Bab 17: Persamaan Diferensial Orde Dua

Bab 17 · Persamaan Diferensial Orde Dua

17.1 Persamaan Linear Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua muncul di mana-mana: getaran pegas, rangkaian listrik, bandul, gelombang. Pada subbab ini kita membahas jenis yang paling penting dan dapat diselesaikan secara tuntas, yaitu persamaan **linear homogen dengan koefisien konstan**.

1. Persamaan linear orde dua

DEFINISI

Persamaan diferensial linear orde dua berbentuk

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x),$$

dengan P, Q, R, G fungsi kontinu. Bila $G(x) \equiv 0$, persamaan disebut **homogen**; bila tidak, **takhomogen** (17.2). Bila P, Q, R konstanta, persamaannya *berkoefisien konstan*.

Pada subbab ini kita mempelajari

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a, b, c \text{ konstanta},\ a \neq 0. \tag{1}$$

PRINSIP SUPERPOSISI

Jika y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan linear homogen, maka $c_1 y_1 + c_2 y_2$ juga penyelesaian untuk sembarang konstanta c_1, c_2.

Bukti. $a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0$. ■

TEOREMA

Jika y_1, y_2 penyelesaian (1) yang **bebas linear** (tidak ada yang merupakan kelipatan konstan yang lain), maka penyelesaian umum (1) adalah

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Kebebasan linear dapat diuji dengan *Wronskian* $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$.

MASALAH NILAI AWAL DAN BATAS

Masalah nilai awal: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Teorema eksistensi dan ketunggalan menjamin tepat satu penyelesaian. *Masalah nilai batas*: $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$; penyelesaiannya bisa tunggal, tak ada, atau tak hingga banyak.

2. Persamaan karakteristik

Coba penyelesaian $y = e^{rx}$. Maka $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, dan (1) menjadi $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Karena $e^{rx} \neq 0$:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{persamaan karakteristik}), \qquad r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

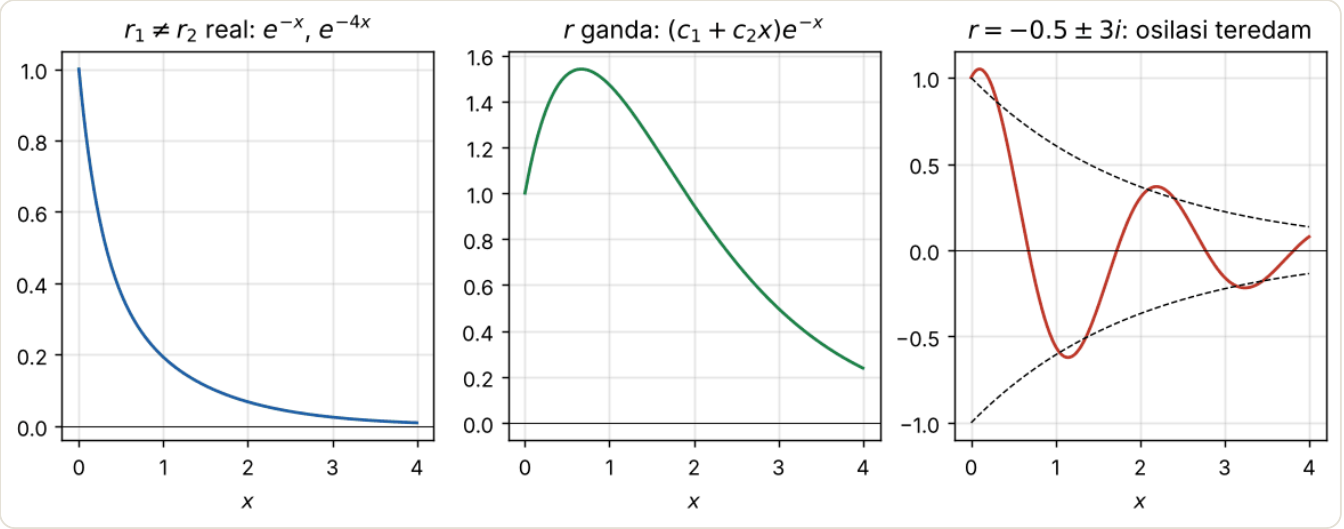
Tiga kasus bergantung pada diskriminan $D = b^2 - 4ac$.

PENYELESAIAN UMUM

AKAR KARAKTERISTIK	PENYELESAIAN UMUM
$D > 0$: **DUA AKAR REAL BERBEDA** R_1, R_2	$Y = C_1 E^{R_1 X} + C_2 E^{R_2 X}$
$D = 0$: **AKAR GANDA** R	$Y = (C_1 + C_2 X) E^{RX}$
$D < 0$: **AKAR KOMPLEKS** $A \pm IB$	$Y = E^{AX}(C_1 \cos BX + C_2 \sin BX)$

Mengapa xe^{rx} pada kasus ganda? Akar ganda berarti $r = -\frac{b}{2a}$ dan $ar^2 + br + c = a(r - r_0)^2$. Uji $y = xe^{r_0 x}$: $y' = (1 + r_0 x)e^{r_0 x}$, $y'' = (2r_0 + r_0^2 x)e^{r_0 x}$; $ay'' + by' + cy = e^{r_0 x}\left[a(2r_0 + r_0^2 x) + b(1 + r_0 x) + cx\right] = e^{r_0 x}\left[(2ar_0 + b) + x(ar_0^2 + br_0 + c)\right] = 0$, karena $2ar_0 + b = 0$ dan r_0 akar.

