Bab 16: Kalkulus Vektor

Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.1 Medan Vektor

Di Bab 14 setiap titik di bidang diberi sebuah *bilangan* (suhu, tinggi). Sekarang setiap titik diberi sebuah *vektor*: arah dan kecepatan angin, kuat dan arah gaya gravitasi, medan listrik. Objek seperti ini disebut **medan vektor**, dan subbab-subbab Bab 16 membangun kalkulus untuknya.

1. Definisi

MEDAN VEKTOR

Misalkan $D \subseteq \mathbb{R}^2$. **Medan vektor pada** D adalah fungsi $\mathbf{F}$ yang mengaitkan setiap titik $(x, y) \in D$ dengan vektor dua dimensi $\mathbf{F}(x, y)$:

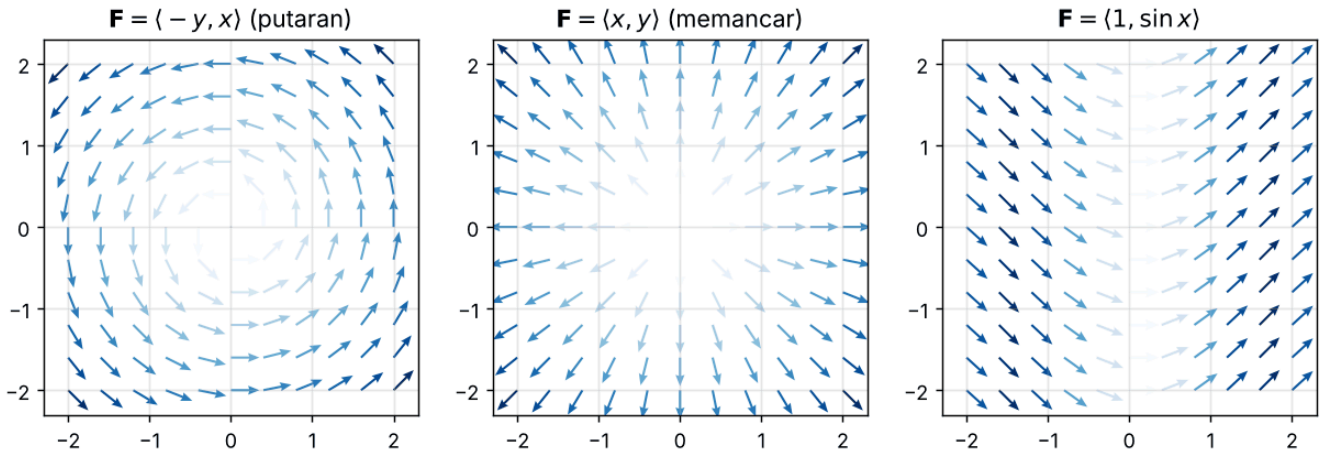
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle.$$

Di ruang, untuk $E \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z) \rangle.$$

P, Q, R disebut *fungsi komponen* (fungsi skalar). $\mathbf{F}$ kontinu atau terdiferensialkan bila semua komponennya demikian.

Cara menggambarnya: pilih beberapa titik, dan gambar panah $\mathbf{F}(x, y)$ dengan titik awal di (x, y) (tidak harus panjang sebenarnya; sering dinormalkan atau diskalakan).



Tiga medan vektor bidang: putaran, memancar, dan medan $\langle 1, \sin x \rangle$. Warna menunjukkan besar vektor.

CONTOH 1 — MEMBACA MEDAN

- $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: di $(1, 0)$ vektor $\langle 0, 1 \rangle$; di $(0, 1)$ vektor $\langle -1, 0 \rangle$; di $(-1, 0)$ vektor $\langle 0, -1 \rangle$. Vektor selalu tegak lurus $\langle x, y \rangle$ dan panjangnya $\sqrt{x^2 + y^2}$: medan putaran berlawanan arah jarum jam, makin cepat di tepi. (Kecepatan sebuah cakram yang berputar dengan kecepatan sudut 1.)
- $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: vektor posisi; menunjuk ke luar dari titik asal dengan panjang $|\mathbf{r}|$.
- $\mathbf{F} = \langle y, 0 \rangle$: aliran horizontal ke kanan di atas sumbu x, ke kiri di bawahnya, panjang bertambah dengan $|y|$: *geseran* (aliran sungai yang lajunya bervariasi dari tengah ke tepi).

CONTOH 2 — MEDAN DI RUANG

$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 0, 0, z \rangle = z\,\mathbf{k}$: vektor vertikal, ke atas di atas bidang xy, ke bawah di bawahnya, panjang $|z|$. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{\langle x, y, z \rangle}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$: medan *kuadrat terbalik*, menunjuk keluar, panjang $1/|\mathbf{r}|^2$.

2. Medan fisika

CONTOH 3 — GRAVITASI DAN LISTRIK (HUKUM KUADRAT TERBALIK)

Benda bermassa M di titik asal menarik benda bermassa m di $\mathbf{r}$ dengan gaya

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}.$$

Besarnya $\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2}$, arahnya ke titik asal. Medan listrik muatan titik Q: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Struktur matematisnya identik.

CONTOH 4 — MEDAN KECEPATAN

Fluida yang mengalir dalam pipa dengan profil $\mathbf{v}(x,y) = \langle 1 - y^2, 0\rangle$, $-1 \le y \le 1$: kecepatan maksimum 1 di tengah ($y=0$) dan nol di dinding ($y=\pm 1$). Aliran udara $\mathbf{V}(x,y,z)$ di atmosfer adalah contoh medan kecepatan tiga dimensi yang berubah terhadap waktu.

3. Medan gradien dan medan konservatif

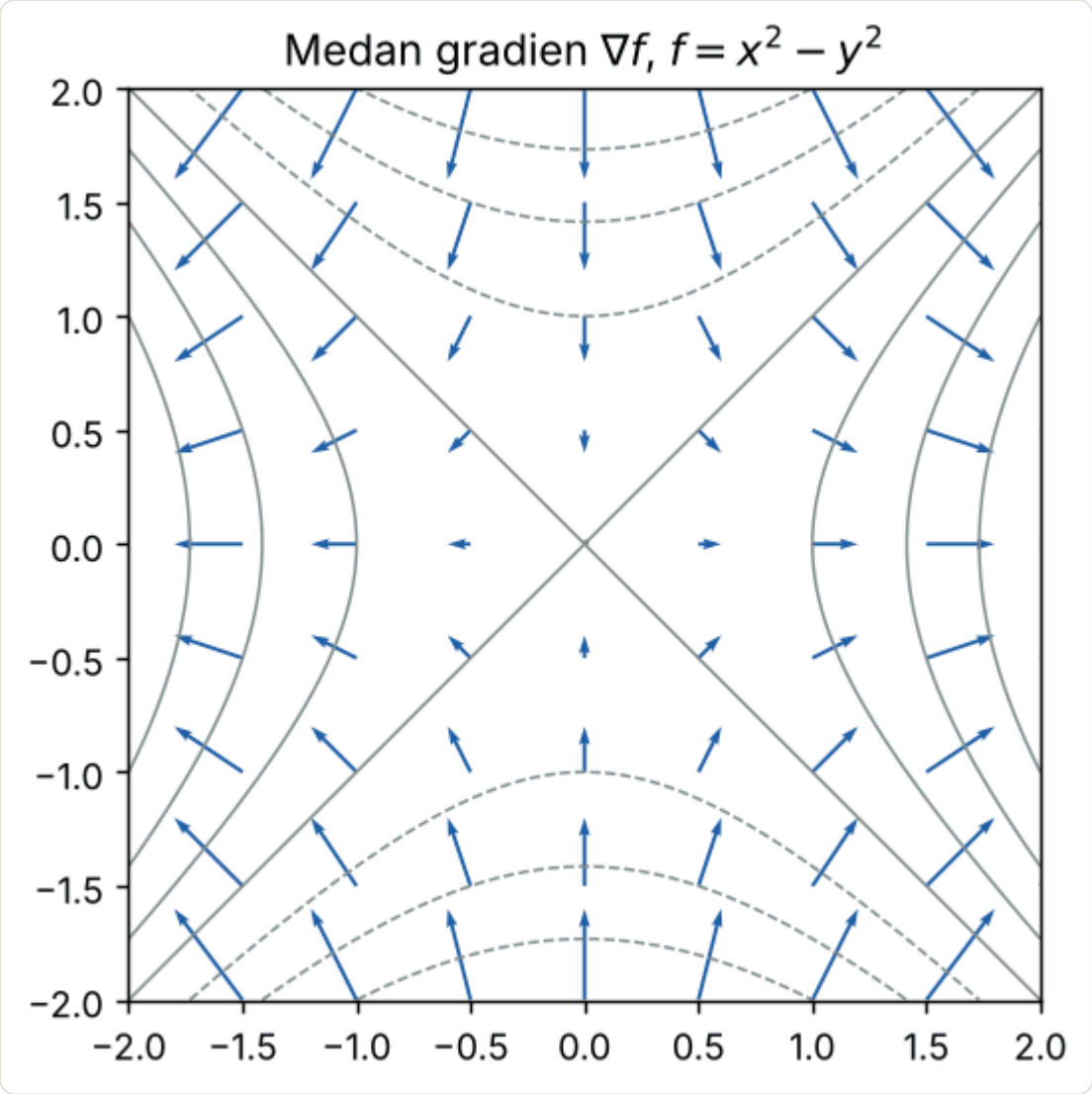
GRADIEN SEBAGAI MEDAN VEKTOR

Bila f fungsi skalar terdiferensialkan, gradiennya

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \left(\text{di ruang } \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle\right)$$

adalah medan vektor, disebut **medan gradien**. Medan $\mathbf{F}$ disebut **konservatif** bila $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu fungsi skalar f; f disebut **fungsi potensial** dari $\mathbf{F}$.

Dari 14.6, ∇f tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah f naik paling cepat. Jadi gambar medan gradien selalu "memotong tegak lurus" kontur.



$f = x^2 - y^2$: panah $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle$ tegak lurus kurva ketinggian.

CONTOH 5 — GRADIEN

$f(x, y) = x^2 y - y^3$: $\nabla f = \langle 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Di $(1, 1)$: $\langle 2, -2 \rangle$. Medan gaya $\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$ dikatakan konservatif dengan potensial f.

CONTOH 6 — POTENSIAL GRAVITASI

$f(\mathbf{r}) = \dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|}$. Maka $\nabla \dfrac{1}{|\mathbf{r}|} = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ (turunkan $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$), jadi $\nabla f = -\dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}$: medan gravitasi konservatif. Dalam fisika, energi potensial adalah $-f$.

