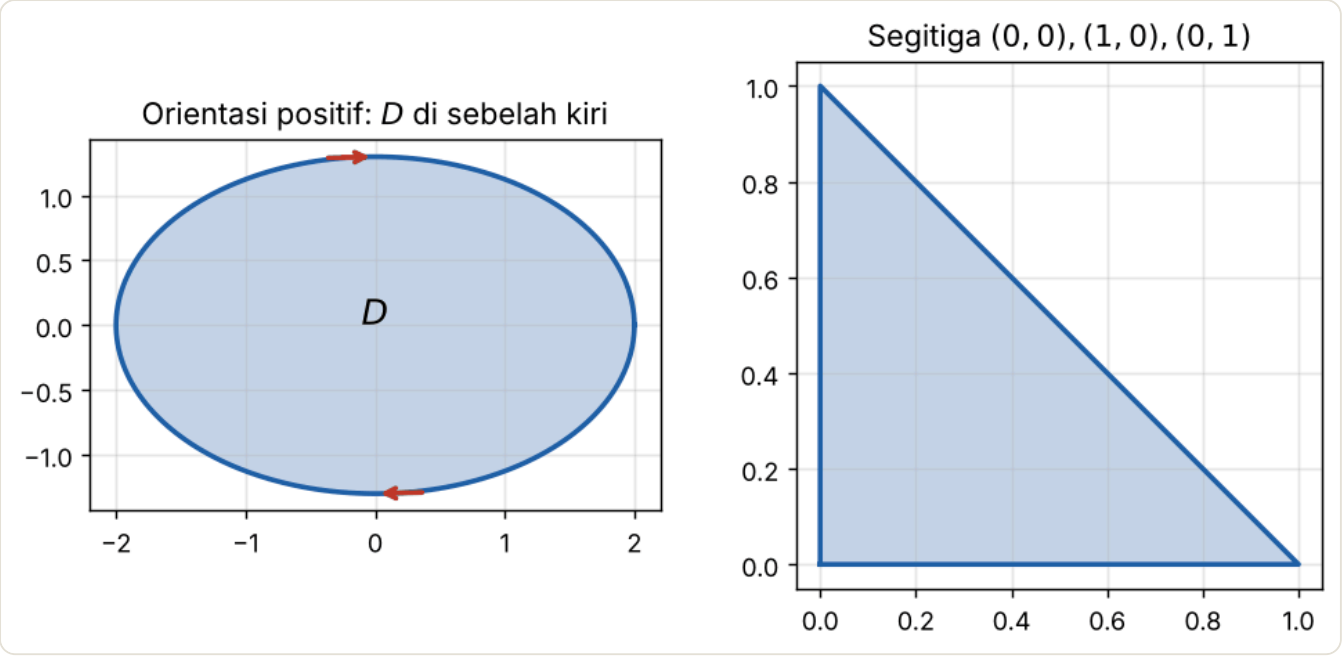
Berikutnya 16.4 Teorema Green.

16.4 Teorema Green

Teorema Dasar Kalkulus mengubah integral pada selang menjadi nilai pada *batas* selang. **Teorema Green** melakukan hal serupa pada bidang: ia menghubungkan integral garis sepanjang *kurva tertutup* dengan integral ganda dua pada *daerah* yang dikurungnya.

1. Orientasi

Kurva tertutup sederhana C (tidak memotong dirinya sendiri) mempunyai dua arah. **Orientasi positif** adalah arah berlawanan jarum jam, yaitu arah dengan daerah D yang dikurung selalu berada di *sebelah kiri* penelusur.



Orientasi positif: berlawanan arah jarum jam, daerah di kiri.

2. Teorema Green

TEOREMA GREEN

Misalkan C kurva tertutup sederhana, mulus sebagian-sebagian, berorientasi positif, yang membatasi daerah D. Jika P dan Q mempunyai turunan parsial kontinu pada daerah terbuka yang memuat D, maka

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA.$$

Notasi lain untuk ruas kiri: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$, dan ∂D untuk batas D.

Bukti (untuk daerah yang sekaligus tipe I dan tipe II). Tunjukkan $\oint_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Tulis $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$. Maka $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \big[P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\big]\,dx$. Di sisi lain, $C = C_1 \cup C_2 \cup$(dua ruas vertikal, tempat $dx = 0$), dengan C_1 (bawah, dari kiri ke kanan): $\int_{C_1} P\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$, dan C_2 (atas, dari kanan ke kiri): $\int_{C_2} P\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$. Jumlahnya $\oint_C P\,dx = -\int_a^b \big[P(x,g_2) - P(x,g_1)\big]\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Dengan memandang D sebagai tipe II diperoleh $\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$. Jumlahkan. Daerah umum dipotong menjadi potongan sederhana; integral garis pada potongan pembatas dalam saling menghapus karena dilalui dua arah. ■

3. Contoh

CONTOH 1 — SEGITIGA

$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$, C segitiga $(0,0), (1,0), (0,1)$ berlawanan arah jarum jam. $P = x^4$, $Q = xy$: $Q_x - P_y = y - 0 = y$. $\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} y\,dx\,dy = \int_0^1 y(1-y)\,dy = \frac{1}{6}$. Cek langsung: ruas $(0,0)\to(1,0)$: $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$; ruas $(1,0)\to(0,1)$: $x = 1-s, y = s$: $\int_0^1 \big[-(1-s)^4 + (1-s)s\big]\,ds = -\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; ruas $(0,1)\to(0,0)$: $x = 0$, integral 0. Jumlah $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Cocok.

CONTOH 2 — LINGKARAN

$\oint_C -y^3\,dx + x^3\,dy$, C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$. $Q_x - P_y = 3x^2 + 3y^2$. $\iint_D 3(x^2+y^2)\,dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi a^4}{2}$. Langsung dengan parametrisasi akan melibatkan $\cos^4 + \sin^4$, lebih panjang.

CONTOH 3 — KASUS KETIKA $Q_X - P_Y$ KONSTAN

$\oint_C (y + e^{x^2})\,dx + (2x + \cos y)\,dy$, C elips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. $Q_x - P_y = 2 - 1 = 1$, jadi integral = luas elips $= \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$. Suku-suku sulit e^{x^2} dan $\cos y$ tidak berperan.

CONTOH 4 — MENJELASKAN 16.2 CONTOH 4

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: usaha dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat parabola $y = x^2$ adalah $\frac{1}{3}$, lewat garis $y = x$ adalah 0. Kurva tertutup $C = C_1 \cup (-C_2)$ (naik di parabola, turun di garis) berorientasi positif: $\oint_C = \frac{1}{3} - 0$. Teorema Green: $Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2$, luas antara $y = x^2$ dan $y = x$ adalah $\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$. $\iint_D 2\,dA = \frac{1}{3}$. Cocok.

CONTOH 5 — DAERAH DENGAN LUBANG

Misalkan D adalah cincin $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, dengan batas luar C_2 (berlawanan arah jarum jam) dan batas dalam C_1 (*searah* jarum jam, agar D tetap di kiri). Green berlaku dengan $\partial D = C_2 \cup (-C_1)$: $\oint_{C_2} - \oint_{C_1} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$ dengan kedua lingkaran berlawanan arah jarum jam. Bila $Q_x = P_y$ di seluruh D (mis. medan Contoh 4 di 16.3 $\langle -y, x \rangle / (x^2 + y^2)$), maka $\oint_{C_2} = \oint_{C_1} = 2\pi$: kurva tertutup mana pun yang mengelilingi titik asal memberi sirkulasi yang sama, 2π.

4. Menghitung luas dengan integral garis

Pilih P, Q dengan $Q_x - P_y = 1$, mis. $P = 0, Q = x$ atau $P = -y, Q = 0$ atau $P = -\frac{y}{2}, Q = \frac{x}{2}$. Maka

$$A(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

CONTOH 6 — LUAS ELIPS

$x = a\cos t,\ y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi$: $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\big]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$.

CONTOH 7 — ASTROID

$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$. $x\,y' - y\,x' = \cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t = 3\sin^2 t\cos^2 t$. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}178$.

5. Bentuk vektor: sirkulasi dan fluks

DUA BENTUK VEKTOR TEOREMA GREEN

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad \text{(sirkulasi, "bentuk tangensial")},$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \quad \text{(fluks, "bentuk normal")},$$

dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar. Bentuk kedua diperoleh dari yang pertama dengan memakai medan $\langle -Q, P \rangle$ (karena $\mathbf{n}\, ds = \langle dy, -dx \rangle$).

CONTOH 8 — FLUKS

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3 \rangle$, fluks keluar melalui lingkaran jari-jari a: $\operatorname{div} = 3x^2 + 3y^2$, hasil $\iint 3r^2\, dA = \frac{3\pi a^4}{2}$. Untuk $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: div $= 2$, fluks $= 2 \cdot \pi a^2$, cocok dengan 16.2 Contoh 8 ($2\pi R^2$).

6. Kesalahan umum

- Memakai arah searah jarum jam tanpa mengganti tanda hasil.
- Menukar Q_x dan P_y (rumus: $Q_x - P_y$).
- Menerapkan Green pada medan yang tidak halus di dalam D (mis. singularitas di titik asal).
- Lupa membalik arah batas dalam pada daerah berlubang.

7. Ringkasan

- $\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$, C berorientasi positif.
- Luas: $A = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx$.
- Bentuk normal: $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$.

Berikutnya 16.5 Curl dan Divergensi.

16.5 Curl dan Divergensi

Dua turunan menjelaskan bagaimana sebuah medan vektor berperilaku secara lokal: **curl** mengukur kecenderungan berputar, dan **divergensi** mengukur kecenderungan memancar atau terserap. Keduanya adalah kunci untuk memperluas teorema Green ke ruang (16.8, 16.9).

1. Operator del

Definisikan operator vektor $\nabla = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$. Ia bekerja pada fungsi skalar (gradien ∇f), dan melalui "hasil kali" titik dan silang pada medan vektor.

2. Curl

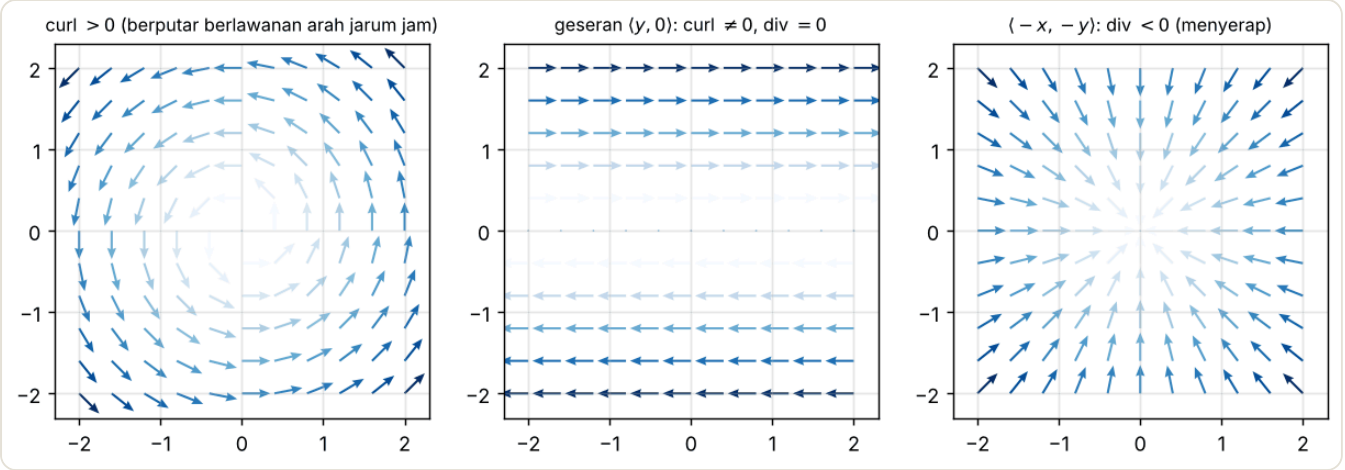
DEFINISI — CURL

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ dengan turunan parsial ada,

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \Big\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \Big\rangle.$$

Untuk medan bidang $\langle P, Q, 0 \rangle$, curl $= \langle 0, 0, Q_x - P_y \rangle$: komponen $\mathbf{k}$ adalah integran teorema Green.