Mengapa sinus dan cosinus pada kasus kompleks? Rumus Euler $e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$ (11.10). Akar $\alpha \pm i\beta$ memberi $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x)$; bagian real dan imajiner masing-masing adalah penyelesaian real yang bebas linear (kombinasi linear penyelesaian kompleks).



Tiga bentuk penyelesaian: akar real berbeda, akar ganda, dan akar kompleks.

3. Contoh

CONTOH 1 — DUA AKAR REAL

$y'' - y' - 6y = 0$: $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$, $r = 3, -2$. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = 1$ dan $3c_1 - 2c_2 = 0$, jadi $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{5}$: $y = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$; misalnya $y(1) \approx 8{,}115$.

CONTOH 2 — AKAR GANDA

$y'' + 6y' + 9y = 0$: $(r+3)^2 = 0$, $r = -3$. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$. Dengan $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$: $c_1 = 2$; $y' = (c_2 - 3c_1 - 3c_2x)e^{-3x}$, $y'(0) = c_2 - 6 = -1 \Rightarrow c_2 = 5$. $y = (2 + 5x)e^{-3x}$, $y(1) = 7e^{-3} \approx 0{,}3485$.

CONTOH 3 — AKAR KOMPLEKS

$y'' - 2y' + 5y = 0$: $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$: $c_1 = 1$; $y'(0) = \alpha c_1 + \beta c_2 = c_1 + 2c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 1$. $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$, $y(1) = e(\cos 2 + \sin 2) \approx 1{,}3405$.

CONTOH 4 — AKAR IMAJINER MURNI

$y'' + 4y = 0$: $r = \pm 2i$, $\alpha = 0$. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$: gelombang tanpa peredam. Dapat juga ditulis $y = A\cos(2x - \delta)$ dengan amplitudo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

CONTOH 5 — PERSAMAAN DENGAN KOEFISIEN UTAMA

$4y'' - 12y' + 9y = 0$: $4r^2 - 12r + 9 = (2r-3)^2 = 0$, $r = \frac{3}{2}$ ganda. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x/2}$. Persamaan $y'' - y = 0$: $r = \pm 1$, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, yang juga dapat ditulis $y = A\cosh x + B\sinh x$.

CONTOH 6 — MENYUSUN PERSAMAAN DARI AKAR

Persamaan dengan penyelesaian e^{2x} dan e^{-5x}: akar $2, -5$, karakteristik $(r-2)(r+5) = r^2 + 3r - 10$, jadi $y'' + 3y' - 10y = 0$.

CONTOH 7 — WRONSKIAN

Untuk $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$: $W = e^{3x}(-2e^{-2x}) - 3e^{3x}e^{-2x} = -5e^x \neq 0$: bebas linear. Untuk $y_1 = \cos 2x$ dan $y_2 = \sin 2x$: $W = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$.

4. Masalah nilai batas

CONTOH 8 — SATU PENYELESAIAN

$y'' + 2y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = 2$. $y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$. $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$.

$$y(\pi) = \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \sin\sqrt{2}\pi = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2 - \cos\sqrt{2}\pi}{\sin\sqrt{2}\pi} \approx \frac{2 + 0{,}266}{-0{,}964} \approx -2{,}351.$$

Penyelesaian tunggal.

CONTOH 9 — TAK ADA ATAU TAK HINGGA BANYAK

$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1$: $y = c_1\cos x + c_2 \sin x$, $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $y(\pi) = c_2 \sin\pi = 0 \neq 1$. **Tidak ada penyelesaian.** Bila $y(\pi) = 0$, maka $y = c_2 \sin x$ untuk sembarang c_2: **tak hingga banyak**. Berbeda dengan masalah nilai awal, masalah nilai batas tidak otomatis mempunyai penyelesaian tunggal.

CONTOH 10 — NILAI EIGEN

$y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$. Untuk $\lambda = \mu^2 > 0$: $y = c\sin\mu x$ dan $y(L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi$. Nilai $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}$: inilah mode getar senar bertepi tetap. Untuk $\lambda \leq 0$ hanya $y \equiv 0$.

5. Kesalahan umum

- Mencampur tanda pada persamaan karakteristik (mis. $y'' - y' - 6y \to r^2 - r - 6$, bukan $r^2 + r - 6$).
- Pada akar kompleks, lupa faktor $e^{\alpha x}$ atau memakai β yang salah (β adalah bagian imajiner, bukan β^2).
- Pada akar ganda, menulis $c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx}$ (tidak bebas linear): perlu faktor x.
- Menganggap masalah nilai batas selalu mempunyai penyelesaian tunggal.

6. Ringkasan

- $ay'' + by' + cy = 0$: selesaikan $ar^2 + br + c = 0$.
- Real berbeda: $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$; ganda: $(c_1 + c_2 x)e^{rx}$; kompleks: $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.
- Dua syarat awal menentukan c_1, c_2 secara tunggal.

Berikutnya 17.2 Persamaan Linear Takhomogen.

17.2 Persamaan Linear Takhomogen

Sekarang kita menyelesaikan persamaan yang ruas kanannya tidak nol:

$$ay'' + by' + cy = G(x). \tag{1}$$

Ruas kanan G mewakili gaya luar atau masukan. Ada dua metode utama: **koefisien tak tentu** dan **variasi parameter**.

1. Struktur penyelesaian

TEOREMA

Penyelesaian umum (1) adalah

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x),$$

dengan y_p satu penyelesaian khusus (partikular) (1) dan y_c penyelesaian umum persamaan homogen terkait $ay'' + by' + cy = 0$ (disebut *penyelesaian komplementer*, 17.1).