TIDAK SEMUA MEDAN ADALAH GRADIEN

Medan putaran $\langle -y, x \rangle$ bukan gradien: bila $f_x = -y$ dan $f_y = x$ maka $f_{xy} = -1$ tetapi $f_{yx} = 1$, bertentangan dengan Clairaut (14.3). Di 16.3 kita turunkan syarat umumnya: untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif harus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

4. Garis aliran

Garis aliran (garis arus) medan $\mathbf{F}$ adalah kurva $\mathbf{r}(t)$ yang vektor singgungnya di setiap titik sama dengan $\mathbf{F}$: $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. Ini adalah lintasan partikel yang terbawa fluida.

CONTOH 7 — GARIS ALIRAN MEDAN PUTARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: $x' = -y$, $y' = x$. Maka $x'' = -y' = -x$, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $y = -x' = c_1 \sin t - c_2 \cos t$. Misalnya $x(0) = 1, y(0) = 0$: $x = \cos t, y = \sin t$, lingkaran satuan. Garis aliran adalah lingkaran berpusat di asal.

CONTOH 8 — GARIS ALIRAN MEDAN MEMANCAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: $x' = x,\ y' = y \Rightarrow x = ae^t,\ y = be^t$: garis lurus dari titik asal ke luar, $y = \frac{b}{a}x$.

5. Kesalahan umum

- Menyamakan medan vektor dengan medan skalar. $\mathbf{F}$ mempunyai arah di setiap titik.
- Menggambar semua panah dengan panjang sebenarnya sehingga saling menutupi: normalkan atau skalakan.
- Menganggap setiap medan adalah gradien.

6. Ringkasan

- $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ atau $\langle P, Q, R \rangle$: vektor di tiap titik.
- Contoh fisika: gravitasi, listrik, kecepatan fluida, angin.
- ∇f adalah medan gradien; $\mathbf{F} = \nabla f$ konservatif dengan potensial f.
- Garis aliran: $\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Berikutnya 16.2 Integral Garis.

16.2 Integral Garis

Integral tentu menjumlahkan sepanjang sebuah selang pada sumbu. **Integral garis** menjumlahkan sepanjang sebuah *kurva* di bidang atau ruang. Ada dua jenis, tergantung apa yang dijumlahkan: besaran skalar (massa kawat) atau komponen medan vektor searah kurva (usaha).

1. Integral garis terhadap panjang busur

Misalkan C kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $a \le t \le b$, dan f fungsi skalar kontinu. Bagi C menjadi busur kecil dengan panjang Δs_i, pilih titik contoh (x_i^*, y_i^*), dan jumlahkan $f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$.

INTEGRAL GARIS (TERHADAP S)

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Di ruang: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$. Hasilnya tidak bergantung pada parametrisasi dan arah penelusuran.

Dengan $f \equiv 1$ kita memperoleh panjang kurva $L = \int_C ds$. Bila $f \ge 0$, $\int_C f\,ds$ adalah luas "tirai" yang berdiri di atas C setinggi f.

CONTOH 1 — SETENGAH LINGKARAN

$\int_C (2 + x^2 y)\,ds$, C bagian atas lingkaran satuan: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t \rangle$, $0 \le t \le \pi$, $|\mathbf{r}'| = 1$.
$\int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\,dt = 2\pi + \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = 2\pi + \tfrac{2}{3} \approx 6{,}950$.

CONTOH 2 — MASSA KAWAT

Kawat berbentuk heliks $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$, dengan kerapatan linear $\rho = z$ (g/cm). $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$. Massa $= \int_C z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot 2\pi^2 \approx 27{,}9$ g. Panjang kawat $= 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}886$ cm.

CONTOH 3 — KURVA SEPOTONG-SEPOTONG

$\int_C x\,ds$, C terdiri dari ruas C_1 dari $(0,0)$ ke $(1,0)$ dan ruas C_2 dari $(1,0)$ ke $(1,1)$. C_1: $x = t, y = 0$, $ds = dt$: $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. C_2: $x = 1, y = t$, $ds = dt$: $\int_0^1 1\,dt = 1$. Jumlah $\frac{3}{2}$. Integral garis atas kurva sepotong-sepotong adalah jumlah integral masing-masing potong.

2. Integral garis terhadap x dan y

TERHADAP X DAN Y

$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt, \qquad \int_C Q\,dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt,$$

dan $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \big[P\,x'(t) + Q\,y'(t)\big]\,dt$.

Berbeda dengan ds, integral ini **berubah tanda bila arah kurva dibalik** ($\int_{-C} P\,dx = -\int_C P\,dx$), karena Δx berganti tanda.

3. Integral garis medan vektor (usaha)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja pada partikel yang bergerak sepanjang C, usaha pada busur pendek Δs_i adalah $\approx \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\Delta s_i$, dengan $\mathbf{T}$ vektor singgung satuan.

INTEGRAL GARIS MEDAN VEKTOR

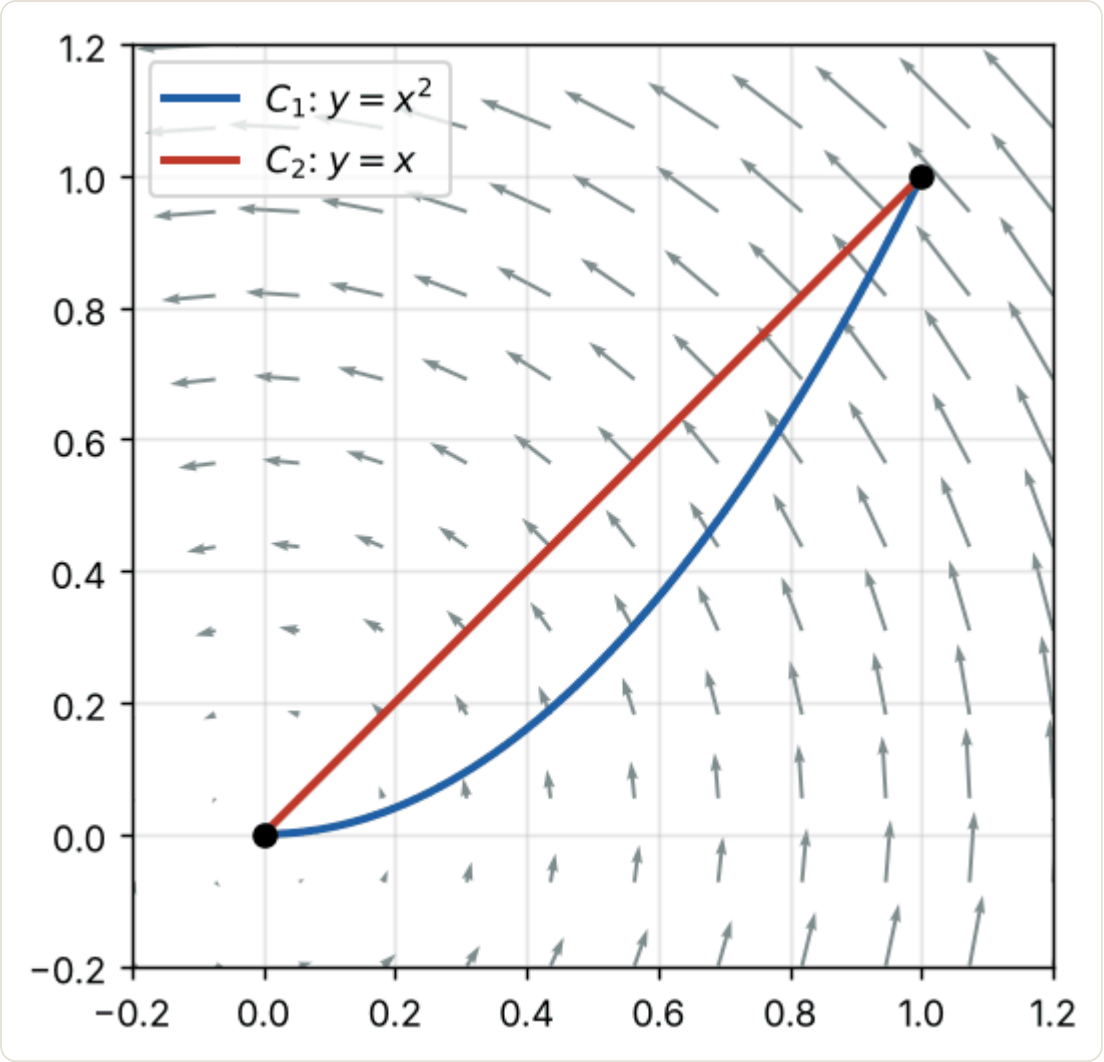
Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ dan kurva mulus $C:\ \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Dalam komponen, $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$: $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Bila $\mathbf{F}$ gaya, ini **usaha** yang dilakukan $\mathbf{F}$ pada partikel sepanjang C. Bila C tertutup, ditulis $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (*sirkulasi*).

CONTOH 4 — KETERGANTUNGAN PADA LINTASAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat dua lintasan (gambar).
C_1: $\mathbf{r} = \langle t, t^2 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t^2, t \rangle$: $\int_0^1 (-t^2 + 2t^2)\, dt = \frac{1}{3}$.
C_2: $\mathbf{r} = \langle t, t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t, t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 1 \rangle$: $\int_0^1 (-t + t)\, dt = 0$.
Dua lintasan berbeda, usaha berbeda: medan ini bukan konservatif (16.3).



Dua lintasan dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ dalam medan $\langle -y, x \rangle$.

CONTOH 5 — USAHA SEPANJANG HELIKS

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + t = t$. $\int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2 \approx 19{,}74$. (Hasil sama dengan $\frac{1}{2}(|\mathbf{r}(2\pi)|^2 - |\mathbf{r}(0)|^2) = \frac{1}{2}(1 + 4\pi^2 - 1)$, karena medan ini konservatif.)

CONTOH 6 — SIRKULASI PADA LINGKARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, C lingkaran satuan berlawanan arah jarum jam: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t = 1$, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$. Searah jarum jam: -2π.

CONTOH 7 — RUAS GARIS

$\mathbf{F} = \langle xy,\ y - x,\ z \rangle$, C: ruas dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,3)$, $\mathbf{r} = \langle t, 2t, 3t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$. $\mathbf{F} = \langle 2t^2, t, 3t \rangle$ (karena $y - x = 2t - t = t$). $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 2t^2 + 2t + 9t = 2t^2 + 11t$. $\int_0^1 (2t^2 + 11t)\, dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{2} = \frac{37}{6} \approx 6{,}167$.

4. Fluks melalui kurva bidang

Untuk kurva C tertutup sederhana dan medan $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$, **fluks keluar** melalui C adalah $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar; sama dengan $\oint_C P\, dy - Q\, dx$ bila C berlawanan arah jarum jam.

CONTOH 8 — FLUKS KELUAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$ melalui lingkaran jari-jari R: $\mathbf{n} = \langle x, y \rangle / R$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = R$, $\oint R\, ds = R \cdot 2\pi R = 2\pi R^2$ (untuk $R = 1$, 2π). Lewat rumus $P\, dy - Q\, dx$ dengan $x = \cos t, y = \sin t$: $\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = 2\pi$.