Tafsir. Letakkan roda dayung kecil di aliran fluida $\mathbf{F}$, dengan sumbu searah $\mathbf{n}$. Roda berputar paling cepat bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, dengan kecepatan sudut $\frac{1}{2} |\operatorname{curl} \mathbf{F}|$. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, aliran disebut *tak berputar* (irrotasional).



Kiri: medan berputar. Tengah: geseran (curl tak nol, divergensi nol). Kanan: medan yang menyerap (divergensi negatif).

CONTOH 1 — MENGHITUNG CURL

$\mathbf{F} = \langle xz,\ xyz,\ -y^2 \rangle$. $R_y - Q_z = -2y - xy$; $P_z - R_x = x - 0 = x$; $Q_x - P_y = yz - 0 = yz$. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle -2y - xy,\ x,\ yz \rangle$. Di $(1,1,2)$: $\langle -3, 1, 2 \rangle$.

CONTOH 2 — ROTASI BENDA TEGAR

Benda berputar dengan kecepatan sudut $\boldsymbol{\omega} = \langle 0, 0, 3 \rangle$: kecepatan titik $\mathbf{r}$ adalah $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$. $\operatorname{curl}\mathbf{v} = \langle 0, 0, 3+3 \rangle = \langle 0, 0, 6 \rangle = 2\boldsymbol{\omega}$. Jadi curl kecepatan sama dengan dua kali kecepatan sudut. Medan geseran $\langle y, 0, 0 \rangle$: curl $= \langle 0, 0, -1 \rangle$, roda berputar searah jarum jam.

CONTOH 3 — CURL DAN KONSERVATIF

$\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$: $R_y - Q_z = x - x = 0$, $P_z - R_x = y - y = 0$, $Q_x - P_y = z - z = 0$; curl $= \mathbf{0}$. Memang $\mathbf{F} = \nabla(xyz)$. Sebaliknya $\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$: curl $= \langle -y, -z, -x \rangle \neq \mathbf{0}$, tidak konservatif.

TEOREMA

Jika f mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Sebaliknya, jika $\mathbf{F}$ terdefinisi pada seluruh $\mathbb{R}^3$ (atau daerah sederhana terhubung) dengan komponen berturunan parsial kontinu dan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{F}$ konservatif.

Bukti bagian pertama: komponen pertama $\partial_y(f_z) - \partial_z(f_y) = 0$ oleh Clairaut; komponen lain serupa. Ini kelanjutan dari syarat $P_y = Q_x$ di 16.3.

3. Divergensi

DEFINISI — DIVERGENSI

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(Di bidang: $P_x + Q_y$.) Ini fungsi *skalar*.

Tafsir. Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ di sebuah titik adalah laju fluks keluar per satuan volume: positif bila titik itu *sumber* (fluida memancar), negatif bila *penyerap* (sink), dan nol bila aliran *tak mampat* (volume fluida tidak berubah).

CONTOH 4 — MENGHITUNG DIVERGENSI

- $\mathbf{F} = \langle xz, xyz, -y^2\rangle$: $\operatorname{div} = z + xz + 0 = z(1+x)$.
- $\mathbf{F} = \langle x, y, z\rangle$: $\operatorname{div} = 3$ (memancar seragam).
- $\mathbf{F} = \langle x, -y\rangle$: $\operatorname{div} = 1 - 1 = 0$: aliran sudut tak mampat (di sekitar titik pelana, mengalir masuk sepanjang sumbu y dan keluar sepanjang sumbu x).
- $\mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$: $\operatorname{div} = 0$: berputar tanpa memampat.

CONTOH 5 — MEDAN KUADRAT TERBALIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dfrac{\langle x,y,z\rangle}{\rho^3}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{\rho^3} = \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{3x^2}{\rho^5}$. Jumlahkan untuk tiga komponen: $\dfrac{3}{\rho^3} - \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{\rho^5} = 0$. Jadi $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ di mana pun kecuali di titik asal (sumber titik). Karena inilah fluks medan listrik dan gravitasi muatan titik tidak bergantung pada bentuk permukaan pengurung (16.9).

TEOREMA

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0.$$

Bukti: $\operatorname{div}\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\rangle = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$ oleh Clairaut. Akibatnya, medan yang merupakan curl dari medan lain pasti tak mampat (mis. medan magnet).

4. Laplacian dan identitas

Laplacian fungsi skalar: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Fungsi dengan $\nabla^2 f = 0$ disebut *harmonik* (persamaan Laplace, 14.3).

CONTOH 6 — LAPLACIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$.
- $f = \dfrac{1}{\rho}$: $\nabla f = -\dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3}$, $\nabla^2 f = -\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3} = 0$ (Contoh 5): harmonik di mana pun kecuali asal; ini potensial listrik dan gravitasi.
- $f = x^2 - y^2$: $\nabla^2 f = 2 - 2 = 0$: harmonik.

Identitas	Keterangan
$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	gradien tak berputar
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$	curl tak mampat
$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$	aturan hasil kali
$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$	aturan hasil kali
$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$	linear

CONTOH 7 — MEMAKAI ATURAN HASIL KALI

$\nabla \cdot (\rho^2\,\mathbf{r})$ dengan $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$: $f = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\nabla f = 2\mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$: $f\,\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla f = 3\rho^2 + 2\rho^2 = 5\rho^2$.

5. Bentuk vektor teorema Green

Dengan notasi baru, teorema Green (16.4) berbunyi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA, \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

Bentuk pertama (sirkulasi $\leftrightarrow$ curl) memperluas diri menjadi Teorema Stokes (16.8); bentuk kedua (fluks $\leftrightarrow$ divergensi) menjadi Teorema Divergensi (16.9).

6. Kesalahan umum

- Menyamakan curl dan divergensi: curl menghasilkan vektor, divergensi menghasilkan skalar.
- Salah tanda pada determinan curl (komponen $\mathbf{j}$ adalah $P_z - R_x$, bukan $R_x - P_z$).
- Menghitung curl atau divergensi dari fungsi skalar, atau gradien dari medan vektor: tipe tidak cocok.
- Menyimpulkan konservatif dari curl nol pada daerah yang tidak sederhana terhubung.

7. Ringkasan

- $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$: kecenderungan berputar; $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$: kecenderungan memancar.
- $\operatorname{curl}\nabla f = \mathbf{0}$; $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$.
- Laplacian $\nabla^2 f = \operatorname{div}\nabla f$; fungsi harmonik: $\nabla^2 f = 0$.

Berikutnya 16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya.

16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya

Kurva ruang kita nyatakan oleh satu parameter t: $\mathbf{r}(t)$. Permukaan mempunyai dua dimensi, sehingga memerlukan dua parameter (u, v). Representasi ini jauh lebih fleksibel daripada grafik $z = f(x, y)$: ia dapat menggambarkan bola, silinder, torus, dan permukaan lain yang bukan grafik fungsi.

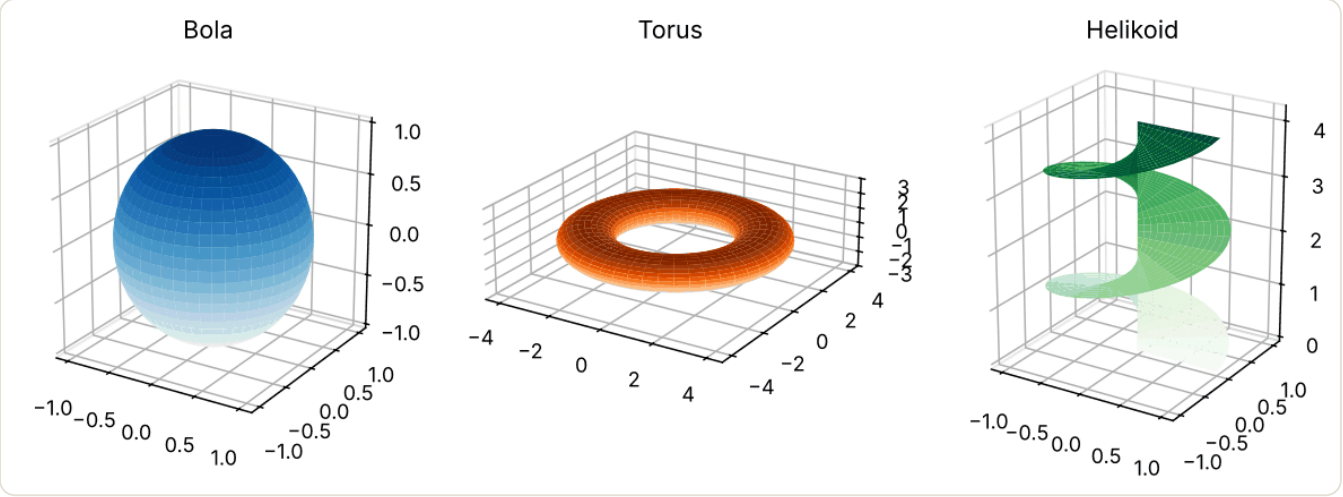
1. Permukaan parametrik

DEFINISI

Permukaan parametrik S adalah himpunan titik

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v) \rangle, \qquad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

D disebut daerah parameter. Kurva $u = u_0$ (dengan v berubah) dan $v = v_0$ disebut *kurva grid*; ia membentuk "jaring" yang menyelimuti permukaan.



Tiga permukaan parametrik: bola, torus, dan helikoid.

CONTOH 1 — BIDANG

Bidang melalui titik $\mathbf{r}_0$ dengan vektor sejajar $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Misalnya bidang melalui $(1, 2, 3)$ yang memuat $\langle 1, 0, 1 \rangle$ dan $\langle 0, 1, -1 \rangle$: $\mathbf{r} = \langle 1 + u,\ 2 + v,\ 3 + u - v \rangle$, yaitu $z = x - y + 4$.

CONTOH 2 — SILINDER DAN BOLA

- Silinder $x^2 + y^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$, $0 \le \theta \le 2\pi$, z selang.
- Bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (koordinat bola, 15.9).
- Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: $\langle a\sin\phi\cos\theta,\ b\sin\phi\sin\theta,\ c\cos\phi\rangle$.

CONTOH 3 — GRAFIK DAN PARABOLOID

Grafik $z = f(x, y)$: $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y)\rangle$ (ambil $u = x$, $v = y$). Paraboloid $z = x^2 + y^2$ dapat ditulis $\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\rangle$. Kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN PUTAR

Kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, diputar mengelilingi sumbu x: $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x,\ f(x)\cos\theta,\ f(x)\sin\theta\rangle$. Untuk $f = \sqrt{x}$ pada $0 \le x \le 1$: paraboloid $y^2 + z^2 = x$.

CONTOH 5 — TORUS

Torus (donat) dengan jari-jari pusat tabung R dan jari-jari tabung r ($R > r$): $\mathbf{r}(u, v) = \langle (R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v\rangle$, $0 \le u, v \le 2\pi$.

CONTOH 6 — HELIKOID

$\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$: setiap kurva $u = \text{konstan}$ adalah heliks, setiap $v = \text{konstan}$ adalah garis horizontal yang memotong sumbu z: seperti ulir tangga spiral.

2. Bidang singgung

Turunan parsial $\mathbf{r}_u = \langle x_u, y_u, z_u\rangle$ dan $\mathbf{r}_v$ di titik (u_0, v_0) adalah vektor singgung pada kurva grid, jadi keduanya terletak pada bidang singgung. Permukaan disebut **mulus** bila $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ (di titik dalam D); vektor ini adalah **normal**.

CONTOH 7 — BIDANG SINGGUNG

$\mathbf{r}(u,v) = \langle u^2, v^2, u+2v\rangle$, di titik $(1,1,3)$ ($u=v=1$). $\mathbf{r}_u = \langle 2u, 0, 1\rangle = \langle 2,0,1\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle 0, 2v, 2\rangle = \langle 0,2,2\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle 0\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot 0 - 2\cdot 2,\ 2\cdot 2 - 0\rangle = \langle -2,-4,4\rangle$. Bidang: $-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$, yaitu $x + 2y - 2z = -3$. (Periksa titik: $1 + 2 - 6 = -3$.)

3. Luas permukaan

Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ di D dipetakan menjadi jajargenjang hampir yang dibentangkan $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$, luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$ (bandingkan dengan Jacobian, 15.10).

LUAS PERMUKAAN PARAMETRIK

Bila S mulus dan dilalui tepat satu kali ketika (u,v) menjelajahi D,

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA.$$

CONTOH 8 — BOLA

$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin\phi$ (15.6), $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$.

