Bab 15: Integral Ganda

Bab 15 · Integral Ganda

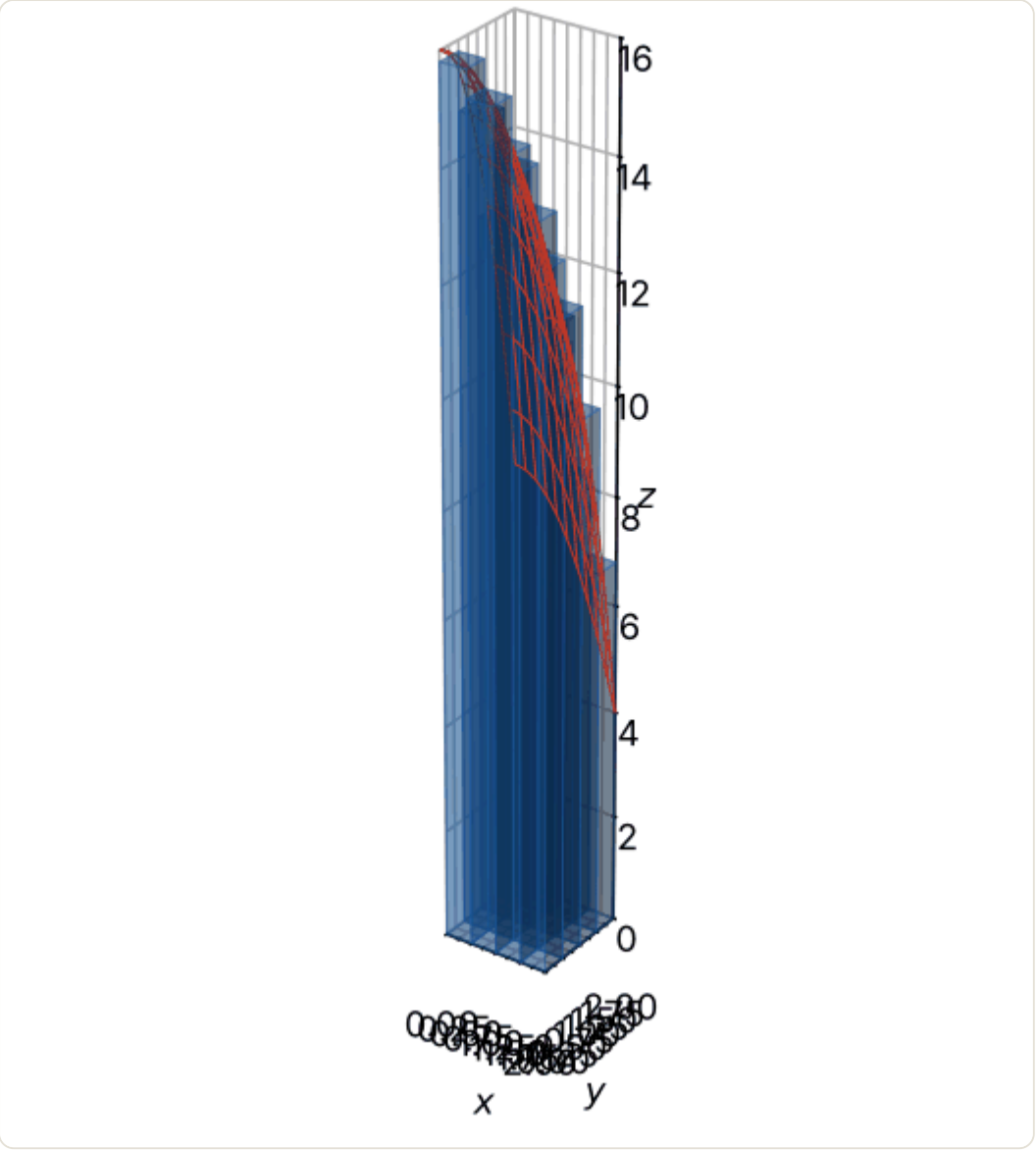
15.1 Integral Ganda Dua atas Persegi Panjang

Integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ menjumlahkan nilai f di sepanjang selang, dan mengukur luas di bawah kurva. Integral ganda dua menjumlahkan nilai $f(x,y)$ di atas sebuah daerah di bidang dan mengukur **volume** di bawah permukaan.

1. Volume dan jumlah Riemann

Misalkan $f(x,y) \geq 0$ pada persegi panjang tertutup $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Padatan S yang terletak di atas R dan di bawah grafik $z = f(x,y)$ kita hampiri sebagai berikut:

1. Bagi $[a,b]$ menjadi m selang lebar $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ dan $[c,d]$ menjadi n selang lebar $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Ini membagi R menjadi mn persegi panjang kecil R_{ij} dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$.
2. Pilih titik contoh (x_{ij}^*, y_{ij}^*) di tiap R_{ij}. Balok di atas R_{ij} berketinggian $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ mempunyai volume $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.
3. Jumlahkan: $V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$ (*jumlah Riemann ganda*).