5. Sifat-sifat

- $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (arah dibalik).
- $\int_C f\, ds$ tidak berubah bila arah dibalik.
- Nilai tidak bergantung pada parametrisasi selama arahnya sama.
- Linear: $\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.
- Kurva sepotong-sepotong: jumlahkan.

6. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}'(t)|$ pada $\int f\, ds$.
- Mengevaluasi $\mathbf{F}$ pada titik, bukan pada $\mathbf{r}(t)$.
- Mengabaikan arah: $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ berubah tanda bila arah dibalik.

- Menganggap nilai integral garis medan hanya bergantung pada ujung-ujung kurva (benar hanya untuk medan konservatif).

7. Ringkasan

- $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt$ (skalar).
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$ (usaha, sirkulasi).
- Arah penting untuk integral medan, tidak untuk $\int f\,ds$.

Berikutnya 16.3 Teorema Dasar untuk Integral Garis.

16.3 Teorema Dasar Integral Garis

Teorema Dasar Kalkulus berkata $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$: integral turunan hanya bergantung pada nilai di *ujung-ujung*. Untuk integral garis ada analog yang sama indahnya, berlaku untuk medan gradien.

1. Teorema dasar untuk integral garis

TEOREMA

Misalkan C kurva mulus yang diberikan oleh $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, dan f fungsi terdiferensialkan dengan ∇f kontinu pada C. Maka

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big).$$

Bukti. Dengan aturan rantai (14.5), $\dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Maka $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ oleh Teorema Dasar Kalkulus satu peubah. ■

CONTOH 1 — HITUNG TANPA PARAMETRISASI

$\mathbf{F} = \langle 2xy + \cos y,\ x^2 - x\sin y \rangle = \nabla f$ dengan $f = x^2 y + x\cos y$. Untuk kurva C apa pun dari $(0,0)$ ke $(1,\pi)$: $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1,\pi) - f(0,0) = \pi + \cos\pi - 0 = \pi - 1 \approx 2{,}142$.

CONTOH 2 — GRAVITASI

Medan gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{k}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \nabla \dfrac{k}{|\mathbf{r}|}$. Usaha yang dilakukan gravitasi untuk memindahkan benda dari jarak 2 ke jarak 1 dari pusat, lewat lintasan apa pun yang tidak melewati pusat: $\dfrac{k}{1} - \dfrac{k}{2} = \dfrac{k}{2}$. Hanya jarak awal dan akhir yang berpengaruh.

2. Bebas lintasan dan medan konservatif

BEBAS LINTASAN

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **bebas lintasan** di D bila untuk dua titik A, B di D, integralnya sama untuk semua lintasan C dari A ke B di D.

TEOREMA (KESETARAAN)

Misalkan $\mathbf{F}$ kontinu pada daerah terbuka dan terhubung D. Tiga pernyataan berikut setara:

1. $\mathbf{F}$ konservatif: $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu f.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bebas lintasan di D.
3. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk setiap kurva tertutup C di D.

Gagasan bukti. (1)⇒(2): teorema dasar di atas. (2)⇔(3): kurva tertutup C adalah lintasan C_1 dari A ke B diikuti kebalikan lintasan C_2 dari A ke B; $\oint_C = \int_{C_1} - \int_{C_2}$, jadi nol tepat bila $\int_{C_1} = \int_{C_2}$. (2)⇒(1): tetapkan titik A dan definisikan $f(x,y) = \int_A^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (terdefinisi karena bebas lintasan); menghitung f_x dengan lintasan horizontal terakhir menghasilkan $f_x = P$, serupa $f_y = Q$.

CONTOH YANG MENUNJUKKAN PERBEDAAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$ (16.2, Contoh 4 dan 6): sirkulasi di lingkaran satuan $= 2\pi \neq 0$, jadi tidak bebas lintasan dan bukan konservatif.

3. Menguji apakah medan konservatif

SYARAT PERLU

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif dan P, Q mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada D, maka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{di seluruh } D.$$

Di ruang, $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$: $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$, $Q_z = R_y$ (yaitu $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 16.5).

Bukti: bila $P = f_x$, $Q = f_y$, maka $P_y = f_{xy}$, $Q_x = f_{yx}$, sama oleh Clairaut.

SYARAT CUKUP

Jika $P_y = Q_x$ pada daerah D yang **terbuka dan sederhana terhubung** (terhubung dan tanpa "lubang"; setiap kurva tertutup dapat dikecilkan menjadi satu titik di dalam D), maka $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif. Hal serupa berlaku di ruang.

CONTOH 3 — UJI SEDERHANA

- $\mathbf{F} = \langle xy, x^2 \rangle$: $P_y = x$, $Q_x = 2x$: tidak sama, *tidak konservatif*.
- $\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$: $P_y = 2x = Q_x$ di seluruh $\mathbb{R}^2$ (sederhana terhubung): konservatif.
- $\mathbf{F} = \langle ye^x + \sin y,\ e^x + x\cos y \rangle$: $P_y = e^x + \cos y = Q_x$: konservatif.

CONTOH 4 — JEBAKAN DAERAH BERLUBANG

$\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$ pada $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $P_y = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q_x$, tetapi sirkulasi di lingkaran satuan: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\oint = 2\pi \neq 0$. D tidak sederhana terhubung (lubang di titik asal), maka syarat cukup tidak berlaku: $\mathbf{F}$ tidak konservatif pada D. (Ia adalah $\nabla\theta$, gradien sudut kutub, yang bukan fungsi bernilai tunggal di D.)

4. Mencari fungsi potensial

CONTOH 5 — DUA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Telah diuji konservatif. Cari f dengan $f_x = 3 + 2xy$, $f_y = x^2 - 3y^2$. Integrasikan f_x terhadap x: $f = 3x + x^2y + g(y)$. Turunkan terhadap y: $f_y = x^2 + g'(y)$, samakan dengan $x^2 - 3y^2$: $g' = -3y^2$, $g = -y^3$. $f = 3x + x^2y - y^3 + C$. Usaha dari $(1,2)$ ke $(3,1)$: $f(3,1) - f(1,2) = (9 + 9 - 1) - (3 + 2 - 8) = 17 - (-3) = 20$.

CONTOH 6 — TIGA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle y^2,\ 2xy + e^{3z},\ 3ye^{3z} \rangle$. Uji: $P_y = 2y = Q_x$, $P_z = 0 = R_x$, $Q_z = 3e^{3z} = R_y$: konservatif. $f_x = y^2 \Rightarrow f = xy^2 + g(y,z)$. $f_y = 2xy + g_y = 2xy + e^{3z} \Rightarrow g_y = e^{3z} \Rightarrow g = ye^{3z} + h(z)$. $f_z = 3ye^{3z} + h'(z) = 3ye^{3z} \Rightarrow h' = 0$. $f = xy^2 + ye^{3z}$. Usaha dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,0)$: $f(1,2,0) - f(0,0,0) = (4 + 2) - 0 = 6$.

CONTOH 7 — USAHA MELEWATI LINTASAN RUMIT

$\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 \rangle = \nabla(x^2 y)$. Usaha sepanjang lintasan apa pun dari $(1,1)$ ke $(2,3)$: $x^2 y\Big| = 12 - 1 = 11$, tanpa parametrisasi. Bila C adalah kurva tertutup, usahanya 0.

5. Kekekalan energi

Misalkan medan gaya $\mathbf{F} = \nabla f$ menggerakkan partikel bermassa m sepanjang $\mathbf{r}(t)$. Hukum Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$, kecepatan $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. Usaha

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, dt = m \int_a^b \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'\, dt = \frac{m}{2}\left[|\mathbf{v}(b)|^2 - |\mathbf{v}(a)|^2 \right] = K(B) - K(A),$$

dengan $K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$ energi kinetik (karena $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'$). Teorema dasar memberi $W = f(B) - f(A)$. Definisikan energi potensial $U = -f$; maka $K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$: **energi mekanik kekal**. Inilah mengapa medan konservatif memakai nama itu.

CONTOH 8 — BENDA JATUH

Gravitasi dekat permukaan: $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle = \nabla(-mgz)$, $U = mgz$. Benda dilepas dari $z = h$ (kecepatan nol): di $z = 0$, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Dengan $h = 5$ m, $g = 9{,}8$: $v = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ m/s, tanpa memperhatikan lintasan (jatuh bebas, atau meluncur pada bidang licin).

6. Kesalahan umum

- Memakai $f(B) - f(A)$ pada medan yang tidak konservatif.
- Menyimpulkan konservatif hanya dari $P_y = Q_x$ tanpa memeriksa daerahnya sederhana terhubung (Contoh 4).
- Menghilangkan fungsi $g(y)$ pada langkah mencari potensial.
- Menyamakan $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk satu kurva dengan konservatif; syaratnya berlaku untuk *semua* kurva tertutup.

7. Ringkasan

- $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.
- Konservatif $\Leftrightarrow$ bebas lintasan $\Leftrightarrow$ sirkulasi nol pada kurva tertutup.

- Uji: $P_y = Q_x$ (dan seterusnya); cukup bila daerahnya sederhana terhubung.
- Potensial dicari dengan integrasi berurutan; energi mekanik kekal.

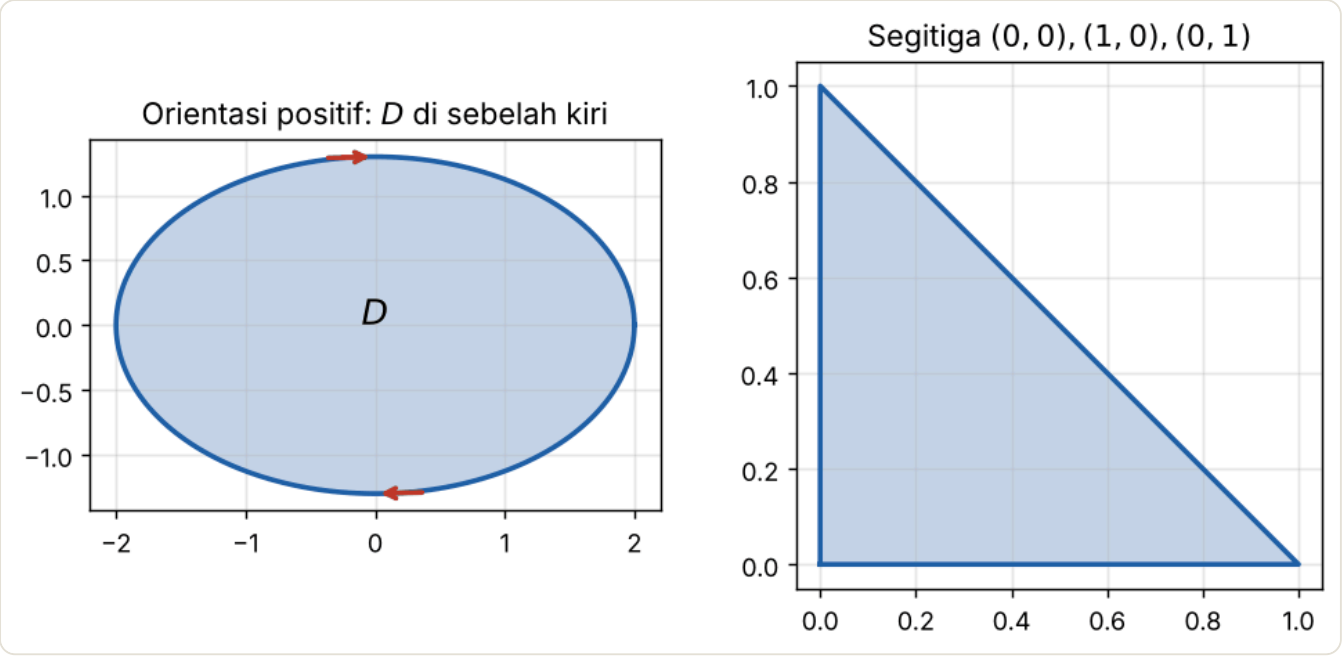
Berikutnya 16.4 Teorema Green.