CONTOH 9 — TORUS

$\mathbf{r}_u = \langle -(R + r\cos v)\sin u,\ (R + r\cos v)\cos u,\ 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -r\sin v\cos u,\ -r\sin v\sin u,\ r\cos v\rangle$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = r(R + r\cos v)$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\, dv\, du = 2\pi \cdot 2\pi r R = 4\pi^2 r R$. Untuk $R = 3, r = 1$: $12\pi^2 \approx 118{,}4$. (Luas = keliling lingkaran tabung $2\pi r$ kali keliling lintasan pusatnya $2\pi R$, teorema Pappus.)

CONTOH 10 — HELIKOID

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$. $\mathbf{r}_u = \langle \cos v, \sin v, 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -u\sin v, u\cos v, 1\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle \sin v,\ -\cos v,\ u\rangle$, panjang $\sqrt{1+u^2}$. $A = \pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du = \dfrac{\pi}{2}\left[\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1\right] \approx 3{,}606$.

CONTOH 11 — KERUCUT

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{2}\,u$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}u\,du\,dv = 4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77$, sama dengan $\pi r s$ dengan $r = 2$, $s = 2\sqrt{2}$.

KASUS KHUSUS

- Grafik $z = f(x,y)$: $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$, $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA$ (15.6).
- Permukaan putar $y = f(x)$ di sekitar sumbu x: $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = f\sqrt{1+f'^2}$, $A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ (10.2).

CONTOH 12 — PARABOLOID PUTAR

$f = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$: $f\sqrt{1+f'^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \sqrt{x+\frac{1}{4}}$. $A = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \approx 5{,}33$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $|\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v|$ sebagai elemen luas; yang benar $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ (hanya sama bila kedua vektor tegak lurus).
- Batas u, v yang membuat permukaan terlewati dua kali (mis. bola dengan $\theta \in [0, 4\pi]$).
- Menganggap parametrisasi tunggal: satu permukaan punya banyak parametrisasi.

5. Ringkasan

- $\mathbf{r}(u,v)$; $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ adalah normal bidang singgung.
- $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$.
- Contoh: bola $4\pi a^2$, torus $4\pi^2 r R$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 16.7 Integral Permukaan.

16.7 Integral Permukaan

Integral garis menjumlahkan sepanjang kurva. Integral permukaan menjumlahkan di atas *permukaan*. Sama seperti sebelumnya ada dua jenis: integral fungsi skalar (massa, muatan) dan integral medan vektor (fluks).

1. Integral permukaan fungsi skalar

Bagi permukaan S menjadi potongan kecil S_{ij} berluas ΔS_{ij}, pilih titik contoh P_{ij}^*, dan jumlahkan $f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij}$.

INTEGRAL PERMUKAAN

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim \sum f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij} = \iint_D f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA.$$

Untuk grafik $z = g(x,y)$ di atas D:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA.$$

Dengan $f \equiv 1$: $\iint_S dS = A(S)$ (luas permukaan, 16.6).

CONTOH 1 — $\iint Y^2\,DS$ PADA BOLA

Bola jari-jari a: $dS = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$, $y = a\sin\phi\sin\theta$. $\iint y^2\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin^2\phi\sin^2\theta\cdot a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = a^4\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{4\pi a^4}{3}$. Karena simetri, $\iint x^2dS = \iint y^2dS = \iint z^2dS$; jumlahnya $\iint a^2dS = 4\pi a^4$, jadi masing-masing $\frac{4\pi a^4}{3}$. Cocok.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA

$\iint_S z\,dS$, S belahan atas bola jari-jari 2: $z = 2\cos\phi$, $dS = 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\cos\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 8\pi \approx 25{,}13$. Bila S kulit tipis dengan kerapatan $\sigma = z$, maka 8π adalah massanya.

CONTOH 3 — BIDANG

$\iint_S x\,dS$, S bagian bidang $x+y+z=1$ di oktan pertama. $z = 1-x-y$: $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. D: segitiga $x,y\ge 0, x+y\le 1$. $\sqrt{3}\iint_D x\,dA = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}289$.

CONTOH 4 — SILINDER

$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, S: silinder $x^2+y^2=1, 0\le z\le 2$ (tanpa tutup). $\mathbf{r}=\langle\cos\theta,\sin\theta,z\rangle$, $|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_z|=1$. $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+z^2)\,dz\,d\theta = 2\pi\left(2+\frac{8}{3}\right)=\frac{28\pi}{3}\approx 29{,}3$.

PENERAPAN

Massa $m=\iint \sigma\,dS$; pusat massa $\bar{x}=\frac{1}{m}\iint x\sigma\,dS$ (dst.); momen inersia $I_z=\iint (x^2+y^2)\sigma\,dS$; muatan total $Q=\iint\sigma\,dS$.

2. Permukaan berorientasi

Untuk integral medan vektor kita perlu memilih **sisi** permukaan. Permukaan S **berorientasi** bila ada medan vektor normal satuan $\mathbf{n}$ yang kontinu pada S. Setiap permukaan mulus (selain Möbius) mempunyai dua orientasi: $\mathbf{n}$ dan $-\mathbf{n}$.

- Grafik $z=g(x,y)$: orientasi *ke atas*: $\mathbf{n}=\dfrac{\langle -g_x,-g_y,1\rangle}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$.
- Permukaan tertutup (bola, kubus): orientasi *positif* adalah normal yang menunjuk *ke luar*.
- Permukaan parametrik: $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$ (atau kebalikannya).

Pita Möbius (setengah putaran lalu disambung) hanya mempunyai satu sisi dan tidak dapat diorientasikan.

3. Fluks

INTEGRAL PERMUKAAN MEDAN VEKTOR (FLUKS)

Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ pada permukaan berorientasi S dengan normal satuan $\mathbf{n}$:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\big(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\big)\,dA,$$

dengan syarat $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ searah $\mathbf{n}$ (bila berlawanan, beri tanda minus). Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida (kerapatan 1), ini adalah **laju aliran** fluida (volume per waktu) yang melewati S pada arah $\mathbf{n}$.

UNTUK GRAFIK $Z = G(X, Y)$, ORIENTASI KE ATAS

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\, g_x - Q\, g_y + R\right) dA, \qquad \mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle.$$

CONTOH 5 — FLUKS MELALUI BOLA

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, bola jari-jari a, normal keluar $\mathbf{n} = \frac{\langle x,y,z \rangle}{a}$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a} = a$. Fluks $= a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$. (Sama dengan $\iiint \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$, 16.9.)

CONTOH 6 — FLUKS MELALUI PARABOLOID

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, orientasi ke atas. $g_x = -2x$, $g_y = -2y$: $-Pg_x - Qg_y + R = 2x^2 + 2y^2 + (1 - x^2 - y^2) = 1 + x^2 + y^2$. $\iint_D (1 + r^2)\, dA = 2\pi \int_0^1 (1 + r^2) r\, dr = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}712$.

CONTOH 7 — KUBUS

Fluks $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ keluar dari kubus $[0, 1]^3$: enam sisi. Sisi $x = 1$ ($\mathbf{n} = \mathbf{i}$): $F \cdot n = x = 1$, luas 1, fluks 1. Sisi $x = 0$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{i}$): $-x = 0$. Sama untuk y dan z. Total $= 3$.

CONTOH 8 — KERUCUT DENGAN PARAMETRISASI

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, kerucut $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u \rangle$, $0 \leq u \leq 1$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -u \cos v, -u \sin v, u \rangle$ (menunjuk ke dalam-atas). $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = -u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v + u^2 = 0$. Fluks $= 0$: medan radial dari titik asal menyinggung kerucut sehingga tidak ada fluida yang menembusnya.

CONTOH 9 — FLUKS MEDAN LISTRIK

Muatan Q di titik asal: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Fluks melalui bola jari-jari a (normal keluar): $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$; fluks $= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 4\pi a^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, tidak bergantung pada a (hukum Gauss).

CONTOH 10 — ALIRAN PANAS

Suhu $u(x, y, z)$, konduktivitas K; aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju aliran panas keluar melalui permukaan tertutup S adalah $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$. Untuk $u = x^2 + y^2 + z^2$ pada bola jari-jari a, $\nabla u = 2\mathbf{r}$, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 2a$: fluks panas $= -K \cdot 2a \cdot 4\pi a^2 = -8\pi K a^3$ (negatif: panas mengalir ke dalam karena suhu makin besar ke luar).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ pada integral skalar, atau memakai $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ tanpa memeriksa arahnya terhadap orientasi.
- Mengabaikan orientasi: membalik normal mengubah tanda fluks.
- Memakai $\mathbf{n}$ satuan bersama $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ (nilai ganda): pakai satu saja.
- Pada permukaan tertutup bertutup, lupa memasukkan tutupnya.

5. Ringkasan

- $\iint_S f\, dS = \iint_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$.
- Fluks $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$; grafik: $\iint (-Pg_x - Qg_y + R)\, dA$.
- Orientasi: ke atas untuk grafik, ke luar untuk permukaan tertutup.

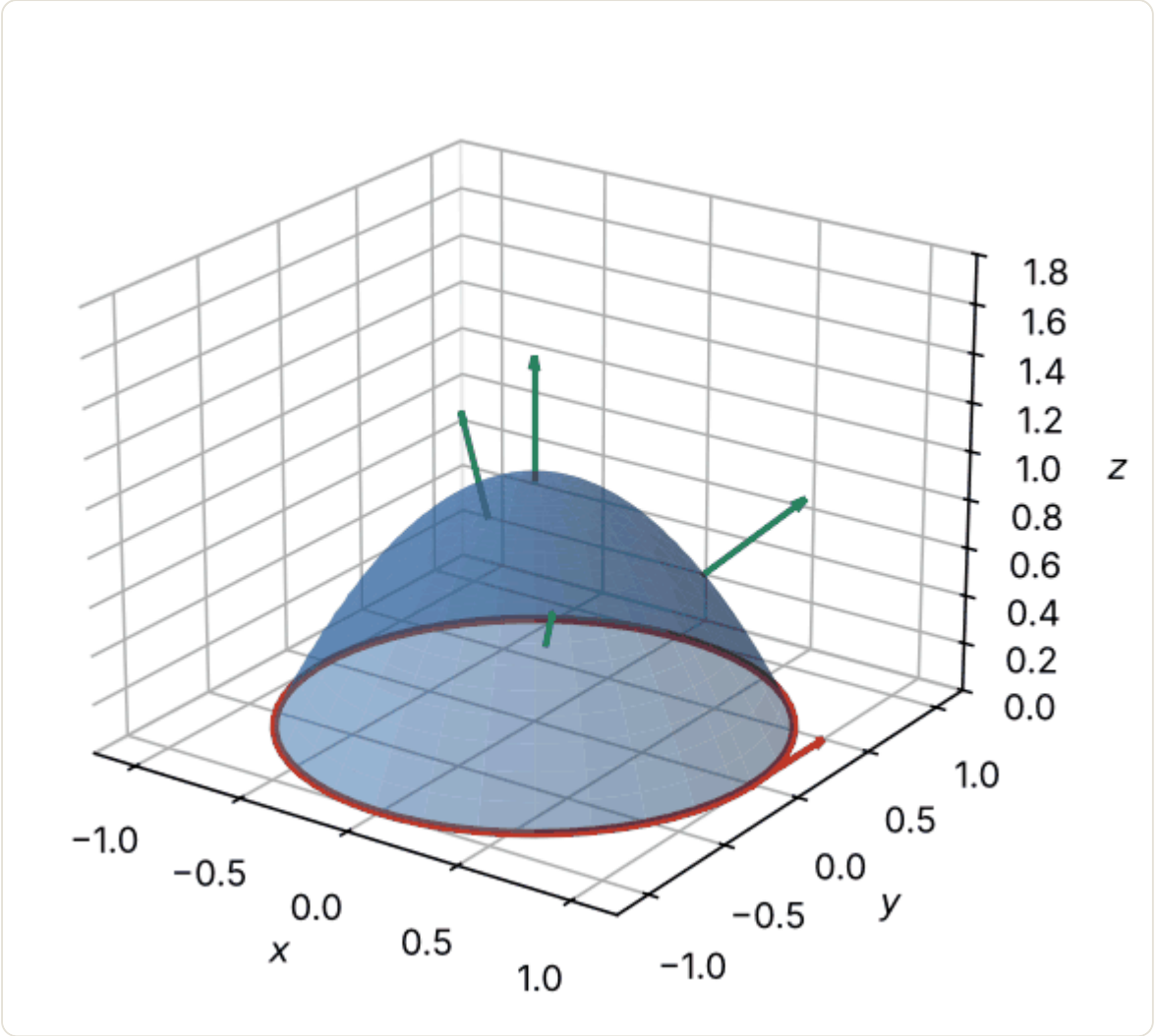
Berikutnya 16.8 Teorema Stokes.