Bukti. Misalkan y penyelesaian apa saja dan y_p satu penyelesaian khusus. Maka $a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) = G - G = 0$, sehingga $y - y_p$ memenuhi persamaan homogen, yaitu $y - y_p = y_c$ untuk suatu pilihan c_1, c_2. ■

2. Koefisien tak tentu

Bila G berupa polinomial, eksponensial, sinus/cosinus, atau hasil kali/jumlah keduanya, kita menebak bentuk y_p dengan koefisien yang dicari.

TEBAKAN Y_P

$G(X)$	**TEBAKAN** Y_P
$P_N(X)$ **(POLINOMIAL DERAJAT** N**)**	$A_N X^N + \cdots + A_1 X + A_0$
E^{SX}	AE^{SX}
$\cos \Omega X$ **ATAU** $\sin \Omega X$	$A \cos \Omega X + B \sin \Omega X$
$P_N(X)E^{SX}$	$Q_N(X)E^{SX}$ **(POLINOMIAL UMUM DERAJAT** N**)**
$E^{SX}\cos \Omega X$ **ATAU** $E^{SX}\sin \Omega X$	$E^{SX}(A \cos \Omega X + B \sin \Omega X)$

Aturan modifikasi: bila ada suku tebakan yang juga merupakan penyelesaian homogen (muncul dalam y_c), kalikan seluruh tebakan dengan x (atau x^2 bila akar ganda) sampai tidak ada suku yang sama dengan suku y_c.

CONTOH 1 — POLINOMIAL

$y'' + 3y' + 2y = x^2$. Homogen: $r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$. Tebakan $y_p = Ax^2 + Bx + C$: $2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$. Samakan koefisien: x^2: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; x: $6A + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$; konstanta: $2A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$. $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Dengan $y(0) = 1, y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = -\frac{3}{4}$, $-c_1 - 2c_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0$. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-2x}$.

CONTOH 2 — EKSPONENSIAL

$y'' + 4y = e^{3x}$. $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Tebakan $y_p = Ae^{3x}$: $9A + 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{13}$. $y = \frac{1}{13}e^{3x} + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

CONTOH 3 — SINUS

$y'' - 3y' + 2y = \sin x$. $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Tebakan $y_p = A\cos x + B \sin x$ (kedua suku walau ruas kanan hanya sinus, karena y' membawa cosinus). $y_p' = -A \sin x + B \cos x$, $y_p'' = -A \cos x - B \sin x$. Substitusi: $\cos x$: $-A - 3B + 2A = A - 3B = 0$; $\sin x$: $-B + 3A + 2B = 3A + B = 1$. Jadi $A = 3B$, $10B = 1$: $y_p = \dfrac{3\cos x + \sin x}{10}$.

CONTOH 4 — RESONANSI (ATURAN MODIFIKASI)

$y'' + y = \cos x$. $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Tebakan $A \cos x + B \sin x$ sama dengan y_c dan menghasilkan 0. Kalikan dengan x: $y_p = x(A \cos x + B \sin x)$. $y_p'' = 2(-A \sin x + B \cos x) + x(-A \cos x - B \sin x)$, jadi $y_p'' + y_p = -2A \sin x + 2B \cos x = \cos x \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}$. $y_p = \frac{1}{2} x \sin x$. Amplitudo tumbuh tanpa batas: gejala *resonansi* (17.3).

CONTOH 5 — AKAR GANDA DAN EKSPONENSIAL YANG SAMA

$y'' - 2y' + y = e^x$. $y_c = (c_1 + c_2 x)e^x$. e^x dan xe^x sudah ada di y_c, jadi tebakan $y_p = Ax^2 e^x$. $y_p' = (2Ax + Ax^2)e^x$, $y_p'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$. $y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. $y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x$.

CONTOH 6 — JUMLAH BEBERAPA SUKU

$y'' + y' - 2y = x + e^{-x}$. Pakai superposisi: selesaikan terpisah untuk $G_1 = x$ dan $G_2 = e^{-x}$, lalu jumlahkan. Homogen: $r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1)$, akar $-2, 1$, jadi tidak ada tabrakan. Untuk $G_1 = x$: $y_{p1} = Ax + B$, $y_{p1}' = A$, sehingga $A - 2(Ax + B) = x$: $-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$, dan $A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$. Untuk $G_2 = e^{-x}$: $y_{p2} = Ce^{-x}$, $(1 - 1 - 2)Ce^{-x} = e^{-x} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$. Jadi $y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-x}$ dan $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + y_p$.

3. Variasi parameter

Metode ini berlaku untuk sembarang G (dan bahkan koefisien tidak konstan), asalkan penyelesaian homogen diketahui.

VARIASI PARAMETER

Untuk $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ (koefisien utama 1), misalkan y_1, y_2 dua penyelesaian homogen yang bebas linear dengan Wronskian $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Maka

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2\, g}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1\, g}{W}\, dx.$$

Gagasan. Cari $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ ("mengubah" konstanta menjadi fungsi). Pilih syarat $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ agar $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$. Substitusi ke persamaan memberi $u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$. Dua persamaan linear untuk u_1', u_2' dengan determinan W menghasilkan $u_1' = -\frac{y_2 g}{W}$, $u_2' = \frac{y_1 g}{W}$ (aturan Cramer).

CONTOH 7 — $Y'' + Y = \mathrm{TAN}\, X$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $W = 1$. $u_1' = -\sin x \tan x = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$, $u_1 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$. $u_2' = \cos x \tan x = \sin x$, $u_2 = -\cos x$. $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x = \sin x \cos x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \sin x \cos x = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$. Penyelesaian umum: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$. (Koefisien tak tentu tidak dapat dipakai untuk $\tan x$.)