16.4 Teorema Green

Teorema Dasar Kalkulus mengubah integral pada selang menjadi nilai pada *batas* selang. **Teorema Green** melakukan hal serupa pada bidang: ia menghubungkan integral garis sepanjang *kurva tertutup* dengan integral ganda dua pada *daerah* yang dikurungnya.

1. Orientasi

Kurva tertutup sederhana C (tidak memotong dirinya sendiri) mempunyai dua arah. **Orientasi positif** adalah arah berlawanan jarum jam, yaitu arah dengan daerah D yang dikurung selalu berada di *sebelah kiri* penelusur.



Orientasi positif: berlawanan arah jarum jam, daerah di kiri.

2. Teorema Green

TEOREMA GREEN

Misalkan C kurva tertutup sederhana, mulus sebagian-sebagian, berorientasi positif, yang membatasi daerah D. Jika P dan Q mempunyai turunan parsial kontinu pada daerah terbuka yang memuat D, maka

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA.$$

Notasi lain untuk ruas kiri: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$, dan ∂D untuk batas D.

Bukti (untuk daerah yang sekaligus tipe I dan tipe II). Tunjukkan $\oint_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Tulis $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$. Maka $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \big[P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\big]\,dx$. Di sisi lain, $C = C_1 \cup C_2 \cup$(dua ruas vertikal, tempat $dx = 0$), dengan C_1 (bawah, dari kiri ke kanan): $\int_{C_1} P\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$, dan C_2 (atas, dari kanan ke kiri): $\int_{C_2} P\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$. Jumlahnya $\oint_C P\,dx = -\int_a^b \big[P(x, g_2) - P(x, g_1)\big]\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Dengan memandang D sebagai tipe II diperoleh $\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$. Jumlahkan. Daerah umum dipotong menjadi potongan sederhana; integral garis pada potongan pembatas dalam saling menghapus karena dilalui dua arah. ■

3. Contoh

CONTOH 1 — SEGITIGA

$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$, C segitiga $(0,0), (1,0), (0,1)$ berlawanan arah jarum jam. $P = x^4$, $Q = xy$: $Q_x - P_y = y - 0 = y$. $\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} y\,dx\,dy = \int_0^1 y(1-y)\,dy = \frac{1}{6}$. Cek langsung: ruas $(0,0) \to (1,0)$: $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$; ruas $(1,0) \to (0,1)$: $x = 1 - s, y = s$: $\int_0^1 \big[-(1-s)^4 + (1-s)s\big]\,ds = -\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; ruas $(0,1) \to (0,0)$: $x = 0$, integral 0. Jumlah $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Cocok.

CONTOH 2 — LINGKARAN

$\oint_C -y^3\,dx + x^3\,dy$, C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$. $Q_x - P_y = 3x^2 + 3y^2$. $\iint_D 3(x^2 + y^2)\,dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi a^4}{2}$. Langsung dengan parametrisasi akan melibatkan $\cos^4 + \sin^4$, lebih panjang.

CONTOH 3 — KASUS KETIKA $Q_X - P_Y$ KONSTAN

$\oint_C (y + e^{x^2})\,dx + (2x + \cos y)\,dy$, C elips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. $Q_x - P_y = 2 - 1 = 1$, jadi integral = luas elips $= \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$. Suku-suku sulit e^{x^2} dan $\cos y$ tidak berperan.

CONTOH 4 — MENJELASKAN 16.2 CONTOH 4

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: usaha dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat parabola $y = x^2$ adalah $\frac{1}{3}$, lewat garis $y = x$ adalah 0. Kurva tertutup $C = C_1 \cup (-C_2)$ (naik di parabola, turun di garis) berorientasi positif: $\oint_C = \frac{1}{3} - 0$. Teorema Green: $Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2$, luas antara $y = x^2$ dan $y = x$ adalah $\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$. $\iint_D 2\,dA = \frac{1}{3}$. Cocok.

CONTOH 5 — DAERAH DENGAN LUBANG

Misalkan D adalah cincin $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, dengan batas luar C_2 (berlawanan arah jarum jam) dan batas dalam C_1 (*searah* jarum jam, agar D tetap di kiri). Green berlaku dengan $\partial D = C_2 \cup (-C_1)$: $\oint_{C_2} - \oint_{C_1} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$ dengan kedua lingkaran berlawanan arah jarum jam. Bila $Q_x = P_y$ di seluruh D (mis. medan Contoh 4 di 16.3 $\langle -y, x \rangle / (x^2 + y^2)$), maka $\oint_{C_2} = \oint_{C_1} = 2\pi$: kurva tertutup mana pun yang mengelilingi titik asal memberi sirkulasi yang sama, 2π.

4. Menghitung luas dengan integral garis

Pilih P, Q dengan $Q_x - P_y = 1$, mis. $P = 0, Q = x$ atau $P = -y, Q = 0$ atau $P = -\frac{y}{2}, Q = \frac{x}{2}$. Maka

$$A(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

CONTOH 6 — LUAS ELIPS

$x = a\cos t,\ y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi$: $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\big]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$.

CONTOH 7 — ASTROID

$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$. $x\,y' - y\,x' = \cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t = 3\sin^2 t\cos^2 t$. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}178$.

5. Bentuk vektor: sirkulasi dan fluks

DUA BENTUK VEKTOR TEOREMA GREEN

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad \text{(sirkulasi, "bentuk tangensial")},$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \quad \text{(fluks, "bentuk normal")},$$

dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar. Bentuk kedua diperoleh dari yang pertama dengan memakai medan $\langle -Q, P \rangle$ (karena $\mathbf{n}\, ds = \langle dy, -dx \rangle$).

CONTOH 8 — FLUKS

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3 \rangle$, fluks keluar melalui lingkaran jari-jari a: $\operatorname{div} = 3x^2 + 3y^2$, hasil $\iint 3r^2\, dA = \frac{3\pi a^4}{2}$. Untuk $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: div $= 2$, fluks $= 2 \cdot \pi a^2$, cocok dengan 16.2 Contoh 8 ($2\pi R^2$).

6. Kesalahan umum

- Memakai arah searah jarum jam tanpa mengganti tanda hasil.
- Menukar Q_x dan P_y (rumus: $Q_x - P_y$).
- Menerapkan Green pada medan yang tidak halus di dalam D (mis. singularitas di titik asal).
- Lupa membalik arah batas dalam pada daerah berlubang.

7. Ringkasan

- $\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$, C berorientasi positif.
- Luas: $A = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx$.
- Bentuk normal: $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$.

Berikutnya 16.5 Curl dan Divergensi.

16.5 Curl dan Divergensi

Dua turunan menjelaskan bagaimana sebuah medan vektor berperilaku secara lokal: **curl** mengukur kecenderungan berputar, dan **divergensi** mengukur kecenderungan memancar atau terserap. Keduanya adalah kunci untuk memperluas teorema Green ke ruang (16.8, 16.9).

1. Operator del

Definisikan operator vektor $\nabla = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$. Ia bekerja pada fungsi skalar (gradien ∇f), dan melalui "hasil kali" titik dan silang pada medan vektor.

2. Curl

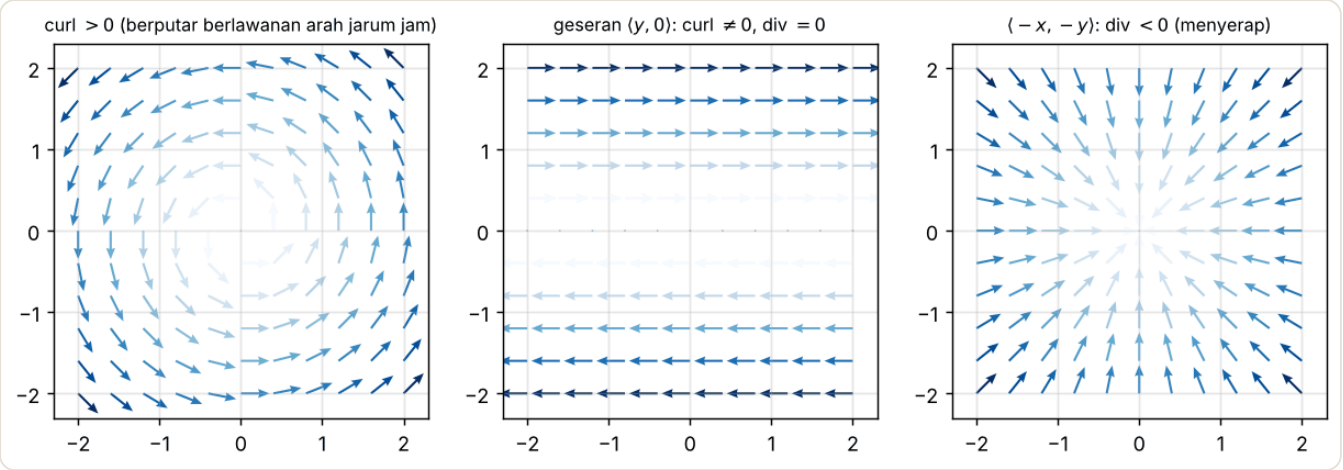
DEFINISI — CURL

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ dengan turunan parsial ada,

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \Big\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \Big\rangle.$$

Untuk medan bidang $\langle P, Q, 0 \rangle$, curl $= \langle 0, 0, Q_x - P_y \rangle$: komponen $\mathbf{k}$ adalah integran teorema Green.