16.8 Teorema Stokes

Teorema Green mengubah integral garis pada kurva tertutup di bidang menjadi integral ganda pada daerah di dalamnya. **Teorema Stokes** melakukan hal yang sama di ruang: sirkulasi medan vektor sepanjang kurva tertutup sama dengan fluks *curl* medan itu melalui permukaan yang dibatasi kurva.

1. Pernyataan

Misalkan S permukaan berorientasi mulus sebagian-sebagian, dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C. Orientasi C harus **sesuai** dengan orientasi S: bila berjalan sepanjang C dengan kepala searah normal $\mathbf{n}$, permukaan berada di sebelah kiri (aturan tangan kanan: jari melengkung searah C, ibu jari searah $\mathbf{n}$).



Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dengan normal ke atas (hijau) dan batas lingkaran C berlawanan arah jarum jam (merah).

TEOREMA STOKES

Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka di $\mathbb{R}^3$ yang memuat S, maka

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Bila S rata di bidang xy dengan $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$ dan Stokes menjadi teorema Green. Jadi Green adalah kasus khusus Stokes.

Gagasan bukti (grafik $z = g(x, y)$). Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ pada grafik ke atas, ruas kanan menjadi $\iint_D \big[-(R_y - Q_z)g_x - (P_z - R_x)g_y + (Q_x - P_y)\big]\, dA$. Ruas kiri: substitusi $z = g(x, y)$, $dz = g_x dx + g_y dy$, integral garis berubah menjadi integral garis pada ∂D di bidang xy dengan komponen $\big(P + Rg_x\big)$ dan $\big(Q + Rg_y\big)$; teorema Green dan aturan rantai pada $R(x, y, g(x, y))$ menyamakan keduanya. Permukaan umum dipecah menjadi potongan grafik; integral garis pada batas dalam saling menghapus.

2. Contoh

CONTOH 1 — PARABOLOID, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$, S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, normal ke atas; C: lingkaran satuan di bidang xy, berlawanan arah jarum jam.
Garis: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$, $\mathbf{F} = \langle \sin t, 0, \cos t \rangle$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -\sin^2 t$. $\oint = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = -\pi$.
Permukaan: $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle$. Untuk grafik: $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle = -2x - 2y - 1$. $\iint_D (-2x - 2y - 1)\, dA = -\pi$ (suku ganjil lenyap). Kedua cara memberi $-\pi$.

CONTOH 2 — MENGGANTI PERMUKAAN

Untuk soal yang sama, ganti S dengan cakram datar $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -1$, $\iint = -1 \cdot \pi = -\pi$. Hasilnya sama, karena batas C sama. *Inilah kegunaan Stokes:* pilih permukaan terdekat yang paling mudah.

CONTOH 3 — ELIPS HASIL IRISAN SILINDER DAN BIDANG

$\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$, C: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$ (13.1 Contoh 5), dilihat dari atas berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Pilih S potongan bidang $z = 2 - y$ di dalam silinder: $g_x = 0$, $g_y = -1$, normal ke atas $\langle 0, 1, 1 \rangle$. $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = 2$. $\iint_D 2 \, dA = 2\pi$. Cek langsung: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 2 - \sin t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, -\cos t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle 2 - \sin t, \cos t, \sin t \rangle$; $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -2\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t$. $\int_0^{2\pi} = 0 + \pi + \pi - 0 = 2\pi$.

CONTOH 4 — BELAHAN BOLA

$\mathbf{F} = \langle -y, x, z^2 \rangle$, S: belahan atas bola jari-jari a, normal keluar; C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle 0, 0, 2 \rangle$. $\iint_S 2 \, n_z \, dS = 2 \times$(luas proyeksi pada bidang xy)$= 2\pi a^2$ (karena $n_z \, dS = dA$ proyeksi). Langsung: pada C, $z = 0$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -y \, dx + x \, dy$, $\oint = 2 \cdot$ luas cakram $= 2\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PERMUKAAN TERTUTUP

Jika S permukaan *tertutup* (tanpa batas), maka $C = \emptyset$ dan $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Misalnya fluks curl apa pun melalui seluruh bola $= 0$. Ini konsisten dengan $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0$ dan teorema divergensi (16.9): $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} \, dV = 0$.

3. Penafsiran curl

Ambil titik P dan cakram kecil S_a berjari-jari a yang tegak lurus arah $\mathbf{n}$, berpusat di P, dengan batas C_a. Karena $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ hampir konstan pada S_a, Stokes memberi

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} \; \pi a^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Jadi komponen curl pada arah $\mathbf{n}$ adalah **sirkulasi per satuan luas** pada bidang yang tegak lurus $\mathbf{n}$. Sirkulasi paling besar bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, dan nilai maksimum itu adalah $|\operatorname{curl} \mathbf{F}|$. Ini membenarkan tafsir roda dayung di 16.5.

CONTOH 6 — PUSARAN

Fluida dengan kecepatan $\mathbf{v} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$ (rotasi dengan $\omega = 3$). $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \langle 0, 0, 6 \rangle$. Sirkulasi di sekeliling lingkaran jari-jari a (berlawanan arah jarum jam): $6 \cdot \pi a^2$. Langsung: di lingkaran, kecepatan $\mathbf{v}$ searah singgung dengan besar $3a$, dan keliling lingkaran $2\pi a$, jadi sirkulasi $= 3a \cdot 2\pi a = 6\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 7 — HUKUM FARADAY

Bila $\mathbf{E}$ medan listrik dan $\mathbf{B}$ medan magnet, Faraday: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\dfrac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Menerapkan Stokes ke ruas kiri memberi $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ untuk semua S, jadi bentuk diferensial: $\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, salah satu persamaan Maxwell.

4. Konservatif dan Stokes

Stokes menjelaskan syarat 16.3 secara lengkap. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ pada daerah sederhana terhubung D, maka untuk setiap kurva tertutup C di D, $C = \partial S$ untuk suatu permukaan $S \subset D$, sehingga $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Jadi $\mathbf{F}$ konservatif. (Pada daerah berlubang seperti 16.3 Contoh 4, S yang dimaksud mungkin harus melewati lubang, di tempat $\mathbf{F}$ tidak terdefinisi, sehingga bukti gagal.)

5. Kesalahan umum

- Tidak mencocokkan orientasi C dengan $\mathbf{n}$ (tangan kanan), sehingga tanda salah.
- Memakai curl yang salah, atau lupa mengambil produk titik dengan normal.
- Memakai Stokes pada $\mathbf{F}$ yang tidak halus di dalam S.
- Mengira nilai bergantung pada S: hanya batas C yang penting.

6. Ringkasan

- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; orientasi C dan S dengan aturan tangan kanan.
- Green adalah kasus khusus; pilih permukaan termudah dengan batas C.
- Curl = sirkulasi per satuan luas; $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow$ konservatif (daerah sederhana terhubung).

Berikutnya 16.9 Teorema Divergensi.

16.9 Teorema Divergensi

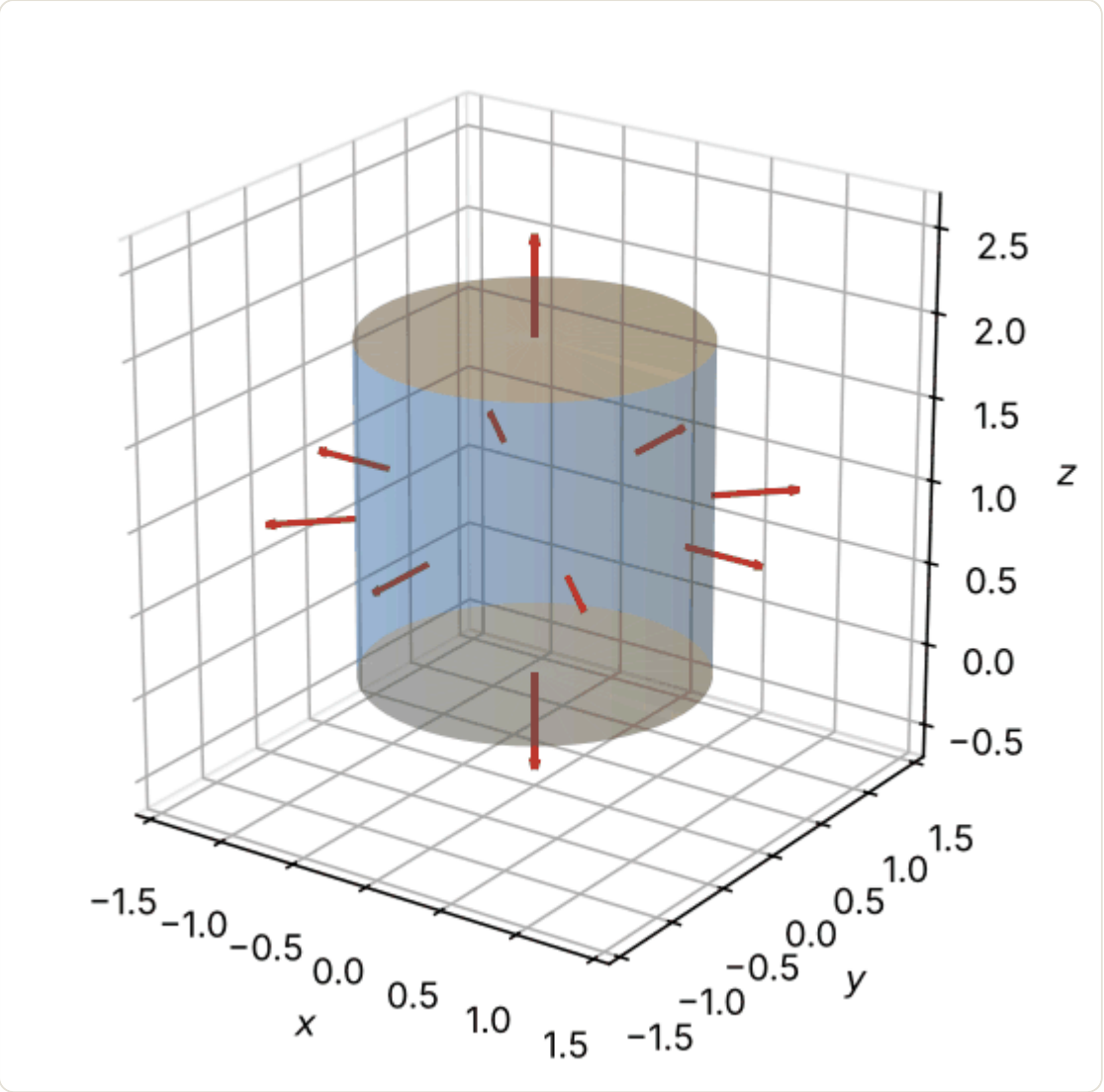
Teorema Dasar Kalkulus: integral turunan pada selang $=$ nilai pada batas. Teorema Green dan Stokes: integral "turunan" (curl) pada permukaan $=$ integral garis pada batas. **Teorema Divergensi** adalah versi tiga dimensi bentuk fluks teorema Green: integral divergensi pada *padatan* $=$ fluks melalui *permukaan* pembatasnya.

1. Pernyataan

TEOREMA DIVERGENSI (GAUSS)

Misalkan E padatan sederhana (daerah tertutup terbatas) yang dibatasi permukaan tertutup S dengan orientasi positif (normal keluar). Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka yang memuat E, maka

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$



Silinder tertutup: permukaan S terdiri dari sisi, tutup atas, dan tutup bawah, dengan normal keluar (merah).

Gagasan bukti. Tulis $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$; cukup membuktikan $\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$ (dua lainnya serupa). Bila $E = \{(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$: $\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \big[R(x,y,u_2) - R(x,y,u_1)\big]\,dA$ (teorema dasar). Sisi vertikal S tidak menyumbang ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$). Permukaan atas $z = u_2$ (normal ke atas) menyumbang $\iint_D R(x,y,u_2)\,dA$, permukaan bawah (normal ke bawah) $-\iint_D R(x,y,u_1)\,dA$. Jumlahnya sama. Padatan umum dipotong menjadi padatan sederhana; fluks pada permukaan pemisah saling menghapus. ■

2. Contoh

CONTOH 1 — BOLA

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3\rangle$, S bola satuan. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2) = 3\rho^2$. $\iiint 3\rho^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5} \approx 7{,}540$. Menghitung fluks langsung pada bola akan jauh lebih rumit.