CONTOH 8 — AKAR GANDA DENGAN $G = E^{-2X}/X$

$y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$, $x > 0$. $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, $W = e^{-4x}$. $u_1' = -\dfrac{xe^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = -1 \Rightarrow u_1 = -x$. $u_2' = \dfrac{e^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow u_2 = \ln x$. $y_p = -xe^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$. Suku $-xe^{-2x}$ dapat digabung ke $c_2 xe^{-2x}$, jadi $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$.

CONTOH 9 — MEMERIKSA PENYELESAIAN

Periksa $y_p = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$ pada Contoh 7: $y_p' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x \cdot \sec x = \sin x \ln(\cdot) - 1$, $y_p'' = \cos x \ln(\cdot) + \sin x \sec x = \cos x \ln(\cdot) + \tan x$. $y_p'' + y_p = \tan x$. Cocok.

4. Memilih metode

Situasi	Metode
Koefisien konstan, G polinomial/eksponensial/trigonometri	Koefisien tak tentu (lebih cepat)
G sembarang ($\tan x$, $1/x$, $\ln x$, $\sec x$)	Variasi parameter
Koefisien tidak konstan, y_1, y_2 diketahui	Variasi parameter

5. Kesalahan umum

- Lupa bahwa syarat awal diterapkan pada $y = y_p + y_c$, bukan pada y_c saja.
- Tebakan $\cos$ hanya untuk ruas kanan $\cos$: selalu sertakan $\sin$ juga.
- Tidak memodifikasi tebakan yang bertabrakan dengan y_c.

- Memakai variasi parameter tanpa membagi persamaan sehingga koefisien y'' sama dengan 1.

6. Ringkasan

- $y = y_p + y_c$.
- Koefisien tak tentu: tebak bentuk y_p, modifikasi bila bertabrakan dengan y_c.
- Variasi parameter: $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} + y_2 \int \frac{y_1 g}{W}$.

Berikutnya 17.3 Penerapan.

17.3 Penerapan Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan menggambarkan banyak sistem osilasi: pegas dan peredam, bandul kecil, rangkaian listrik RLC. Matematikanya sama; hanya tafsir peubahnya berbeda.

1. Getaran pegas

Sebuah benda bermassa m digantung pada pegas. Misalkan $x(t)$ adalah simpangan dari posisi seimbang (arah ke bawah positif). Gaya yang bekerja:

- gaya pemulih pegas (hukum Hooke): $-kx$, dengan $k > 0$ konstanta pegas;
- gaya redaman (kekentalan): $-c\,x'$, dengan $c \geq 0$ koefisien redaman;
- gaya luar $F(t)$ (bila ada).

Hukum II Newton $mx'' = -kx - cx' + F(t)$ memberikan

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Getaran bebas tanpa redaman

$c = 0$, $F = 0$: $mx'' + kx = 0$, karakteristik $mr^2 + k = 0$, $r = \pm i\omega_0$ dengan $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = A\cos(\omega_0 t - \delta), \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Gerak harmonik sederhana dengan frekuensi sudut ω_0, periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, amplitudo A tetap.

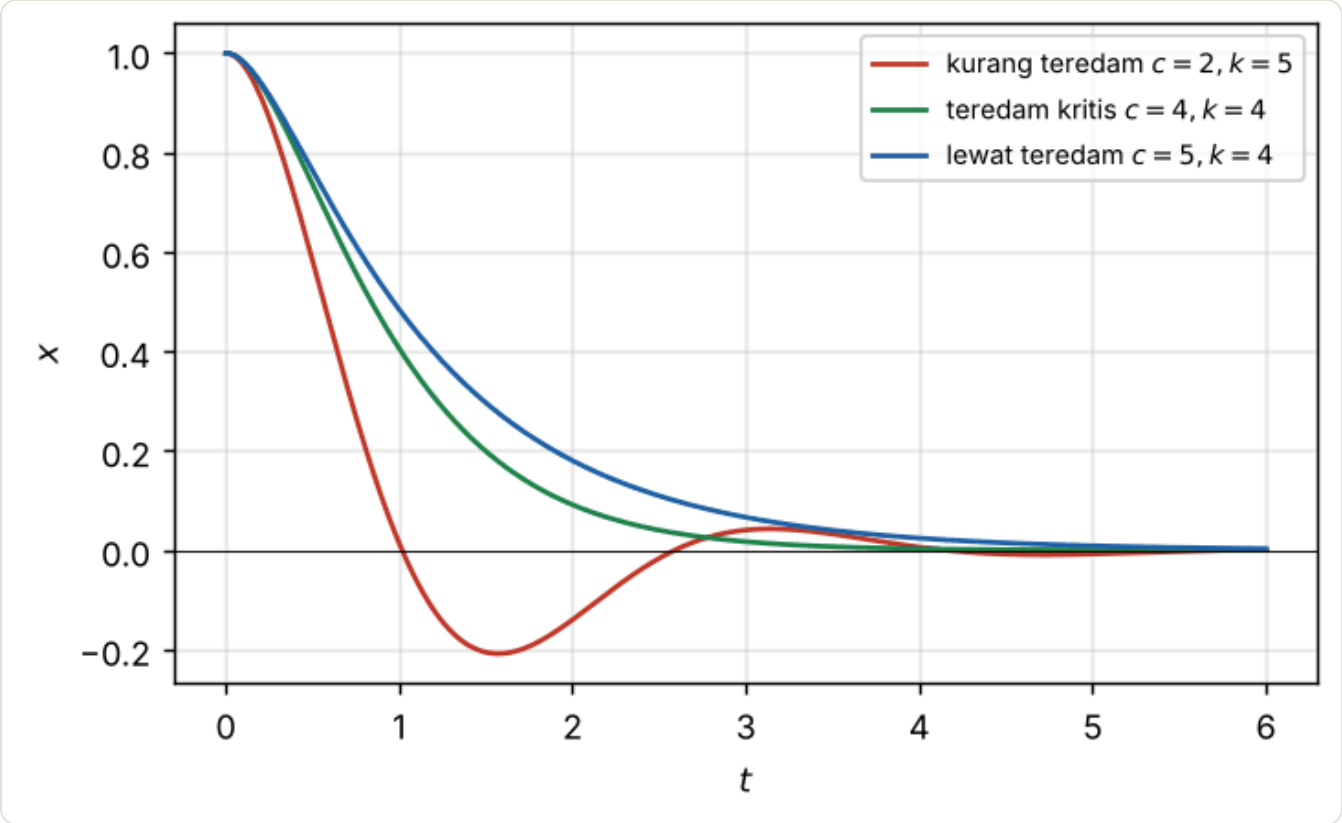
> **CONTOH 1 — PEGAS TANPA REDAMAN**
>
> Benda 2 kg pada pegas dengan $k = 18$ N/m, ditarik 0,5 m ke bawah lalu dilepas. $\omega_0 = \sqrt{18/2} = 3$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ s. $x(0) = 0{,}5$, $x'(0) = 0$: $x = 0{,}5\cos 3t$. Laju maksimum $A\omega_0 = 1{,}5$ m/s (terjadi di posisi seimbang).