Tafsir. Letakkan roda dayung kecil di aliran fluida $\mathbf{F}$, dengan sumbu searah $\mathbf{n}$. Roda berputar paling cepat bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, dengan kecepatan sudut $\frac{1}{2} |\operatorname{curl} \mathbf{F}|$. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, aliran disebut *tak berputar* (irrotasional).



Kiri: medan berputar. Tengah: geseran (curl tak nol, divergensi nol). Kanan: medan yang menyerap (divergensi negatif).

CONTOH 1 — MENGHITUNG CURL

$\mathbf{F} = \langle xz,\ xyz,\ -y^2 \rangle$. $R_y - Q_z = -2y - xy$; $P_z - R_x = x - 0 = x$; $Q_x - P_y = yz - 0 = yz$. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle -2y - xy,\ x,\ yz \rangle$. Di $(1,1,2)$: $\langle -3, 1, 2 \rangle$.

CONTOH 2 — ROTASI BENDA TEGAR

Benda berputar dengan kecepatan sudut $\boldsymbol{\omega} = \langle 0, 0, 3 \rangle$: kecepatan titik $\mathbf{r}$ adalah $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$. $\operatorname{curl}\mathbf{v} = \langle 0, 0, 3+3 \rangle = \langle 0, 0, 6 \rangle = 2\boldsymbol{\omega}$. Jadi curl kecepatan sama dengan dua kali kecepatan sudut. Medan geseran $\langle y, 0, 0 \rangle$: curl $= \langle 0, 0, -1 \rangle$, roda berputar searah jarum jam.

CONTOH 3 — CURL DAN KONSERVATIF

$\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$: $R_y - Q_z = x - x = 0$, $P_z - R_x = y - y = 0$, $Q_x - P_y = z - z = 0$; curl $= \mathbf{0}$. Memang $\mathbf{F} = \nabla(xyz)$. Sebaliknya $\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$: curl $= \langle -y, -z, -x \rangle \neq \mathbf{0}$, tidak konservatif.

TEOREMA

Jika f mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Sebaliknya, jika $\mathbf{F}$ terdefinisi pada seluruh $\mathbb{R}^3$ (atau daerah sederhana terhubung) dengan komponen berturunan parsial kontinu dan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{F}$ konservatif.

Bukti bagian pertama: komponen pertama $\partial_y(f_z) - \partial_z(f_y) = 0$ oleh Clairaut; komponen lain serupa. Ini kelanjutan dari syarat $P_y = Q_x$ di 16.3.

3. Divergensi

DEFINISI — DIVERGENSI

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(Di bidang: $P_x + Q_y$.) Ini fungsi *skalar*.

Tafsir. Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ di sebuah titik adalah laju fluks keluar per satuan volume: positif bila titik itu *sumber* (fluida memancar), negatif bila *penyerap* (sink), dan nol bila aliran *tak mampat* (volume fluida tidak berubah).

CONTOH 4 — MENGHITUNG DIVERGENSI

- $\mathbf{F} = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$: $\operatorname{div} = z + xz + 0 = z(1+x)$.
- $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$: $\operatorname{div} = 3$ (memancar seragam).
- $\mathbf{F} = \langle x, -y \rangle$: $\operatorname{div} = 1 - 1 = 0$: aliran sudut tak mampat (di sekitar titik pelana, mengalir masuk sepanjang sumbu y dan keluar sepanjang sumbu x).
- $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: $\operatorname{div} = 0$: berputar tanpa memampat.

CONTOH 5 — MEDAN KUADRAT TERBALIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dfrac{\langle x,y,z\rangle}{\rho^3}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{\rho^3} = \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{3x^2}{\rho^5}$. Jumlahkan untuk tiga komponen: $\dfrac{3}{\rho^3} - \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{\rho^5} = 0$. Jadi $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ di mana pun kecuali di titik asal (sumber titik). Karena inilah fluks medan listrik dan gravitasi muatan titik tidak bergantung pada bentuk permukaan pengurung (16.9).

TEOREMA

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0.$$

Bukti: $\operatorname{div}\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\rangle = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$ oleh Clairaut. Akibatnya, medan yang merupakan curl dari medan lain pasti tak mampat (mis. medan magnet).

4. Laplacian dan identitas

Laplacian fungsi skalar: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Fungsi dengan $\nabla^2 f = 0$ disebut *harmonik* (persamaan Laplace, 14.3).

CONTOH 6 — LAPLACIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$.
- $f = \dfrac{1}{\rho}$: $\nabla f = -\dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3}$, $\nabla^2 f = -\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3} = 0$ (Contoh 5): harmonik di mana pun kecuali asal; ini potensial listrik dan gravitasi.
- $f = x^2 - y^2$: $\nabla^2 f = 2 - 2 = 0$: harmonik.

Identitas	Keterangan
$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	gradien tak berputar
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$	curl tak mampat
$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$	aturan hasil kali
$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$	aturan hasil kali
$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$	linear

CONTOH 7 — MEMAKAI ATURAN HASIL KALI

$\nabla \cdot (\rho^2\,\mathbf{r})$ dengan $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$: $f = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\nabla f = 2\mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$: $f\,\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla f = 3\rho^2 + 2\rho^2 = 5\rho^2$.

5. Bentuk vektor teorema Green

Dengan notasi baru, teorema Green (16.4) berbunyi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA, \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

Bentuk pertama (sirkulasi $\leftrightarrow$ curl) memperluas diri menjadi Teorema Stokes (16.8); bentuk kedua (fluks $\leftrightarrow$ divergensi) menjadi Teorema Divergensi (16.9).

6. Kesalahan umum

- Menyamakan curl dan divergensi: curl menghasilkan vektor, divergensi menghasilkan skalar.
- Salah tanda pada determinan curl (komponen $\mathbf{j}$ adalah $P_z - R_x$, bukan $R_x - P_z$).
- Menghitung curl atau divergensi dari fungsi skalar, atau gradien dari medan vektor: tipe tidak cocok.
- Menyimpulkan konservatif dari curl nol pada daerah yang tidak sederhana terhubung.

7. Ringkasan

- $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$: kecenderungan berputar; $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$: kecenderungan memancar.
- $\operatorname{curl}\nabla f = \mathbf{0}$; $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$.
- Laplacian $\nabla^2 f = \operatorname{div}\nabla f$; fungsi harmonik: $\nabla^2 f = 0$.

Berikutnya 16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya.

16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya

Kurva ruang kita nyatakan oleh satu parameter t: $\mathbf{r}(t)$. Permukaan mempunyai dua dimensi, sehingga memerlukan dua parameter (u, v). Representasi ini jauh lebih fleksibel daripada grafik $z = f(x, y)$: ia dapat menggambarkan bola, silinder, torus, dan permukaan lain yang bukan grafik fungsi.

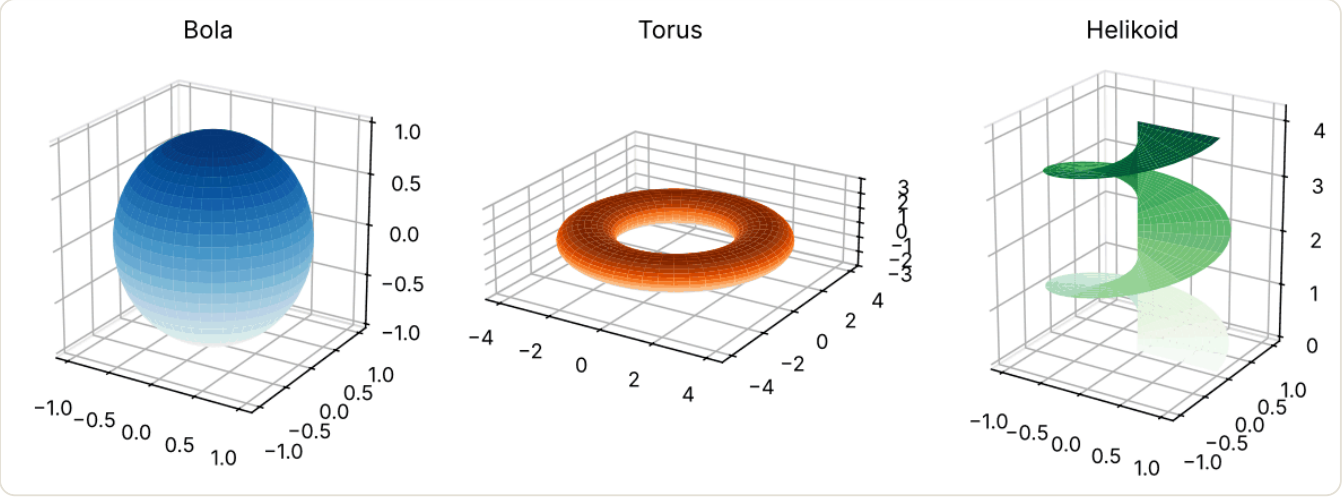
1. Permukaan parametrik

DEFINISI

Permukaan parametrik S adalah himpunan titik

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v) \rangle, \qquad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

D disebut daerah parameter. Kurva $u = u_0$ (dengan v berubah) dan $v = v_0$ disebut *kurva grid*; ia membentuk "jaring" yang menyelimuti permukaan.



Tiga permukaan parametrik: bola, torus, dan helikoid.

CONTOH 1 — BIDANG

Bidang melalui titik $\mathbf{r}_0$ dengan vektor sejajar $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Misalnya bidang melalui $(1, 2, 3)$ yang memuat $\langle 1, 0, 1 \rangle$ dan $\langle 0, 1, -1 \rangle$: $\mathbf{r} = \langle 1 + u,\ 2 + v,\ 3 + u - v \rangle$, yaitu $z = x - y + 4$.

CONTOH 2 — SILINDER DAN BOLA

- Silinder $x^2 + y^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$, $0 \le \theta \le 2\pi$, z selang.
- Bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (koordinat bola, 15.9).
- Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: $\langle a\sin\phi\cos\theta,\ b\sin\phi\sin\theta,\ c\cos\phi\rangle$.

CONTOH 3 — GRAFIK DAN PARABOLOID

Grafik $z = f(x, y)$: $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y)\rangle$ (ambil $u = x$, $v = y$). Paraboloid $z = x^2 + y^2$ dapat ditulis $\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\rangle$. Kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN PUTAR

Kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, diputar mengelilingi sumbu x: $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x,\ f(x)\cos\theta,\ f(x)\sin\theta\rangle$. Untuk $f = \sqrt{x}$ pada $0 \le x \le 1$: paraboloid $y^2 + z^2 = x$.

CONTOH 5 — TORUS

Torus (donat) dengan jari-jari pusat tabung R dan jari-jari tabung r ($R > r$): $\mathbf{r}(u, v) = \langle (R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v\rangle$, $0 \le u, v \le 2\pi$.