CONTOH 2 — SILINDER, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle x, y, z^2 \rangle$, E: $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 2$. $\operatorname{div} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$. $\iiint = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 (2 + 2z)\, r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 + 4) = 8\pi$.
Langsung: tutup atas $z = 2$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = z^2 = 4$, luas π: 4π. Tutup bawah $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$: $-z^2 = 0$. Sisi $\mathbf{n} = \langle x, y, 0 \rangle$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y^2 = 1$, luas sisi $2\pi \cdot 2 = 4\pi$: 4π. Total 8π. Cocok.

CONTOH 3 — KUBUS

$\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$, $E = [0, 1]^3$. $\operatorname{div} = y + z + x$. $\iiint (x + y + z)\, dV = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Fluks keluar dari kubus $= \frac{3}{2}$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN TERBUKA DENGAN MENUTUPNYA

Fluks $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ melalui paraboloid $S_1 :\ z = 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$, ke atas (16.7 Contoh 6 memberi $\frac{3\pi}{2}$ dengan hitung langsung). Tutup dengan cakram S_2: $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$, normal $-\mathbf{k}$. $\iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iiint_E 3\, dV = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ (volume bawah paraboloid $2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = \frac{\pi}{2}$). Pada S_2: $\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) = -z = 0$. Jadi $\iint_{S_1} = \frac{3\pi}{2}$, sama dengan hasil langsung.

3. Menghitung volume dengan fluks

Pilih $\mathbf{F}$ dengan $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$, mis. $\mathbf{F} = \frac{1}{3}\langle x, y, z \rangle$ atau $\langle x, 0, 0 \rangle$:

$$V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S x\, dy\, dz.$$

CONTOH 5 — VOLUME BOLA

Pada bola jari-jari a: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a$. $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Hukum Gauss dan medan kuadrat terbalik

CONTOH 6 — FLUKS SEMBARANG PERMUKAAN PENGURUNG TITIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ mempunyai $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ untuk $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ (16.5). Misalkan S permukaan tertutup apa pun yang mengurung titik asal. Ambil bola kecil S_a berjari-jari a di dalam S; padatan E di antara S dan S_a tidak memuat asal. Teorema divergensi (normal keluar dari E, yaitu ke dalam pada S_a): $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 0\,dV = 0$. Pada S_a, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{a^2}$, fluks $= \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$. Jadi $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ untuk *setiap* permukaan yang mengurung asal.

CONTOH 7 — HUKUM GAUSS UNTUK LISTRIK

Dari Contoh 6, medan muatan titik Q, $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, memberi fluks $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ melalui permukaan tertutup apa pun yang mengurungnya. Untuk distribusi muatan dengan kerapatan ρ: $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$. Dengan teorema divergensi, $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$ untuk semua E, jadi $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (persamaan Maxwell).

5. Tafsir divergensi dan aliran fluida

Ambil bola kecil B_a berpusat di P, dengan permukaan S_a. Karena $\operatorname{div}\mathbf{F}$ hampir konstan di dalamnya,

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(P)\cdot V(B_a) \;\Rightarrow\; \operatorname{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Jadi divergensi adalah **fluks keluar per satuan volume**: $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$ di sumber, < 0 di penyerap.

CONTOH 8 — PERSAMAAN KONTINUITAS

Fluida dengan kerapatan $\rho(x,y,z,t)$ dan kecepatan $\mathbf{v}$. Massa dalam E: $\iiint_E \rho\,dV$. Laju perubahannya sama dengan negatif fluks keluar: $\frac{d}{dt}\iiint_E \rho\,dV = -\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_E \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\,dV$. Untuk semua E: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$. Fluida tak mampat ($\rho$ konstan) memberi $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

CONTOH 9 — PANAS

Aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju panas keluar dari E adalah $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}(-K\nabla u)\,dV = -K\iiint_E \nabla^2 u\,dV$. Dengan kapasitas panas $c\rho$: $c\rho\,u_t = K\nabla^2 u$ (persamaan panas, 14.3).

6. Hubungan keempat teorema

Teorema	Ruas satu	Ruas lain
Dasar Kalkulus	$\int_a^b F'(x)\,dx$	$F(b) - F(a)$
Dasar integral garis	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$	$f(B) - f(A)$
Green	$\iint_D (Q_x - P_y)\,dA$	$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$
Stokes	$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Divergensi	$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$	$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Pola yang sama: integral "turunan" atas suatu daerah sama dengan integral fungsi aslinya pada *batas* daerah itu.

7. Kesalahan umum

- Memakai teorema pada permukaan yang tidak tertutup tanpa menambah tutupnya.
- Normal ke dalam alih-alih ke luar sehingga tanda terbalik.
- Menerapkan teorema bila $\mathbf{F}$ punya singularitas di dalam E (seperti medan kuadrat terbalik pada permukaan yang mengurung asal): perlu langkah seperti Contoh 6.
- Lupa menjumlahkan fluks semua bagian permukaan saat menghitung langsung.

8. Ringkasan

- $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$, S tertutup, normal keluar.
- Divergensi $=$ fluks keluar per satuan volume; $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ berarti tak mampat.
- Hukum Gauss: fluks medan kuadrat terbalik melalui permukaan pengurung $= 4\pi$ (atau Q/ε_0).

Bab 16 berakhir di sini, dan dengan itu semua bab buku ini tersedia.

Bab 17: Persamaan Diferensial Orde Dua

17.1 Persamaan Linear Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua muncul di mana-mana: getaran pegas, rangkaian listrik, bandul, gelombang. Pada subbab ini kita membahas jenis yang paling penting dan dapat diselesaikan secara tuntas, yaitu persamaan **linear homogen dengan koefisien konstan**.

1. Persamaan linear orde dua

DEFINISI

Persamaan diferensial linear orde dua berbentuk

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x),$$

dengan P, Q, R, G fungsi kontinu. Bila $G(x) \equiv 0$, persamaan disebut **homogen**; bila tidak, **takhomogen** (17.2). Bila P, Q, R konstanta, persamaannya *berkoefisien konstan*.

Pada subbab ini kita mempelajari

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a, b, c \text{ konstanta},\ a \neq 0. \tag{1}$$

PRINSIP SUPERPOSISI

Jika y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan linear homogen, maka $c_1 y_1 + c_2 y_2$ juga penyelesaian untuk sembarang konstanta c_1, c_2.

Bukti. $a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0.$ ■

TEOREMA

Jika y_1, y_2 penyelesaian (1) yang **bebas linear** (tidak ada yang merupakan kelipatan konstan yang lain), maka penyelesaian umum (1) adalah

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Kebebasan linear dapat diuji dengan *Wronskian* $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$.

MASALAH NILAI AWAL DAN BATAS

Masalah nilai awal: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Teorema eksistensi dan ketunggalan menjamin tepat satu penyelesaian. *Masalah nilai batas*: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$; penyelesaiannya bisa tunggal, tak ada, atau tak hingga banyak.

2. Persamaan karakteristik

Coba penyelesaian $y = e^{rx}$. Maka $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, dan (1) menjadi $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Karena $e^{rx} \neq 0$:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{persamaan karakteristik}), \qquad r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

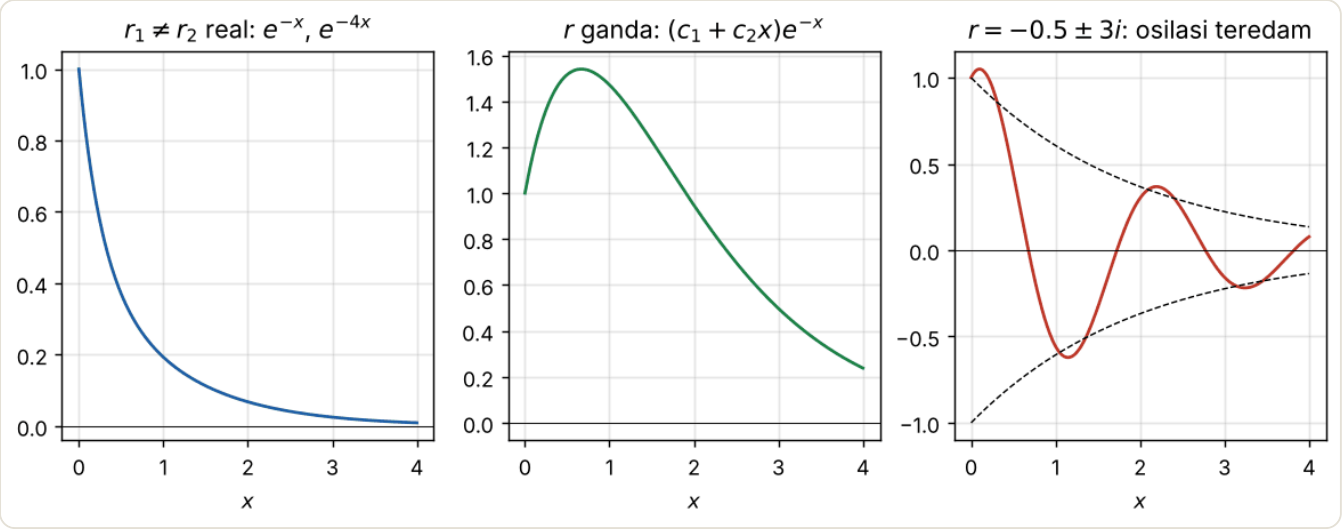
Tiga kasus bergantung pada diskriminan $D = b^2 - 4ac$.

PENYELESAIAN UMUM

AKAR KARAKTERISTIK	PENYELESAIAN UMUM
$D > 0$: **DUA AKAR REAL BERBEDA** R_1, R_2	$Y = C_1 E^{R_1 X} + C_2 E^{R_2 X}$
$D = 0$: **AKAR GANDA** R	$Y = (C_1 + C_2 X) E^{RX}$
$D < 0$: **AKAR KOMPLEKS** $A \pm IB$	$Y = E^{AX}(C_1 \cos BX + C_2 \sin BX)$

Mengapa xe^{rx} pada kasus ganda? Akar ganda berarti $r = -\frac{b}{2a}$ dan $ar^2 + br + c = a(r - r_0)^2$. Uji $y = xe^{r_0 x}$: $y' = (1 + r_0 x)e^{r_0 x}$, $y'' = (2r_0 + r_0^2 x)e^{r_0 x}$; $ay'' + by' + cy = e^{r_0 x}\left[a(2r_0 + r_0^2 x) + b(1 + r_0 x) + cx\right] = e^{r_0 x}\left[(2ar_0 + b) + x(ar_0^2 + br_0 + c)\right] = 0$, karena $2ar_0 + b = 0$ dan r_0 akar.

Mengapa sinus dan cosinus pada kasus kompleks? Rumus Euler $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$ (11.10). Akar $\alpha \pm i\beta$ memberi $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$; bagian real dan imajiner masing-masing adalah penyelesaian real yang bebas linear (kombinasi linear penyelesaian kompleks).



Tiga bentuk penyelesaian: akar real berbeda, akar ganda, dan akar kompleks.

3. Contoh

CONTOH 1 — DUA AKAR REAL

$y'' - y' - 6y = 0$: $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$, $r = 3, -2$. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = 1$ dan $3c_1 - 2c_2 = 0$, jadi $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{5}$: $y = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$; misalnya $y(1) \approx 8{,}115$.

CONTOH 2 — AKAR GANDA

$y'' + 6y' + 9y = 0$: $(r+3)^2 = 0$, $r = -3$. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$. Dengan $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$: $c_1 = 2$; $y' = (c_2 - 3c_1 - 3c_2x)e^{-3x}$, $y'(0) = c_2 - 6 = -1 \Rightarrow c_2 = 5$. $y = (2 + 5x)e^{-3x}$, $y(1) = 7e^{-3} \approx 0{,}3485$.

CONTOH 3 — AKAR KOMPLEKS

$y'' - 2y' + 5y = 0$: $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$: $c_1 = 1$; $y'(0) = \alpha c_1 + \beta c_2 = c_1 + 2c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 1$. $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$, $y(1) = e(\cos 2 + \sin 2) \approx 1{,}3405$.