Getaran bebas teredam

$mx'' + cx' + kx = 0$. Karakteristik $mr^2 + cr + k = 0$, diskriminan $c^2 - 4mk$:

TIGA JENIS REDAMAN

- **Lewat teredam** ($c^2 > 4mk$): dua akar real negatif r_1, r_2; $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$. Tidak berosilasi; kembali ke keseimbangan perlahan (pegas dalam oli kental).
- **Teredam kritis** ($c^2 = 4mk$): $x = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$, $r = -\frac{c}{2m}$. Kembali ke keseimbangan tercepat tanpa berosilasi (peredam pintu, suspensi ideal).
- **Kurang teredam** ($c^2 < 4mk$): $r = -\frac{c}{2m} \pm i\omega$, $\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$; $x = e^{-ct/2m}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$. Berosilasi dengan amplitudo meluruh eksponensial.



Simpangan untuk tiga jenis redaman ($m = 1$).

CONTOH 2 — KURANG TEREDAM

$x'' + 2x' + 5x = 0$ ($m = 1, c = 2, k = 5$): $c^2 - 4mk = 4 - 20 < 0$. $r = -1 \pm 2i$. $x(0) = 1, x'(0) = 0$: $c_1 = 1$, $x'(0) = -c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$. $x = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)$. Nilai pada $t = 1$: $\approx 0{,}0142$ (meluruh cepat). Frekuensi sudut teredam 2, lebih kecil dari frekuensi alami $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

CONTOH 3 — TEREDAM KRITIS DAN LEWAT TEREDAM

- $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -2$ ganda, $x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$, $c_1 = 1$, $c_2 - 2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$. $x = (1 + 2t)e^{-2t}$, selalu positif; tidak melewati keseimbangan.
- $x'' + 5x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -1, -4$; $c_1 + c_2 = 1$, $-c_1 - 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$. $x = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$.

2. Getaran paksa dan resonansi

Bila gaya luar periodik $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

Tanpa redaman

$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t$, penyelesaian $x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + x_p$. Untuk $\omega \neq \omega_0$: $x_p = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$. Bila $\omega = \omega_0$ terjadi **resonansi**: $x_p = \dfrac{F_0}{2m\omega_0}\, t \sin \omega_0 t$, amplitudo tumbuh linear tanpa batas.

CONTOH 4 — RESONANSI

$x'' + 9x = \cos 3t$ ($m = 1$, $\omega_0 = 3$, $F_0 = 1$). Tebakan $x_p = t(A \cos 3t + B \sin 3t)$; hasilnya $x_p = \frac{t}{6} \sin 3t$. Dengan $x(0) = x'(0) = 0$: $x = \frac{t}{6} \sin 3t$. Amplitudo $\frac{t}{6}$ tumbuh tanpa batas (pada $t = 30$ s sudah 5 m). Pada sistem nyata, redaman atau kegagalan struktural membatasinya (jembatan, gelas yang pecah oleh nada).