CONTOH 6 — HELIKOID

$\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$: setiap kurva $u = \text{konstan}$ adalah heliks, setiap $v = \text{konstan}$ adalah garis horizontal yang memotong sumbu z: seperti ulir tangga spiral.

2. Bidang singgung

Turunan parsial $\mathbf{r}_u = \langle x_u, y_u, z_u\rangle$ dan $\mathbf{r}_v$ di titik (u_0, v_0) adalah vektor singgung pada kurva grid, jadi keduanya terletak pada bidang singgung. Permukaan disebut **mulus** bila $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ (di titik dalam D); vektor ini adalah **normal**.

CONTOH 7 — BIDANG SINGGUNG

$\mathbf{r}(u,v) = \langle u^2, v^2, u+2v\rangle$, di titik $(1,1,3)$ ($u=v=1$). $\mathbf{r}_u = \langle 2u, 0, 1\rangle = \langle 2,0,1\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle 0, 2v, 2\rangle = \langle 0,2,2\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle 0\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot 0 - 2\cdot 2,\ 2\cdot 2 - 0\rangle = \langle -2,-4,4\rangle$. Bidang: $-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$, yaitu $x + 2y - 2z = -3$. (Periksa titik: $1 + 2 - 6 = -3$.)

3. Luas permukaan

Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ di D dipetakan menjadi jajargenjang hampir yang dibentangkan $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$, luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$ (bandingkan dengan Jacobian, 15.10).

LUAS PERMUKAAN PARAMETRIK

Bila S mulus dan dilalui tepat satu kali ketika (u,v) menjelajahi D,

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA.$$

CONTOH 8 — BOLA

$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin\phi$ (15.6), $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$.

CONTOH 9 — TORUS

$\mathbf{r}_u = \langle -(R + r\cos v)\sin u,\ (R + r\cos v)\cos u,\ 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -r\sin v\cos u,\ -r\sin v\sin u,\ r\cos v\rangle$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = r(R + r\cos v)$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\, dv\, du = 2\pi \cdot 2\pi r R = 4\pi^2 r R$. Untuk $R = 3, r = 1$: $12\pi^2 \approx 118{,}4$. (Luas = keliling lingkaran tabung $2\pi r$ kali keliling lintasan pusatnya $2\pi R$, teorema Pappus.)

CONTOH 10 — HELIKOID

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$. $\mathbf{r}_u = \langle \cos v, \sin v, 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -u\sin v, u\cos v, 1\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle \sin v,\ -\cos v,\ u\rangle$, panjang $\sqrt{1+u^2}$. $A = \pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du = \dfrac{\pi}{2}\left[\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1\right] \approx 3{,}606$.

CONTOH 11 — KERUCUT

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{2}\,u$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}u\,du\,dv = 4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77$, sama dengan $\pi r s$ dengan $r = 2$, $s = 2\sqrt{2}$.

KASUS KHUSUS

- Grafik $z = f(x,y)$: $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$, $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA$ (15.6).
- Permukaan putar $y = f(x)$ di sekitar sumbu x: $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = f\sqrt{1+f'^2}$, $A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ (10.2).

CONTOH 12 — PARABOLOID PUTAR

$f = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$: $f\sqrt{1+f'^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \sqrt{x+\frac{1}{4}}$. $A = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \approx 5{,}33$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $|\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v|$ sebagai elemen luas; yang benar $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ (hanya sama bila kedua vektor tegak lurus).
- Batas u, v yang membuat permukaan terlewati dua kali (mis. bola dengan $\theta \in [0, 4\pi]$).
- Menganggap parametrisasi tunggal: satu permukaan punya banyak parametrisasi.

5. Ringkasan

- $\mathbf{r}(u,v)$; $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ adalah normal bidang singgung.
- $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$.
- Contoh: bola $4\pi a^2$, torus $4\pi^2 r R$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 16.7 Integral Permukaan.

16.7 Integral Permukaan

Integral garis menjumlahkan sepanjang kurva. Integral permukaan menjumlahkan di atas *permukaan*. Sama seperti sebelumnya ada dua jenis: integral fungsi skalar (massa, muatan) dan integral medan vektor (fluks).

1. Integral permukaan fungsi skalar

Bagi permukaan S menjadi potongan kecil S_{ij} berluas ΔS_{ij}, pilih titik contoh P^*_{ij}, dan jumlahkan $f(P^*_{ij})\Delta S_{ij}$.

INTEGRAL PERMUKAAN

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim \sum f(P^*_{ij})\Delta S_{ij} = \iint_D f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA.$$

Untuk grafik $z = g(x,y)$ di atas D:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA.$$

Dengan $f \equiv 1$: $\iint_S dS = A(S)$ (luas permukaan, 16.6).

CONTOH 1 — $\iint Y^2\,DS$ PADA BOLA

Bola jari-jari a: $dS = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$, $y = a\sin\phi\sin\theta$. $\iint y^2\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin^2\phi\sin^2\theta\cdot a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = a^4\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{4\pi a^4}{3}$. Karena simetri, $\iint x^2dS = \iint y^2dS = \iint z^2dS$; jumlahnya $\iint a^2dS = 4\pi a^4$, jadi masing-masing $\frac{4\pi a^4}{3}$. Cocok.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA

$\iint_S z\,dS$, S belahan atas bola jari-jari 2: $z = 2\cos\phi$, $dS = 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\cos\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 8\pi \approx 25{,}13$. Bila S kulit tipis dengan kerapatan $\sigma = z$, maka 8π adalah massanya.

CONTOH 3 — BIDANG

$\iint_S x\,dS$, S bagian bidang $x+y+z=1$ di oktan pertama. $z = 1-x-y$: $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. D: segitiga $x,y\ge 0, x+y\le 1$. $\sqrt{3}\iint_D x\,dA = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}289$.

CONTOH 4 — SILINDER

$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, S: silinder $x^2+y^2=1, 0\le z\le 2$ (tanpa tutup). $\mathbf{r}=\langle\cos\theta,\sin\theta,z\rangle$, $|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_z|=1$. $\int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+z^2)\,dz\,d\theta = 2\pi\left(2+\frac{8}{3}\right)=\frac{28\pi}{3}\approx 29{,}3$.

PENERAPAN

Massa $m=\iint \sigma\,dS$; pusat massa $\bar{x}=\frac{1}{m}\iint x\sigma\,dS$ (dst.); momen inersia $I_z=\iint (x^2+y^2)\sigma\,dS$; muatan total $Q=\iint\sigma\,dS$.

2. Permukaan berorientasi

Untuk integral medan vektor kita perlu memilih **sisi** permukaan. Permukaan S **berorientasi** bila ada medan vektor normal satuan $\mathbf{n}$ yang kontinu pada S. Setiap permukaan mulus (selain Möbius) mempunyai dua orientasi: $\mathbf{n}$ dan $-\mathbf{n}$.

- Grafik $z=g(x,y)$: orientasi *ke atas*: $\mathbf{n}=\dfrac{\langle -g_x,-g_y,1\rangle}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$.
- Permukaan tertutup (bola, kubus): orientasi *positif* adalah normal yang menunjuk *ke luar*.
- Permukaan parametrik: $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$ (atau kebalikannya).

Pita Möbius (setengah putaran lalu disambung) hanya mempunyai satu sisi dan tidak dapat diorientasikan.

3. Fluks

INTEGRAL PERMUKAAN MEDAN VEKTOR (FLUKS)

Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ pada permukaan berorientasi S dengan normal satuan $\mathbf{n}$:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\big(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\big)\,dA,$$

dengan syarat $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ searah $\mathbf{n}$ (bila berlawanan, beri tanda minus). Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida (kerapatan 1), ini adalah **laju aliran** fluida (volume per waktu) yang melewati S pada arah $\mathbf{n}$.

UNTUK GRAFIK $Z = G(X, Y)$, ORIENTASI KE ATAS

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\, g_x - Q\, g_y + R\right) dA, \qquad \mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle.$$

CONTOH 5 — FLUKS MELALUI BOLA

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, bola jari-jari a, normal keluar $\mathbf{n} = \frac{\langle x,y,z \rangle}{a}$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a} = a$. Fluks $= a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$. (Sama dengan $\iiint \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$, 16.9.)

CONTOH 6 — FLUKS MELALUI PARABOLOID

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, orientasi ke atas. $g_x = -2x$, $g_y = -2y$: $-Pg_x - Qg_y + R = 2x^2 + 2y^2 + (1 - x^2 - y^2) = 1 + x^2 + y^2$. $\iint_D (1 + r^2)\, dA = 2\pi \int_0^1 (1 + r^2) r\, dr = 2\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}712$.

CONTOH 7 — KUBUS

Fluks $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ keluar dari kubus $[0, 1]^3$: enam sisi. Sisi $x = 1$ ($\mathbf{n} = \mathbf{i}$): $F \cdot n = x = 1$, luas 1, fluks 1. Sisi $x = 0$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{i}$): $-x = 0$. Sama untuk y dan z. Total $= 3$.

CONTOH 8 — KERUCUT DENGAN PARAMETRISASI

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, kerucut $\mathbf{r}(u, v) = \langle u \cos v, u \sin v, u \rangle$, $0 \leq u \leq 1$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle -u \cos v, -u \sin v, u \rangle$ (menunjuk ke dalam-atas). $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = -u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v + u^2 = 0$. Fluks $= 0$: medan radial dari titik asal menyinggung kerucut sehingga tidak ada fluida yang menembusnya.

CONTOH 9 — FLUKS MEDAN LISTRIK

Muatan Q di titik asal: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Fluks melalui bola jari-jari a (normal keluar): $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$; fluks $= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot 4\pi a^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, tidak bergantung pada a (hukum Gauss).

CONTOH 10 — ALIRAN PANAS

Suhu $u(x, y, z)$, konduktivitas K; aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju aliran panas keluar melalui permukaan tertutup S adalah $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$. Untuk $u = x^2 + y^2 + z^2$ pada bola jari-jari a, $\nabla u = 2\mathbf{r}$, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 2a$: fluks panas $= -K \cdot 2a \cdot 4\pi a^2 = -8\pi K a^3$ (negatif: panas mengalir ke dalam karena suhu makin besar ke luar).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ pada integral skalar, atau memakai $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ tanpa memeriksa arahnya terhadap orientasi.
- Mengabaikan orientasi: membalik normal mengubah tanda fluks.
- Memakai $\mathbf{n}$ satuan bersama $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ (nilai ganda): pakai satu saja.
- Pada permukaan tertutup bertutup, lupa memasukkan tutupnya.

5. Ringkasan

- $\iint_S f\, dS = \iint_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$.
- Fluks $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$; grafik: $\iint (-Pg_x - Qg_y + R)\, dA$.
- Orientasi: ke atas untuk grafik, ke luar untuk permukaan tertutup.