CONTOH 4 — AKAR IMAJINER MURNI

$y'' + 4y = 0$: $r = \pm 2i$, $\alpha = 0$. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$: gelombang tanpa peredam. Dapat juga ditulis $y = A\cos(2x - \delta)$ dengan amplitudo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

CONTOH 5 — PERSAMAAN DENGAN KOEFISIEN UTAMA

$4y'' - 12y' + 9y = 0$: $4r^2 - 12r + 9 = (2r-3)^2 = 0$, $r = \frac{3}{2}$ ganda. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x/2}$. Persamaan $y'' - y = 0$: $r = \pm 1$, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, yang juga dapat ditulis $y = A\cosh x + B\sinh x$.

CONTOH 6 — MENYUSUN PERSAMAAN DARI AKAR

Persamaan dengan penyelesaian e^{2x} dan e^{-5x}: akar $2, -5$, karakteristik $(r-2)(r+5) = r^2 + 3r - 10$, jadi $y'' + 3y' - 10y = 0$.

CONTOH 7 — WRONSKIAN

Untuk $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$: $W = e^{3x}(-2e^{-2x}) - 3e^{3x}e^{-2x} = -5e^x \neq 0$: bebas linear. Untuk $y_1 = \cos 2x$ dan $y_2 = \sin 2x$: $W = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$.

4. Masalah nilai batas

CONTOH 8 — SATU PENYELESAIAN

$y'' + 2y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = 2$. $y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$. $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$.

$$y(\pi) = \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \sin\sqrt{2}\pi = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2 - \cos\sqrt{2}\pi}{\sin\sqrt{2}\pi} \approx \frac{2 + 0{,}266}{-0{,}964} \approx -2{,}351.$$

Penyelesaian tunggal.

CONTOH 9 — TAK ADA ATAU TAK HINGGA BANYAK

$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1$: $y = c_1\cos x + c_2 \sin x$, $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $y(\pi) = c_2 \sin\pi = 0 \neq 1$. **Tidak ada penyelesaian.** Bila $y(\pi) = 0$, maka $y = c_2 \sin x$ untuk sembarang c_2: **tak hingga banyak**. Berbeda dengan masalah nilai awal, masalah nilai batas tidak otomatis mempunyai penyelesaian tunggal.

CONTOH 10 — NILAI EIGEN

$y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$. Untuk $\lambda = \mu^2 > 0$: $y = c\sin\mu x$ dan $y(L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi$. Nilai $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}$: inilah mode getar senar bertepi tetap. Untuk $\lambda \leq 0$ hanya $y \equiv 0$.

5. Kesalahan umum

- Mencampur tanda pada persamaan karakteristik (mis. $y'' - y' - 6y \to r^2 - r - 6$, bukan $r^2 + r - 6$).
- Pada akar kompleks, lupa faktor $e^{\alpha x}$ atau memakai β yang salah (β adalah bagian imajiner, bukan β^2).
- Pada akar ganda, menulis $c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx}$ (tidak bebas linear): perlu faktor x.
- Menganggap masalah nilai batas selalu mempunyai penyelesaian tunggal.

6. Ringkasan

- $ay'' + by' + cy = 0$: selesaikan $ar^2 + br + c = 0$.
- Real berbeda: $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$; ganda: $(c_1 + c_2 x)e^{rx}$; kompleks: $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.
- Dua syarat awal menentukan c_1, c_2 secara tunggal.

Berikutnya 17.2 Persamaan Linear Takhomogen.

17.2 Persamaan Linear Takhomogen

Sekarang kita menyelesaikan persamaan yang ruas kanannya tidak nol:

$$ay'' + by' + cy = G(x). \tag{1}$$

Ruas kanan G mewakili gaya luar atau masukan. Ada dua metode utama: **koefisien tak tentu** dan **variasi parameter**.

1. Struktur penyelesaian

TEOREMA

Penyelesaian umum (1) adalah

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x),$$

dengan y_p satu penyelesaian khusus (partikular) (1) dan y_c penyelesaian umum persamaan homogen terkait $ay'' + by' + cy = 0$ (disebut *penyelesaian komplementer*, 17.1).

Bukti. Misalkan y penyelesaian apa saja dan y_p satu penyelesaian khusus. Maka $a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) = G - G = 0$, sehingga $y - y_p$ memenuhi persamaan homogen, yaitu $y - y_p = y_c$ untuk suatu pilihan c_1, c_2. ■

2. Koefisien tak tentu

Bila G berupa polinomial, eksponensial, sinus/cosinus, atau hasil kali/jumlah keduanya, kita menebak bentuk y_p dengan koefisien yang dicari.

TEBAKAN Y_P

$G(X)$	**TEBAKAN** Y_P
$P_N(X)$ **(POLINOMIAL DERAJAT** N**)**	$A_N X^N + \cdots + A_1 X + A_0$
E^{SX}	AE^{SX}
$\mathrm{COS}\,\Omega X$ **ATAU** $\mathrm{SIN}\,\Omega X$	$A\,\mathrm{COS}\,\Omega X + B\,\mathrm{SIN}\,\Omega X$
$P_N(X)E^{SX}$	$Q_N(X)E^{SX}$ **(POLINOMIAL UMUM DERAJAT** N**)**
$E^{SX}\,\mathrm{COS}\,\Omega X$ **ATAU** $E^{SX}\,\mathrm{SIN}\,\Omega X$	$E^{SX}(A\,\mathrm{COS}\,\Omega X + B\,\mathrm{SIN}\,\Omega X)$

Aturan modifikasi: bila ada suku tebakan yang juga merupakan penyelesaian homogen (muncul dalam y_c), kalikan seluruh tebakan dengan x (atau x^2 bila akar ganda) sampai tidak ada suku yang sama dengan suku y_c.

CONTOH 1 — POLINOMIAL

$y'' + 3y' + 2y = x^2$. Homogen: $r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$. Tebakan $y_p = Ax^2 + Bx + C$: $2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$. Samakan koefisien: x^2: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; x: $6A + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$; konstanta: $2A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$. $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Dengan $y(0) = 1, y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = -\frac{3}{4}$, $-c_1 - 2c_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0$. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-2x}$.

CONTOH 2 — EKSPONENSIAL

$y'' + 4y = e^{3x}$. $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Tebakan $y_p = Ae^{3x}$: $9A + 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{13}$. $y = \frac{1}{13}e^{3x} + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

CONTOH 3 — SINUS

$y'' - 3y' + 2y = \sin x$. $y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$. Tebakan $y_p = A\cos x + B\sin x$ (kedua suku walau ruas kanan hanya sinus, karena y' membawa cosinus). $y_p' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$. Substitusi: $\cos x$: $-A - 3B + 2A = A - 3B = 0$; $\sin x$: $-B + 3A + 2B = 3A + B = 1$. Jadi $A = 3B$, $10B = 1$: $y_p = \dfrac{3\cos x + \sin x}{10}$.

CONTOH 4 — RESONANSI (ATURAN MODIFIKASI)

$y'' + y = \cos x$. $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Tebakan $A\cos x + B\sin x$ sama dengan y_c dan menghasilkan 0. Kalikan dengan x: $y_p = x(A\cos x + B\sin x)$. $y_p'' = 2(-A\sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\sin x)$, jadi $y_p'' + y_p = -2A\sin x + 2B\cos x = \cos x \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}$. $y_p = \frac{1}{2}x\sin x$. Amplitudo tumbuh tanpa batas: gejala *resonansi* (17.3).

CONTOH 5 — AKAR GANDA DAN EKSPONENSIAL YANG SAMA

$y'' - 2y' + y = e^x$. $y_c = (c_1 + c_2 x)e^x$. e^x dan xe^x sudah ada di y_c, jadi tebakan $y_p = Ax^2e^x$. $y_p' = (2Ax + Ax^2)e^x$, $y_p'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$. $y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. $y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x$.

CONTOH 6 — JUMLAH BEBERAPA SUKU

$y'' + y' - 2y = x + e^{-x}$. Pakai superposisi: selesaikan terpisah untuk $G_1 = x$ dan $G_2 = e^{-x}$, lalu jumlahkan. Homogen: $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$, akar $-2, 1$, jadi tidak ada tabrakan. Untuk $G_1 = x$: $y_{p1} = Ax + B$, $y_{p1}' = A$, sehingga $A - 2(Ax + B) = x$: $-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$, dan $A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$. Untuk $G_2 = e^{-x}$: $y_{p2} = Ce^{-x}$, $(1 - 1 - 2)Ce^{-x} = e^{-x} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$. Jadi $y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-x}$ dan $y = c_1e^{-2x} + c_2e^x + y_p$.

3. Variasi parameter

Metode ini berlaku untuk sembarang G (dan bahkan koefisien tidak konstan), asalkan penyelesaian homogen diketahui.

VARIASI PARAMETER

Untuk $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ (koefisien utama 1), misalkan y_1, y_2 dua penyelesaian homogen yang bebas linear dengan Wronskian $W = y_1y_2' - y_1'y_2$. Maka

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2\, g}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1\, g}{W}\, dx.$$

Gagasan. Cari $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ ("mengubah" konstanta menjadi fungsi). Pilih syarat $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ agar $y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'$. Substitusi ke persamaan memberi $u_1'y_1' + u_2'y_2' = g$. Dua persamaan linear untuk u_1', u_2' dengan determinan W menghasilkan $u_1' = -\frac{y_2 g}{W}$, $u_2' = \frac{y_1 g}{W}$ (aturan Cramer).

CONTOH 7 — $Y'' + Y = \mathrm{TAN}\, X$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $W = 1$. $u_1' = -\sin x \tan x = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$, $u_1 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$. $u_2' = \cos x \tan x = \sin x$, $u_2 = -\cos x$. $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x = \sin x \cos x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \sin x \cos x = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$. Penyelesaian umum: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$. (Koefisien tak tentu tidak dapat dipakai untuk $\tan x$.)

CONTOH 8 — AKAR GANDA DENGAN $G = E^{-2X}/X$

$y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$, $x > 0$. $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, $W = e^{-4x}$. $u_1' = -\dfrac{xe^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = -1 \Rightarrow u_1 = -x$. $u_2' = \dfrac{e^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow u_2 = \ln x$. $y_p = -xe^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$. Suku $-xe^{-2x}$ dapat digabung ke $c_2 xe^{-2x}$, jadi $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$.

CONTOH 9 — MEMERIKSA PENYELESAIAN

Periksa $y_p = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$ pada Contoh 7: $y_p' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x \cdot \sec x = \sin x \ln(\cdot) - 1$, $y_p'' = \cos x \ln(\cdot) + \sin x \sec x = \cos x \ln(\cdot) + \tan x$. $y_p'' + y_p = \tan x$. Cocok.

4. Memilih metode

Situasi	Metode
Koefisien konstan, G polinomial/eksponensial/trigonometri	Koefisien tak tentu (lebih cepat)
G sembarang ($\tan x$, $1/x$, $\ln x$, $\sec x$)	Variasi parameter
Koefisien tidak konstan, y_1, y_2 diketahui	Variasi parameter

5. Kesalahan umum

- Lupa bahwa syarat awal diterapkan pada $y = y_p + y_c$, bukan pada y_c saja.
- Tebakan $\cos$ hanya untuk ruas kanan $\cos$: selalu sertakan $\sin$ juga.
- Tidak memodifikasi tebakan yang bertabrakan dengan y_c.

- Memakai variasi parameter tanpa membagi persamaan sehingga koefisien y'' sama dengan 1.

6. Ringkasan

- $y = y_p + y_c$.
- Koefisien tak tentu: tebak bentuk y_p, modifikasi bila bertabrakan dengan y_c.
- Variasi parameter: $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} + y_2 \int \frac{y_1 g}{W}$.

Berikutnya 17.3 Penerapan.

17.3 Penerapan Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan menggambarkan banyak sistem osilasi: pegas dan peredam, bandul kecil, rangkaian listrik RLC. Matematikanya sama; hanya tafsir peubahnya berbeda.

1. Getaran pegas

Sebuah benda bermassa m digantung pada pegas. Misalkan $x(t)$ adalah simpangan dari posisi seimbang (arah ke bawah positif). Gaya yang bekerja:

- gaya pemulih pegas (hukum Hooke): $-kx$, dengan $k > 0$ konstanta pegas;
- gaya redaman (kekentalan): $-c\,x'$, dengan $c \geq 0$ koefisien redaman;
- gaya luar $F(t)$ (bila ada).