Dengan redaman

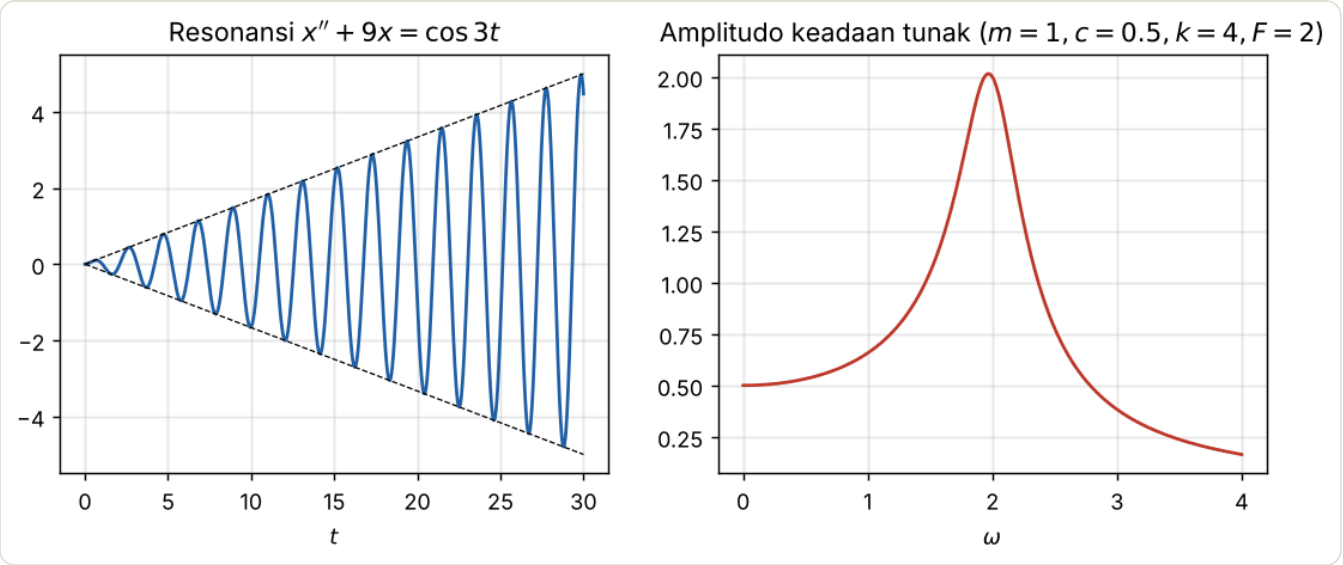
Untuk $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$, bagian komplementer meluruh (*transien*) dan yang bertahan adalah *keadaan tunak* $x_p = A \cos(\omega t - \alpha)$ dengan amplitudo

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}.$$

Amplitudo maksimum terjadi di $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}$ (bila $c^2 < 2mk$): *resonansi praktis*. Makin kecil c, makin tinggi puncak.

CONTOH 5 — AMPLITUDO KEADAAN TUNAK

$m = 1$, $c = 0{,}5$, $k = 4$, $F_0 = 2$. $A(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + 0{,}25\omega^2}}$. $A(1) \approx 0{,}658$; $A(2) = \dfrac{2}{\sqrt{0+1}} = 2$; puncak di $\omega = \sqrt{4 - 0{,}125} \approx 1{,}969$ dengan $A \approx 2{,}016$. Puncak sedikit di bawah frekuensi alami $\omega_0 = 2$.



Kiri: resonansi tanpa redaman. Kanan: kurva amplitudo keadaan tunak.

3. Rangkaian listrik RLC

Rangkaian seri dengan induktor L (henry), resistor R (ohm), kapasitor C (farad), dan sumber tegangan $E(t)$ (volt). Muatan $Q(t)$ pada kapasitor, arus $I = Q'$. Hukum tegangan Kirchhoff: $LI' + RI + \frac{Q}{C} = E$, yaitu

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Ini sama dengan (1) dengan $m \leftrightarrow L$, $c \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$, $x \leftrightarrow Q$, $F \leftrightarrow E$: induktor ↔ massa, resistor ↔ redaman, kapasitor ↔ pegas.

CONTOH 6 — PENGISIAN KAPASITOR

$L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = \frac{1}{13}$ F, $E = 12$ V (konstan), $Q(0) = 0$, $I(0) = 0$. $Q'' + 6Q' + 13Q = 12$. Karakteristik $r = -3 \pm 2i$. $Q_p = \frac{12}{13}$. $Q = \frac{12}{13} + e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$. $Q(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{12}{13}$. $Q'(0) = -3c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{18}{13}$. $Q(t) = \frac{12}{13} - \frac{e^{-3t}}{13}(12\cos 2t + 18 \sin 2t)$. Muatan mendekati $\frac{12}{13} \approx 0{,}923$ C ($= CE$) setelah osilasi teredam; $Q(1) \approx 0{,}880$ C. Arus $I = Q' \to 0$.

CONTOH 7 — FREKUENSI RESONANSI RANGKAIAN

Rangkaian dengan $L = 0{,}5$ H dan $C = 2\ \mu$F beresonansi pada $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1000$ rad/s, yaitu $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 159$ Hz. Prinsip ini dipakai untuk menala radio.

4. Bandul sederhana

CONTOH 8 — HAMPIRAN SUDUT KECIL

Bandul panjang L dengan sudut simpangan θ: $\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. Untuk sudut kecil $\sin\theta \approx \theta$: $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, periode $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Untuk $L = 1$ m: $T = 2\pi/\sqrt{9{,}8} \approx 2{,}007$ s. Galat hampiran kecil bila amplitudo di bawah sekitar 15°.

5. Kesalahan umum

- Menganggap redaman selalu menyebabkan osilasi: hanya bila $c^2 < 4mk$.
- Menyamakan frekuensi teredam dengan frekuensi alami.
- Menerapkan syarat awal pada x_p saja, bukan pada penyelesaian lengkap.
- Satuan yang tidak konsisten (mis. C dalam μF tanpa mengubah ke F).

6. Ringkasan

- $mx'' + cx' + kx = F(t)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- Redaman: lewat, kritis, kurang; hanya kurang yang berosilasi.
- Resonansi saat $\omega = \omega_0$ (tanpa redaman: amplitudo tak terbatas).
- RLC: $LQ'' + RQ' + Q/C = E$, analog sistem pegas.