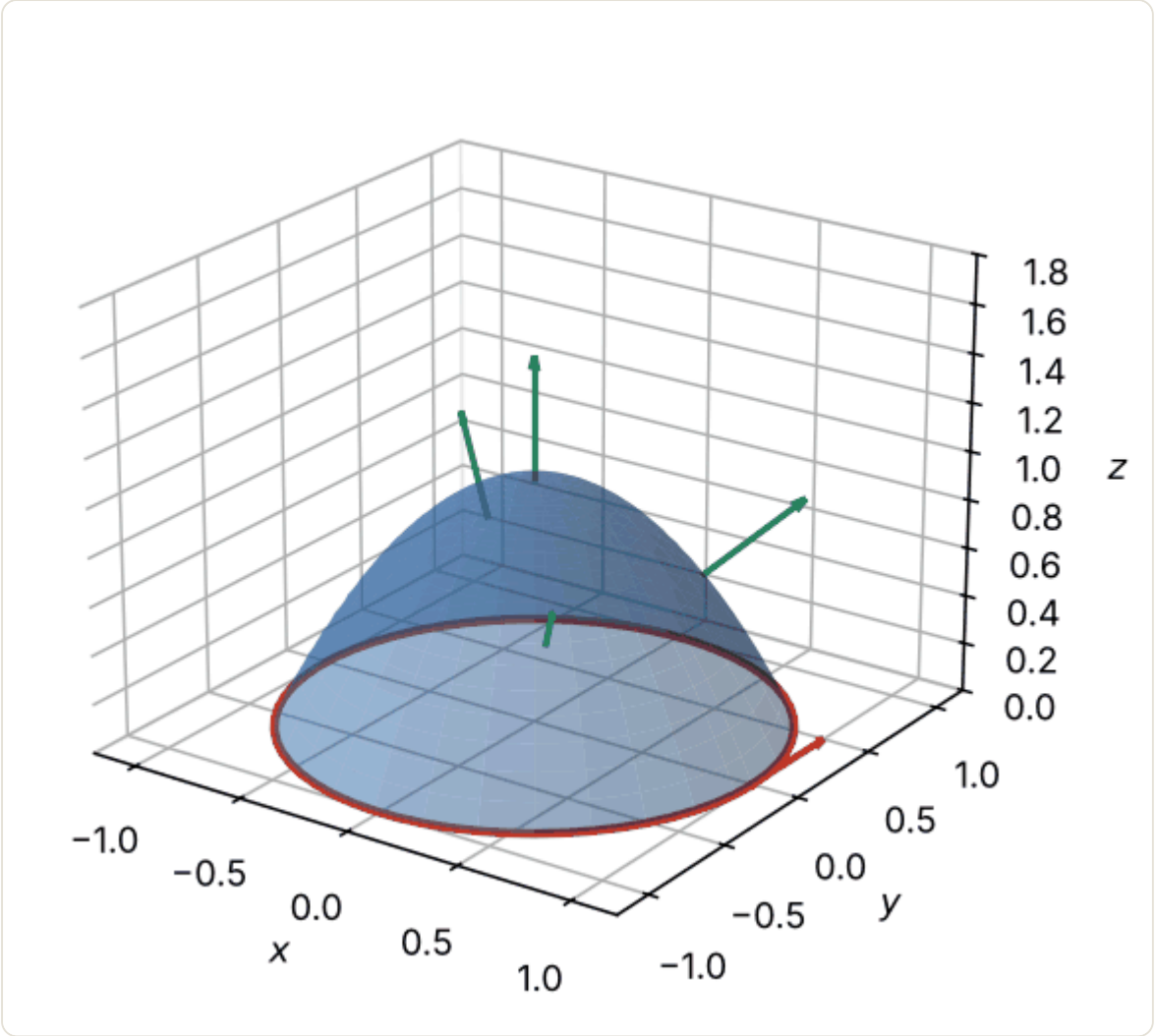
Berikutnya 16.8 Teorema Stokes.

16.8 Teorema Stokes

Teorema Green mengubah integral garis pada kurva tertutup di bidang menjadi integral ganda pada daerah di dalamnya. **Teorema Stokes** melakukan hal yang sama di ruang: sirkulasi medan vektor sepanjang kurva tertutup sama dengan fluks *curl* medan itu melalui permukaan yang dibatasi kurva.

1. Pernyataan

Misalkan S permukaan berorientasi mulus sebagian-sebagian, dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C. Orientasi C harus **sesuai** dengan orientasi S: bila berjalan sepanjang C dengan kepala searah normal $\mathbf{n}$, permukaan berada di sebelah kiri (aturan tangan kanan: jari melengkung searah C, ibu jari searah $\mathbf{n}$).



Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dengan normal ke atas (hijau) dan batas lingkaran C berlawanan arah jarum jam (merah).

TEOREMA STOKES

Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka di $\mathbb{R}^3$ yang memuat S, maka

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Bila S rata di bidang xy dengan $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$ dan Stokes menjadi teorema Green. Jadi Green adalah kasus khusus Stokes.

Gagasan bukti (grafik $z = g(x, y)$). Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ pada grafik ke atas, ruas kanan menjadi $\iint_D \big[-(R_y - Q_z)g_x - (P_z - R_x)g_y + (Q_x - P_y)\big]\, dA$. Ruas kiri: substitusi $z = g(x, y)$, $dz = g_x dx + g_y dy$, integral garis berubah menjadi integral garis pada ∂D di bidang xy dengan komponen $\big(P + Rg_x\big)$ dan $\big(Q + Rg_y\big)$; teorema Green dan aturan rantai pada $R(x, y, g(x, y))$ menyamakan keduanya. Permukaan umum dipecah menjadi potongan grafik; integral garis pada batas dalam saling menghapus.

2. Contoh

CONTOH 1 — PARABOLOID, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$, S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, normal ke atas; C: lingkaran satuan di bidang xy, berlawanan arah jarum jam.
Garis: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$, $\mathbf{F} = \langle \sin t, 0, \cos t \rangle$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -\sin^2 t$. $\oint = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = -\pi$.
Permukaan: $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle$. Untuk grafik: $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle = -2x - 2y - 1$. $\iint_D (-2x - 2y - 1)\, dA = -\pi$ (suku ganjil lenyap). Kedua cara memberi $-\pi$.

CONTOH 2 — MENGGANTI PERMUKAAN

Untuk soal yang sama, ganti S dengan cakram datar $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -1$, $\iint = -1 \cdot \pi = -\pi$. Hasilnya sama, karena batas C sama. *Inilah kegunaan Stokes:* pilih permukaan terdekat yang paling mudah.

CONTOH 3 — ELIPS HASIL IRISAN SILINDER DAN BIDANG

$\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$, C: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$ (13.1 Contoh 5), dilihat dari atas berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Pilih S potongan bidang $z = 2 - y$ di dalam silinder: $g_x = 0$, $g_y = -1$, normal ke atas $\langle 0, 1, 1 \rangle$. $\operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = 2$. $\iint_D 2\, dA = 2\pi$. Cek langsung: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 2 - \sin t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, -\cos t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle 2 - \sin t, \cos t, \sin t \rangle$; $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -2\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t$. $\int_0^{2\pi} = 0 + \pi + \pi - 0 = 2\pi$.

CONTOH 4 — BELAHAN BOLA

$\mathbf{F} = \langle -y, x, z^2 \rangle$, S: belahan atas bola jari-jari a, normal keluar; C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle 0, 0, 2 \rangle$. $\iint_S 2\, n_z\, dS = 2 \times$(luas proyeksi pada bidang xy)$= 2\pi a^2$ (karena $n_z\, dS = dA$ proyeksi). Langsung: pada C, $z = 0$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -y\, dx + x\, dy$, $\oint = 2 \cdot$ luas cakram $= 2\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PERMUKAAN TERTUTUP

Jika S permukaan *tertutup* (tanpa batas), maka $C = \emptyset$ dan $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Misalnya fluks curl apa pun melalui seluruh bola $= 0$. Ini konsisten dengan $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0$ dan teorema divergensi (16.9): $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F}\, dV = 0$.

3. Penafsiran curl

Ambil titik P dan cakram kecil S_a berjari-jari a yang tegak lurus arah $\mathbf{n}$, berpusat di P, dengan batas C_a. Karena $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ hampir konstan pada S_a, Stokes memberi

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx \operatorname{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n}\ \pi a^2 \ \Rightarrow\ \operatorname{curl}\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Jadi komponen curl pada arah $\mathbf{n}$ adalah **sirkulasi per satuan luas** pada bidang yang tegak lurus $\mathbf{n}$. Sirkulasi paling besar bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl}\mathbf{F}$, dan nilai maksimum itu adalah $|\operatorname{curl}\mathbf{F}|$. Ini membenarkan tafsir roda dayung di 16.5.

CONTOH 6 — PUSARAN

Fluida dengan kecepatan $\mathbf{v} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$ (rotasi dengan $\omega = 3$). $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \langle 0, 0, 6 \rangle$. Sirkulasi di sekeliling lingkaran jari-jari a (berlawanan arah jarum jam): $6 \cdot \pi a^2$. Langsung: di lingkaran, kecepatan $\mathbf{v}$ searah singgung dengan besar $3a$, dan keliling lingkaran $2\pi a$, jadi sirkulasi $= 3a \cdot 2\pi a = 6\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 7 — HUKUM FARADAY

Bila $\mathbf{E}$ medan listrik dan $\mathbf{B}$ medan magnet, Faraday: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\dfrac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Menerapkan Stokes ke ruas kiri memberi $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ untuk semua S, jadi bentuk diferensial: $\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, salah satu persamaan Maxwell.

4. Konservatif dan Stokes

Stokes menjelaskan syarat 16.3 secara lengkap. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ pada daerah sederhana terhubung D, maka untuk setiap kurva tertutup C di D, $C = \partial S$ untuk suatu permukaan $S \subset D$, sehingga $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Jadi $\mathbf{F}$ konservatif. (Pada daerah berlubang seperti 16.3 Contoh 4, S yang dimaksud mungkin harus melewati lubang, di tempat $\mathbf{F}$ tidak terdefinisi, sehingga bukti gagal.)

5. Kesalahan umum

- Tidak mencocokkan orientasi C dengan $\mathbf{n}$ (tangan kanan), sehingga tanda salah.
- Memakai curl yang salah, atau lupa mengambil produk titik dengan normal.
- Memakai Stokes pada $\mathbf{F}$ yang tidak halus di dalam S.
- Mengira nilai bergantung pada S: hanya batas C yang penting.

6. Ringkasan

- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; orientasi C dan S dengan aturan tangan kanan.
- Green adalah kasus khusus; pilih permukaan termudah dengan batas C.
- Curl = sirkulasi per satuan luas; $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow$ konservatif (daerah sederhana terhubung).

Berikutnya 16.9 Teorema Divergensi.