Hukum II Newton $mx'' = -kx - cx' + F(t)$ memberikan

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Getaran bebas tanpa redaman

$c = 0$, $F = 0$: $mx'' + kx = 0$, karakteristik $mr^2 + k = 0$, $r = \pm i\omega_0$ dengan $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = A\cos(\omega_0 t - \delta), \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Gerak harmonik sederhana dengan frekuensi sudut ω_0, periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, amplitudo A tetap.

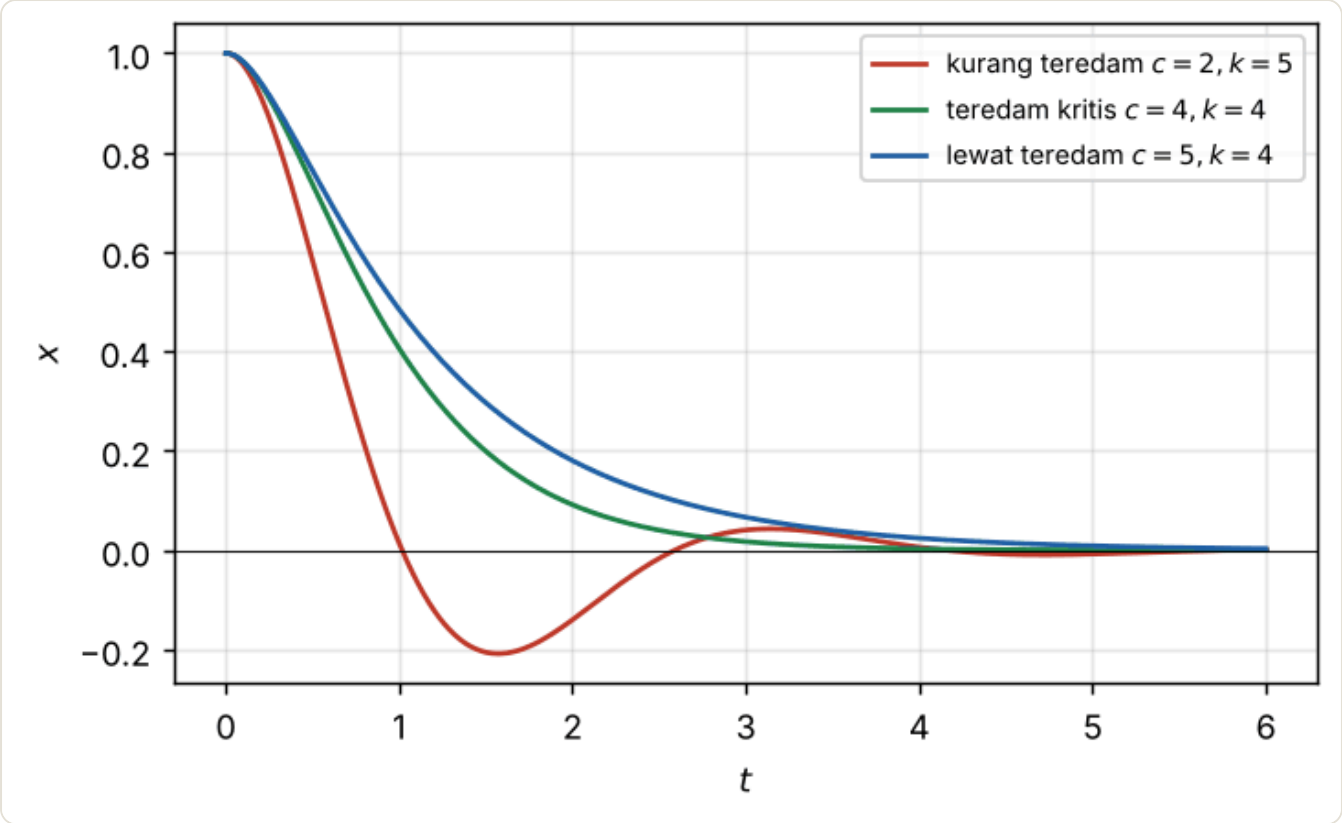
> **CONTOH 1 — PEGAS TANPA REDAMAN**
>
> Benda 2 kg pada pegas dengan $k = 18$ N/m, ditarik 0,5 m ke bawah lalu dilepas. $\omega_0 = \sqrt{18/2} = 3$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ s. $x(0) = 0{,}5$, $x'(0) = 0$: $x = 0{,}5\cos 3t$. Laju maksimum $A\omega_0 = 1{,}5$ m/s (terjadi di posisi seimbang).

Getaran bebas teredam

$mx'' + cx' + kx = 0$. Karakteristik $mr^2 + cr + k = 0$, diskriminan $c^2 - 4mk$:

TIGA JENIS REDAMAN

- **Lewat teredam** ($c^2 > 4mk$): dua akar real negatif r_1, r_2; $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$. Tidak berosilasi; kembali ke keseimbangan perlahan (pegas dalam oli kental).
- **Teredam kritis** ($c^2 = 4mk$): $x = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$, $r = -\frac{c}{2m}$. Kembali ke keseimbangan tercepat tanpa berosilasi (peredam pintu, suspensi ideal).
- **Kurang teredam** ($c^2 < 4mk$): $r = -\frac{c}{2m} \pm i\omega$, $\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$; $x = e^{-ct/2m}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$. Berosilasi dengan amplitudo meluruh eksponensial.



Simpangan untuk tiga jenis redaman ($m = 1$).

CONTOH 2 — KURANG TEREDAM

$x'' + 2x' + 5x = 0$ ($m = 1, c = 2, k = 5$): $c^2 - 4mk = 4 - 20 < 0$. $r = -1 \pm 2i$. $x(0) = 1, x'(0) = 0$: $c_1 = 1$, $x'(0) = -c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$. $x = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)$. Nilai pada $t = 1$: $\approx 0{,}0142$ (meluruh cepat). Frekuensi sudut teredam 2, lebih kecil dari frekuensi alami $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

CONTOH 3 — TEREDAM KRITIS DAN LEWAT TEREDAM

- $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -2$ ganda, $x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$, $c_1 = 1$, $c_2 - 2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$. $x = (1 + 2t)e^{-2t}$, selalu positif; tidak melewati keseimbangan.
- $x'' + 5x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -1, -4$; $c_1 + c_2 = 1$, $-c_1 - 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$. $x = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$.

2. Getaran paksa dan resonansi

Bila gaya luar periodik $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

Tanpa redaman

$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t$, penyelesaian $x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + x_p$. Untuk $\omega \neq \omega_0$: $x_p = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$. Bila $\omega = \omega_0$ terjadi **resonansi**: $x_p = \dfrac{F_0}{2m\omega_0}\, t \sin \omega_0 t$, amplitudo tumbuh linear tanpa batas.

CONTOH 4 — RESONANSI

$x'' + 9x = \cos 3t$ ($m = 1$, $\omega_0 = 3$, $F_0 = 1$). Tebakan $x_p = t(A \cos 3t + B \sin 3t)$; hasilnya $x_p = \frac{t}{6} \sin 3t$. Dengan $x(0) = x'(0) = 0$: $x = \frac{t}{6} \sin 3t$. Amplitudo $\frac{t}{6}$ tumbuh tanpa batas (pada $t = 30$ s sudah 5 m). Pada sistem nyata, redaman atau kegagalan struktural membatasinya (jembatan, gelas yang pecah oleh nada).

Dengan redaman

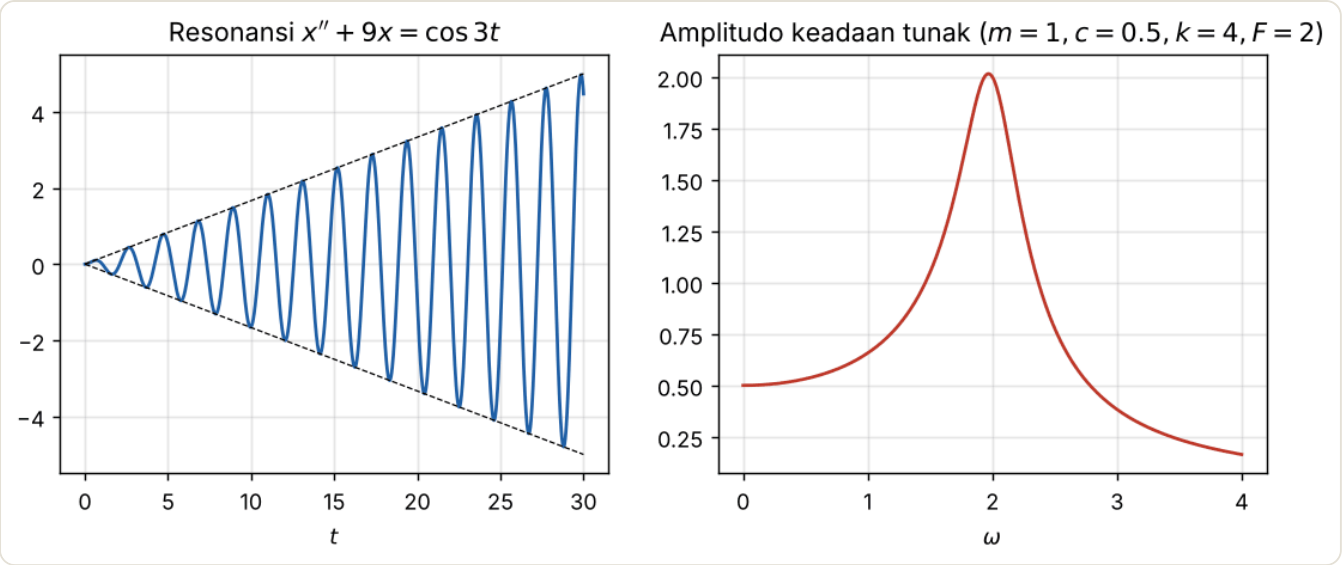
Untuk $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$, bagian komplementer meluruh (*transien*) dan yang bertahan adalah *keadaan tunak* $x_p = A \cos(\omega t - \alpha)$ dengan amplitudo

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}.$$

Amplitudo maksimum terjadi di $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}$ (bila $c^2 < 2mk$): *resonansi praktis*. Makin kecil c, makin tinggi puncak.

CONTOH 5 — AMPLITUDO KEADAAN TUNAK

$m = 1$, $c = 0{,}5$, $k = 4$, $F_0 = 2$. $A(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + 0{,}25\omega^2}}$. $A(1) \approx 0{,}658$; $A(2) = \dfrac{2}{\sqrt{0+1}} = 2$; puncak di $\omega = \sqrt{4 - 0{,}125} \approx 1{,}969$ dengan $A \approx 2{,}016$. Puncak sedikit di bawah frekuensi alami $\omega_0 = 2$.



Kiri: resonansi tanpa redaman. Kanan: kurva amplitudo keadaan tunak.

3. Rangkaian listrik RLC

Rangkaian seri dengan induktor L (henry), resistor R (ohm), kapasitor C (farad), dan sumber tegangan $E(t)$ (volt). Muatan $Q(t)$ pada kapasitor, arus $I = Q'$. Hukum tegangan Kirchhoff: $LI' + RI + \frac{Q}{C} = E$, yaitu

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Ini sama dengan (1) dengan $m \leftrightarrow L$, $c \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$, $x \leftrightarrow Q$, $F \leftrightarrow E$: induktor ↔ massa, resistor ↔ redaman, kapasitor ↔ pegas.

CONTOH 6 — PENGISIAN KAPASITOR

$L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = \frac{1}{13}$ F, $E = 12$ V (konstan), $Q(0) = 0$, $I(0) = 0$. $Q'' + 6Q' + 13Q = 12$. Karakteristik $r = -3 \pm 2i$. $Q_p = \frac{12}{13}$. $Q = \frac{12}{13} + e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$. $Q(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{12}{13}$. $Q'(0) = -3c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{18}{13}$. $Q(t) = \frac{12}{13} - \frac{e^{-3t}}{13}(12\cos 2t + 18 \sin 2t)$. Muatan mendekati $\frac{12}{13} \approx 0{,}923$ C ($= CE$) setelah osilasi teredam; $Q(1) \approx 0{,}880$ C. Arus $I = Q' \to 0$.