Subbab terakhir, 17.4, memberi metode deret pangkat.

17.4 Penyelesaian dengan Deret

Banyak persamaan diferensial penting, misalnya persamaan Airy dan persamaan Hermite, tidak berkoefisien konstan dan tidak punya penyelesaian dalam fungsi elementer. Gagasan: cari penyelesaian dalam bentuk **deret pangkat** $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ dan tentukan koefisien c_n dengan memasukkannya ke persamaan.

1. Metode dasar

Deret pangkat dapat diturunkan suku demi suku dalam interval kekonvergenannya (11.9):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Langkah-langkah:

1. Substitusi y, y', y'' ke persamaan.
2. Geser indeks agar semua deret memuat x^n (atau pangkat yang sama).
3. Samakan koefisien x^n pada kedua ruas sama dengan nol; ini memberi **relasi rekurensi** untuk c_n.
4. Gunakan syarat awal bila ada: $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$.

2. Contoh

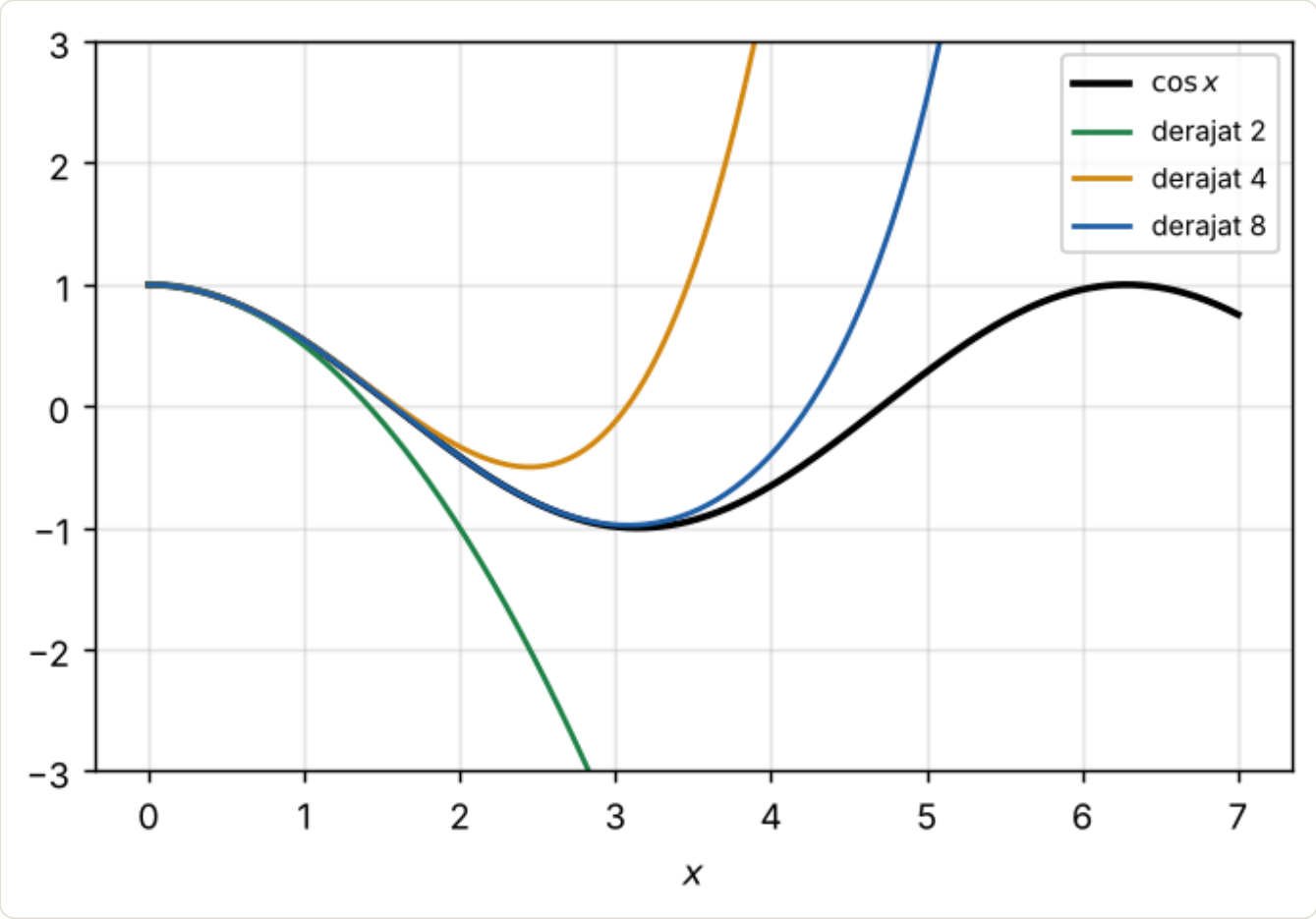
CONTOH 1 — PEMANASAN: $Y' = Y$

$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Geser ruas kiri: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$. Koefisien x^n: $(n+1)c_{n+1} = c_n \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$, jadi $c_n = \frac{c_0}{n!}$ dan $y = c_0 \sum \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$. Metode mengungkap kembali penyelesaian yang kita kenal.

CONTOH 2 — $Y'' + Y = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$. Geser: $\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\big]x^n = 0$. Rekurensi: $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{(n+2)(n+1)}$. Dari c_0: $c_2 = -\frac{c_0}{2}$, $c_4 = \frac{c_0}{24}$, $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$. Dari c_1: $c_3 = -\frac{c_1}{6}$, $c_5 = \frac{c_1}{120}$, $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$. Jadi

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$



Jumlah parsial deret $\cos x$ berderajat 2, 4, dan 8: makin banyak suku, makin lebar selang yang dihampiri.