16.9 Teorema Divergensi

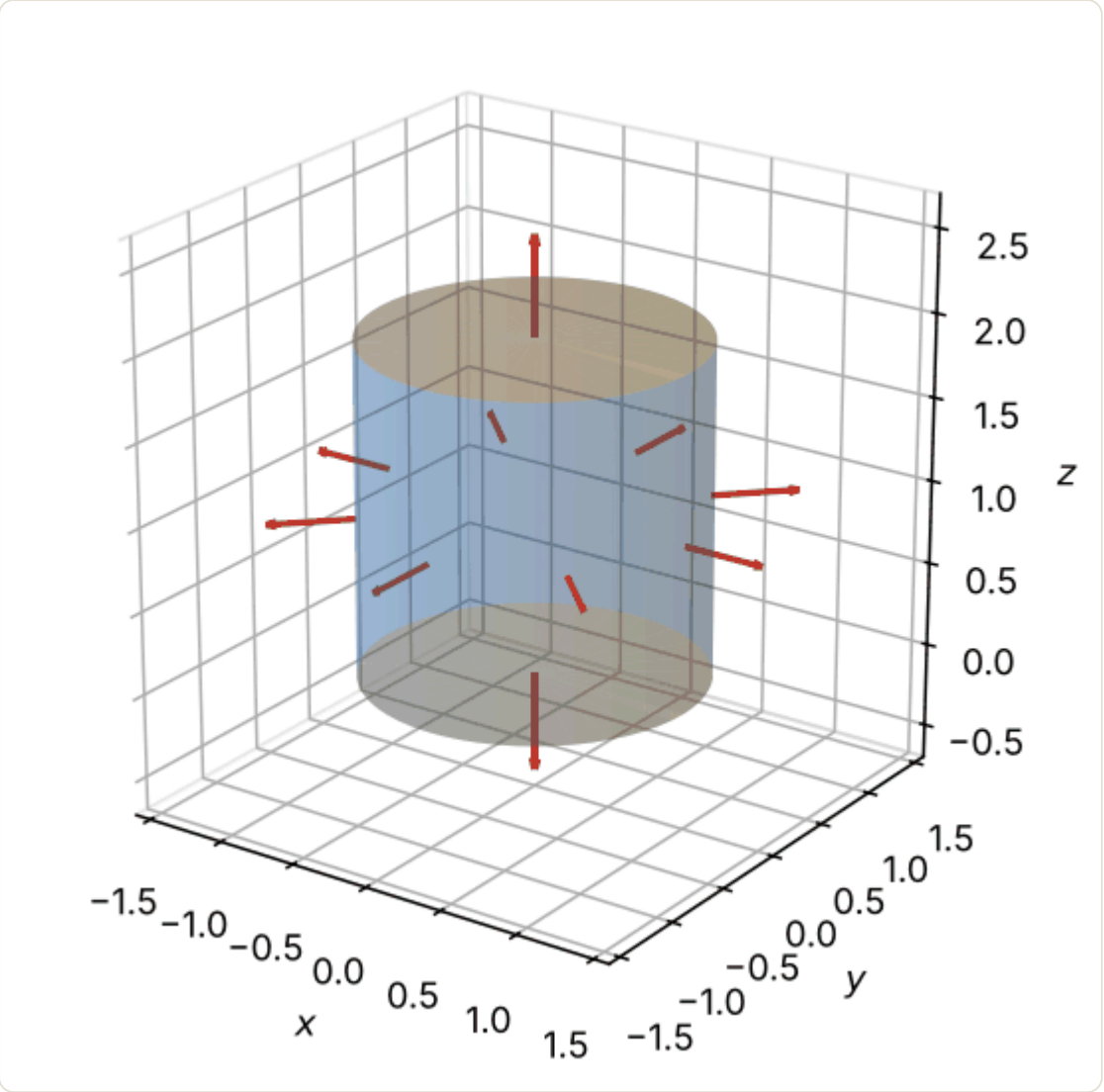
Teorema Dasar Kalkulus: integral turunan pada selang $=$ nilai pada batas. Teorema Green dan Stokes: integral "turunan" (curl) pada permukaan $=$ integral garis pada batas. **Teorema Divergensi** adalah versi tiga dimensi bentuk fluks teorema Green: integral divergensi pada *padatan* $=$ fluks melalui *permukaan* pembatasnya.

1. Pernyataan

TEOREMA DIVERGENSI (GAUSS)

Misalkan E padatan sederhana (daerah tertutup terbatas) yang dibatasi permukaan tertutup S dengan orientasi positif (normal keluar). Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka yang memuat E, maka

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$



Silinder tertutup: permukaan S terdiri dari sisi, tutup atas, dan tutup bawah, dengan normal keluar (merah).

Gagasan bukti. Tulis $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$; cukup membuktikan $\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$ (dua lainnya serupa). Bila $E = \{(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$: $\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \big[R(x,y,u_2) - R(x,y,u_1)\big]\,dA$ (teorema dasar). Sisi vertikal S tidak menyumbang ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}=0$). Permukaan atas $z=u_2$ (normal ke atas) menyumbang $\iint_D R(x,y,u_2)\,dA$, permukaan bawah (normal ke bawah) $-\iint_D R(x,y,u_1)\,dA$. Jumlahnya sama. Padatan umum dipotong menjadi padatan sederhana; fluks pada permukaan pemisah saling menghapus. ■

2. Contoh

CONTOH 1 — BOLA

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3\rangle$, S bola satuan. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2) = 3\rho^2$. $\iiint 3\rho^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5} \approx 7{,}540$. Menghitung fluks langsung pada bola akan jauh lebih rumit.

CONTOH 2 — SILINDER, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle x, y, z^2 \rangle$, E: $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 2$. $\operatorname{div} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$. $\iiint = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 (2 + 2z)\, r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 + 4) = 8\pi$.
Langsung: tutup atas $z = 2$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = z^2 = 4$, luas π: 4π. Tutup bawah $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$: $-z^2 = 0$. Sisi $\mathbf{n} = \langle x, y, 0 \rangle$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y^2 = 1$, luas sisi $2\pi \cdot 2 = 4\pi$: 4π. Total 8π. Cocok.

CONTOH 3 — KUBUS

$\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$, $E = [0, 1]^3$. $\operatorname{div} = y + z + x$. $\iiint (x + y + z)\, dV = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Fluks keluar dari kubus $= \frac{3}{2}$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN TERBUKA DENGAN MENUTUPNYA

Fluks $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ melalui paraboloid $S_1 :\ z = 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$, ke atas (16.7 Contoh 6 memberi $\frac{3\pi}{2}$ dengan hitung langsung). Tutup dengan cakram S_2: $z = 0, x^2 + y^2 \le 1$, normal $-\mathbf{k}$. $\iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iiint_E 3\, dV = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ (volume bawah paraboloid $2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = \frac{\pi}{2}$). Pada S_2: $\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) = -z = 0$. Jadi $\iint_{S_1} = \frac{3\pi}{2}$, sama dengan hasil langsung.

3. Menghitung volume dengan fluks

Pilih $\mathbf{F}$ dengan $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$, mis. $\mathbf{F} = \frac{1}{3}\langle x, y, z \rangle$ atau $\langle x, 0, 0 \rangle$:

$$V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S x\, dy\, dz.$$

CONTOH 5 — VOLUME BOLA

Pada bola jari-jari a: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a$. $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Hukum Gauss dan medan kuadrat terbalik

CONTOH 6 — FLUKS SEMBARANG PERMUKAAN PENGURUNG TITIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ mempunyai $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ untuk $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ (16.5). Misalkan S permukaan tertutup apa pun yang mengurung titik asal. Ambil bola kecil S_a berjari-jari a di dalam S; padatan E di antara S dan S_a tidak memuat asal. Teorema divergensi (normal keluar dari E, yaitu ke dalam pada S_a): $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 0\,dV = 0$. Pada S_a, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{a^2}$, fluks $= \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$. Jadi $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ untuk *setiap* permukaan yang mengurung asal.

CONTOH 7 — HUKUM GAUSS UNTUK LISTRIK

Dari Contoh 6, medan muatan titik Q, $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, memberi fluks $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ melalui permukaan tertutup apa pun yang mengurungnya. Untuk distribusi muatan dengan kerapatan ρ: $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$. Dengan teorema divergensi, $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$ untuk semua E, jadi $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (persamaan Maxwell).

5. Tafsir divergensi dan aliran fluida

Ambil bola kecil B_a berpusat di P, dengan permukaan S_a. Karena $\operatorname{div}\mathbf{F}$ hampir konstan di dalamnya,

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(P)\cdot V(B_a) \;\Rightarrow\; \operatorname{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Jadi divergensi adalah **fluks keluar per satuan volume**: $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$ di sumber, < 0 di penyerap.

CONTOH 8 — PERSAMAAN KONTINUITAS

Fluida dengan kerapatan $\rho(x,y,z,t)$ dan kecepatan $\mathbf{v}$. Massa dalam E: $\iiint_E \rho\,dV$. Laju perubahannya sama dengan negatif fluks keluar: $\frac{d}{dt}\iiint_E \rho\,dV = -\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_E \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\,dV$. Untuk semua E: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$. Fluida tak mampat ($\rho$ konstan) memberi $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

CONTOH 9 — PANAS

Aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju panas keluar dari E adalah $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}(-K\nabla u)\,dV = -K\iiint_E \nabla^2 u\,dV$. Dengan kapasitas panas $c\rho$: $c\rho\,u_t = K\nabla^2 u$ (persamaan panas, 14.3).

6. Hubungan keempat teorema

Teorema	Ruas satu	Ruas lain
Dasar Kalkulus	$\int_a^b F'(x)\,dx$	$F(b) - F(a)$
Dasar integral garis	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$	$f(B) - f(A)$
Green	$\iint_D (Q_x - P_y)\,dA$	$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$
Stokes	$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Divergensi	$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$	$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Pola yang sama: integral "turunan" atas suatu daerah sama dengan integral fungsi aslinya pada *batas* daerah itu.

7. Kesalahan umum

- Memakai teorema pada permukaan yang tidak tertutup tanpa menambah tutupnya.
- Normal ke dalam alih-alih ke luar sehingga tanda terbalik.
- Menerapkan teorema bila $\mathbf{F}$ punya singularitas di dalam E (seperti medan kuadrat terbalik pada permukaan yang mengurung asal): perlu langkah seperti Contoh 6.
- Lupa menjumlahkan fluks semua bagian permukaan saat menghitung langsung.

8. Ringkasan

- $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$, S tertutup, normal keluar.
- Divergensi $=$ fluks keluar per satuan volume; $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ berarti tak mampat.
- Hukum Gauss: fluks medan kuadrat terbalik melalui permukaan pengurung $= 4\pi$ (atau Q/ε_0).

Bab 16 berakhir di sini, dan dengan itu semua bab buku ini tersedia.