CONTOH 7 — FREKUENSI RESONANSI RANGKAIAN

Rangkaian dengan $L = 0{,}5$ H dan $C = 2\ \mu$F beresonansi pada $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1000$ rad/s, yaitu $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 159$ Hz. Prinsip ini dipakai untuk menala radio.

4. Bandul sederhana

CONTOH 8 — HAMPIRAN SUDUT KECIL

Bandul panjang L dengan sudut simpangan θ: $\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. Untuk sudut kecil $\sin\theta \approx \theta$: $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, periode $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Untuk $L = 1$ m: $T = 2\pi/\sqrt{9{,}8} \approx 2{,}007$ s. Galat hampiran kecil bila amplitudo di bawah sekitar 15°.

5. Kesalahan umum

- Menganggap redaman selalu menyebabkan osilasi: hanya bila $c^2 < 4mk$.
- Menyamakan frekuensi teredam dengan frekuensi alami.
- Menerapkan syarat awal pada x_p saja, bukan pada penyelesaian lengkap.
- Satuan yang tidak konsisten (mis. C dalam μF tanpa mengubah ke F).

6. Ringkasan

- $mx'' + cx' + kx = F(t)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- Redaman: lewat, kritis, kurang; hanya kurang yang berosilasi.
- Resonansi saat $\omega = \omega_0$ (tanpa redaman: amplitudo tak terbatas).
- RLC: $LQ'' + RQ' + Q/C = E$, analog sistem pegas.

Subbab terakhir, 17.4, memberi metode deret pangkat.

17.4 Penyelesaian dengan Deret

Banyak persamaan diferensial penting, misalnya persamaan Airy dan persamaan Hermite, tidak berkoefisien konstan dan tidak punya penyelesaian dalam fungsi elementer. Gagasan: cari penyelesaian dalam bentuk **deret pangkat** $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ dan tentukan koefisien c_n dengan memasukkannya ke persamaan.

1. Metode dasar

Deret pangkat dapat diturunkan suku demi suku dalam interval kekonvergenannya (11.9):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Langkah-langkah:

1. Substitusi y, y', y'' ke persamaan.
2. Geser indeks agar semua deret memuat x^n (atau pangkat yang sama).
3. Samakan koefisien x^n pada kedua ruas sama dengan nol; ini memberi **relasi rekurensi** untuk c_n.
4. Gunakan syarat awal bila ada: $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$.

2. Contoh

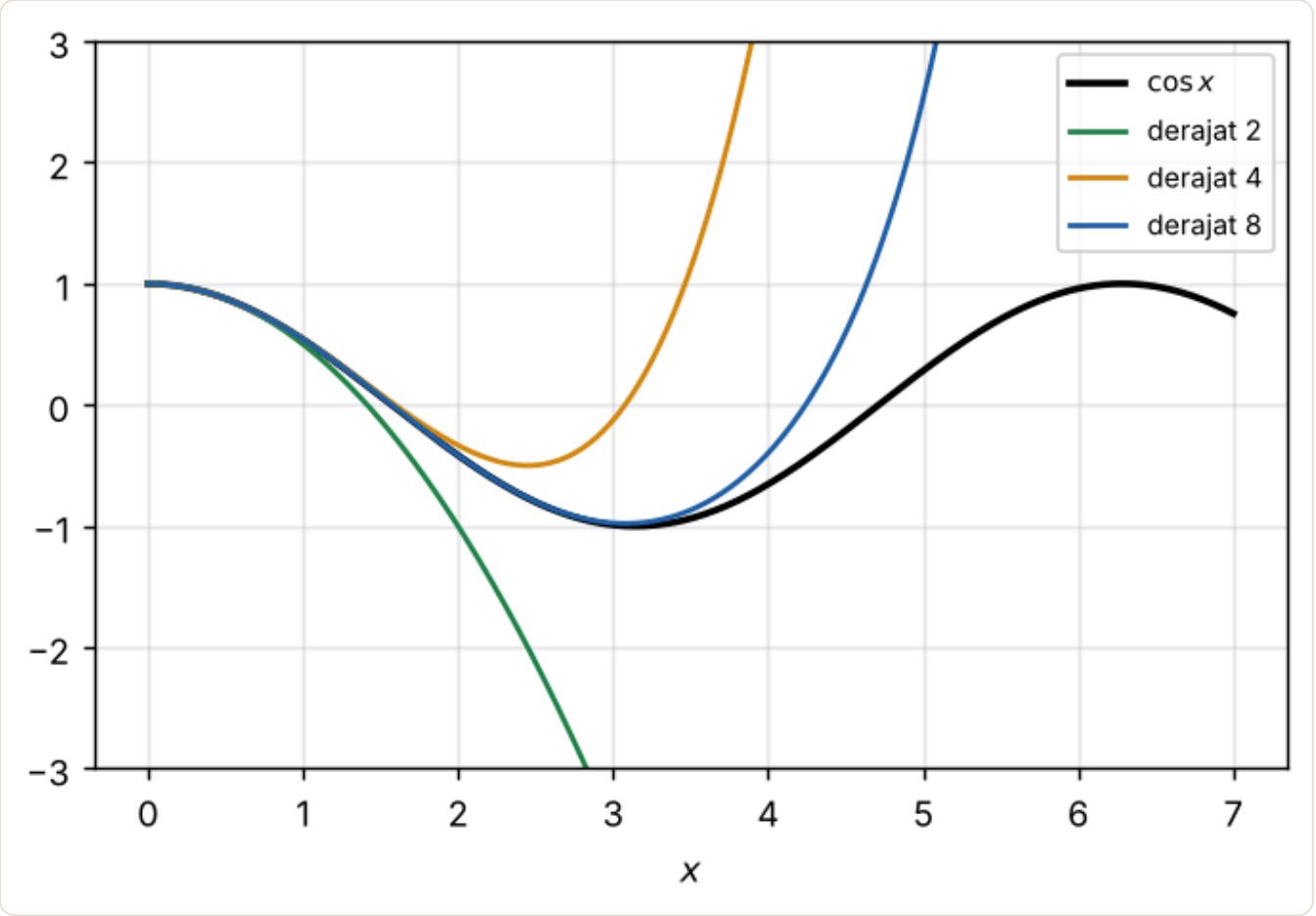
CONTOH 1 — PEMANASAN: $Y' = Y$

$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Geser ruas kiri: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$. Koefisien x^n: $(n+1)c_{n+1} = c_n \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$, jadi $c_n = \frac{c_0}{n!}$ dan $y = c_0 \sum \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$. Metode mengungkap kembali penyelesaian yang kita kenal.

CONTOH 2 — $Y'' + Y = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$. Geser: $\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\big]x^n = 0$. Rekurensi: $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{(n+2)(n+1)}$. Dari c_0: $c_2 = -\frac{c_0}{2}$, $c_4 = \frac{c_0}{24}$, $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$. Dari c_1: $c_3 = -\frac{c_1}{6}$, $c_5 = \frac{c_1}{120}$, $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$. Jadi

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$



Jumlah parsial deret $\cos x$ berderajat 2, 4, dan 8: makin banyak suku, makin lebar selang yang dihampiri.

CONTOH 3 — PERSAMAAN AIRY $Y'' = XY$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$. Ruas kiri dengan indeks $n \to n+2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$; ruas kanan dengan $n \to n-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$. Suku x^0: $2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Untuk $n \geq 1$: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}$, yaitu

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Maka $c_3 = \frac{c_0}{6}$, $c_6 = \frac{c_3}{30} = \frac{c_0}{180}$, $c_4 = \frac{c_1}{12}$, $c_7 = \frac{c_4}{42} = \frac{c_1}{504}$, $c_5 = \frac{c_2}{20} = 0$, seluruh $c_{3k+2} = 0$. Penyelesaian umum

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right).$$

Cek numerik di $x = 1$: untuk $y(0) = 1, y'(0) = 0$ deret memberi $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{12960} \approx 1{,}1723$, sama dengan penyelesaian numerik persamaan (Runge–Kutta) $1{,}1723$. Untuk $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$: $y(1) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{504} + \frac{1}{45360} \approx 1{,}0853$ (suku x pertama sudah termasuk), cocok dengan penyelesaian numerik $1{,}0853$. Fungsi ini adalah fungsi Airy, dipakai dalam optika dan mekanika kuantum.

CONTOH 4 — $Y'' + XY' + Y = 0$

Dengan $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Substitusi: $\sum n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum n c_n x^n + \sum c_n x^n = 0$. Koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0$, sehingga $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{n+2}$. $c_1 = 0 \Rightarrow$ semua suku ganjil nol. $c_0 = 1$: $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{1}{8}$, $c_6 = -\frac{1}{48}$, umum $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k k!}$. Maka $y = \sum \dfrac{(-x^2/2)^k}{k!} = e^{-x^2/2}$. Periksa: $y' = -xy$, $y'' = -y + x^2 y$; $y'' + xy' + y = -y + x^2 y - x^2 y + y = 0$. (Kurva lonceng distribusi normal.)

CONTOH 5 — PERSAMAAN HERMITE, PENYELESAIAN POLINOMIAL

$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$. Rekurensi: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2(n-\lambda)c_n$. Untuk $\lambda = 2$: $c_2 = \frac{2(0-2)}{2}c_0 = -2c_0$; $c_4 = \frac{2(2-2)}{12}c_2 = 0$, dan semua suku genap berikutnya nol. Dengan $c_1 = 0$ diperoleh polinomial $y = c_0(1 - 2x^2)$ (sebanding dengan polinomial Hermite $H_2 = 4x^2 - 2$). Pemeriksaan: $y = 1 - 2x^2$: $y'' = -4$, $-2xy' = -2x(-4x) = 8x^2$, $4y = 4 - 8x^2$; jumlah $-4 + 8x^2 + 4 - 8x^2 = 0$. Bila λ bilangan bulat tak negatif, rekurensi terputus dan menghasilkan polinomial.

CONTOH 6 — MASALAH NILAI AWAL DENGAN $X \neq 0$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Rekurensi dari koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 2c_n = 0$, yaitu $(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n^2+n-2)c_n = (n+2)(n-1)c_n$. Maka $c_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1}c_n$. Untuk $c_1 = 1$: $c_3 = 0$, semua suku ganjil berikutnya nol, jadi $y = x$ (memang $y = x$ memenuhi persamaan: $0 - 2x + 2x = 0$). Untuk $c_0 = 1$: $c_2 = -1$, $c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_6 = \frac{3}{5}c_4 = -\frac{1}{5}$, umum $c_{2k} = -\frac{1}{2k-1}$: $y = 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots$.

3. Selang kekonvergenan dan titik biasa

Untuk persamaan $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, titik x_0 adalah **titik biasa** bila Q/P dan R/P analitik di sana. Maka terdapat dua penyelesaian deret pangkat di sekitar x_0 dengan jari-jari kekonvergenan minimal sejauh jarak ke titik singular (akar P) terdekat, termasuk titik kompleks. Pada Contoh 6, $P = 1 - x^2$ mempunyai akar ± 1, jadi deret konvergen untuk $|x| < 1$. Pada persamaan Airy tidak ada titik singular: konvergen untuk semua x.

TITIK SINGULAR (GAMBARAN)

Bila x_0 titik singular namun "reguler" (mis. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, persamaan Bessel), penyelesaian berbentuk $y = x^r \sum c_n x^n$ (metode Frobenius) dengan r ditentukan dari persamaan indeks. Ini di luar cakupan bab ini, tetapi memberi fungsi Bessel yang muncul pada getaran membran melingkar dan konduksi panas pada silinder.

4. Kesalahan umum

- Lupa menggeser indeks sehingga pangkat x tidak sama sebelum menyamakan koefisien.
- Melewatkan suku awal ketika batas bawah jumlah berbeda (mis. $c_2 = 0$ pada persamaan Airy).
- Menganggap c_0 dan c_1 harus ditentukan: keduanya konstanta bebas sampai syarat awal diberikan.
- Memakai deret di luar jari-jari kekonvergenannya.

5. Ringkasan

- Pakai $y = \sum c_n x^n$; samakan koefisien x^n untuk memperoleh rekurensi.
- $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$; dua konstanta bebas = dua penyelesaian.

- Hasil dapat dikenali sebagai fungsi elementer (e^x, $\cos x$, $e^{-x^2/2}$) atau fungsi khusus (Airy, Hermite, Bessel).

Subbab ini menutup Bab 17.