CONTOH 3 — PERSAMAAN AIRY $Y'' = XY$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$. Ruas kiri dengan indeks $n \to n+2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$; ruas kanan dengan $n \to n-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$. Suku x^0: $2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Untuk $n \geq 1$: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}$, yaitu

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Maka $c_3 = \frac{c_0}{6}$, $c_6 = \frac{c_3}{30} = \frac{c_0}{180}$, $c_4 = \frac{c_1}{12}$, $c_7 = \frac{c_4}{42} = \frac{c_1}{504}$, $c_5 = \frac{c_2}{20} = 0$, seluruh $c_{3k+2} = 0$. Penyelesaian umum

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right).$$

Cek numerik di $x = 1$: untuk $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ deret memberi $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{12960} \approx 1{,}1723$, sama dengan penyelesaian numerik persamaan (Runge–Kutta) $1{,}1723$. Untuk $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$: $y(1) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{504} + \frac{1}{45360} \approx 1{,}0853$ (suku x pertama sudah termasuk), cocok dengan penyelesaian numerik $1{,}0853$. Fungsi ini adalah fungsi Airy, dipakai dalam optika dan mekanika kuantum.

CONTOH 4 — $Y'' + XY' + Y = 0$

Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Substitusi: $\sum n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum n c_n x^n + \sum c_n x^n = 0$. Koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0$, sehingga $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{n+2}$. $c_1 = 0 \Rightarrow$ semua suku ganjil nol. $c_0 = 1$: $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{1}{8}$, $c_6 = -\frac{1}{48}$, umum $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k k!}$. Maka $y = \sum \dfrac{(-x^2/2)^k}{k!} = e^{-x^2/2}$. Periksa: $y' = -xy$, $y'' = -y + x^2 y$; $y'' + xy' + y = -y + x^2 y - x^2 y + y = 0$. (Kurva lonceng distribusi normal.)

CONTOH 5 — PERSAMAAN HERMITE, PENYELESAIAN POLINOMIAL

$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$. Rekurensi: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2(n-\lambda)c_n$. Untuk $\lambda = 2$: $c_2 = \frac{2(0-2)}{2}c_0 = -2c_0$; $c_4 = \frac{2(2-2)}{12}c_2 = 0$, dan semua suku genap berikutnya nol. Dengan $c_1 = 0$ diperoleh polinomial $y = c_0(1 - 2x^2)$ (sebanding dengan polinomial Hermite $H_2 = 4x^2 - 2$). Pemeriksaan: $y = 1 - 2x^2$: $y'' = -4$, $-2xy' = -2x(-4x) = 8x^2$, $4y = 4 - 8x^2$; jumlah $-4 + 8x^2 + 4 - 8x^2 = 0$. Bila λ bilangan bulat tak negatif, rekurensi terputus dan menghasilkan polinomial.

CONTOH 6 — MASALAH NILAI AWAL DENGAN $X \neq 0$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Rekurensi dari koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 2c_n = 0$, yaitu $(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n^2+n-2)c_n = (n+2)(n-1)c_n$. Maka $c_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1}c_n$. Untuk $c_1 = 1$: $c_3 = 0$, semua suku ganjil berikutnya nol, jadi $y = x$ (memang $y = x$ memenuhi persamaan: $0 - 2x + 2x = 0$). Untuk $c_0 = 1$: $c_2 = -1$, $c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_6 = \frac{3}{5}c_4 = -\frac{1}{5}$, umum $c_{2k} = -\frac{1}{2k-1}$: $y = 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots$.

3. Selang kekonvergenan dan titik biasa

Untuk persamaan $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, titik x_0 adalah **titik biasa** bila Q/P dan R/P analitik di sana. Maka terdapat dua penyelesaian deret pangkat di sekitar x_0 dengan jari-jari kekonvergenan minimal sejauh jarak ke titik singular (akar P) terdekat, termasuk titik kompleks. Pada Contoh 6, $P = 1 - x^2$ mempunyai akar ± 1, jadi deret konvergen untuk $|x| < 1$. Pada persamaan Airy tidak ada titik singular: konvergen untuk semua x.

TITIK SINGULAR (GAMBARAN)

Bila x_0 titik singular namun "reguler" (mis. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, persamaan Bessel), penyelesaian berbentuk $y = x^r \sum c_n x^n$ (metode Frobenius) dengan r ditentukan dari persamaan indeks. Ini di luar cakupan bab ini, tetapi memberi fungsi Bessel yang muncul pada getaran membran melingkar dan konduksi panas pada silinder.

4. Kesalahan umum

- Lupa menggeser indeks sehingga pangkat x tidak sama sebelum menyamakan koefisien.
- Melewatkan suku awal ketika batas bawah jumlah berbeda (mis. $c_2 = 0$ pada persamaan Airy).
- Menganggap c_0 dan c_1 harus ditentukan: keduanya konstanta bebas sampai syarat awal diberikan.
- Memakai deret di luar jari-jari kekonvergenannya.

5. Ringkasan

- Pakai $y = \sum c_n x^n$; samakan koefisien x^n untuk memperoleh rekurensi.
- $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$; dua konstanta bebas = dua penyelesaian.

- Hasil dapat dikenali sebagai fungsi elementer (e^x, $\cos x$, $e^{-x^2/2}$) atau fungsi khusus (Airy, Hermite, Bessel).

Subbab ini menutup Bab 17.