Hampiran volume di bawah $z = 16 - x^2 - 2y^2$ dengan 4×4 balok (titik tengah).

DEFINISI INTEGRAL GANDA DUA

Integral ganda dua f atas persegi panjang R:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A,$$

bila limit ada. Bila f kontinu (atau terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus), limit ada dan tidak bergantung pada pilihan titik contoh. Bila $f \geq 0$, $\iint_R f\,dA$ adalah volume padatan di bawah grafik f dan di atas R.

CONTOH 1 — JUMLAH RIEMANN BEBERAPA PILIHAN

$f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pada $R = [0,2] \times [0,2]$, $m = n = 2$ ($\Delta A = 1$).
Titik sudut kiri-bawah: $f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 16 + 14 + 15 + 13 = 58$.
Titik tengah $(0{,}5;0{,}5), (0{,}5;1{,}5), (1{,}5;0{,}5), (1{,}5;1{,}5)$: $15{,}25 + 11{,}25 + 13{,}25 + 9{,}25 = 49$.
Nilai sebenarnya $\iint_R f\,dA = 48$ (dihitung di 15.2). Aturan titik tengah (49) jauh lebih dekat dari sudut kiri-bawah (58), karena f turun ke arah kanan dan atas sehingga sudut kiri-bawah selalu melebih-lebihkan.

CONTOH 2 — HAMPIRAN TABEL

Curah hujan (cm) di empat titik tengah sebuah daerah 4×4 km dibagi 2×2: $1{,}2;\ 0{,}8;\ 1{,}5;\ 1{,}1$. Tiap persegi 2×2 km luasnya 4 km². Total volume air $\approx 4(1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}5 + 1{,}1) = 4(4{,}6) = 18{,}4$ km²·cm. Rata-rata curah hujan $= 18{,}4/16 = 1{,}15$ cm.

2. Nilai rata-rata

NILAI RATA-RATA

$$f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Untuk contoh di atas: $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

3. Sifat-sifat

- $\iint_R [f + g]\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA$.
- $\iint_R cf\,dA = c\iint_R f\,dA$.
- Bila $f \geq g$ pada R, maka $\iint_R f\,dA \geq \iint_R g\,dA$.
- Bila $R = R_1 \cup R_2$ tidak tumpang tindih (kecuali di batas), $\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$.
- $m\,A(R) \leq \iint_R f\,dA \leq M\,A(R)$ bila $m \leq f \leq M$ pada R.
- $\iint_R 1\,dA = A(R)$.

CONTOH 3 — MEMAKAI KESIMETRIAN

$\iint_R \dfrac{\sin x}{1+y^2}\,dA$ dengan $R=[-\pi,\pi]\times[0,1]$. Karena $\sin x$ fungsi ganjil terhadap x dan R simetris terhadap $x=0$, integralnya $=0$ tanpa perhitungan panjang.

CONTOH 4 — BATAS NILAI INTEGRAL

Pada $R=[0,1]\times[0,2]$, $1\le x^2+y^2+1\le 6$. Maka $2\le \iint_R (x^2+y^2+1)\,dA\le 12$ (luas $R=2$).

CONTOH 5 — VOLUME DARI GEOMETRI

$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA$ dengan $R=[-1,1]\times[-2,2]$: grafik $z=\sqrt{1-x^2}$ adalah setengah silinder lingkaran jari-jari 1 sepanjang sumbu y (panjang 4). Volume $=\frac{1}{2}\pi(1)^2\cdot 4=2\pi$.

4. Kesalahan umum

- Mengartikan integral ganda sebagai luas. $\iint_R f\,dA$ adalah volume (bila $f\ge 0$); luas R adalah $\iint_R 1\,dA$.
- Menghitung jumlah Riemann tanpa mengalikan dengan ΔA.
- Mengabaikan nilai negatif: bagian di bawah bidang xy menyumbang volume bertanda negatif.

5. Ringkasan

- $\iint_R f\,dA=\lim \sum f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A$; volume bila $f\ge 0$.
- Aturan titik tengah memberi hampiran yang baik.
- Sifat linear, aditif, monoton; nilai rata-rata $=\frac{1}{A}\iint f\,dA$.

Berikutnya 15.2: cara menghitungnya dengan integral berulang.

15.2 Integral Berulang

Menghitung integral ganda dari definisi limit hampir mustahil. Untungnya ada teorema yang mengubahnya menjadi dua integral satu peubah berurutan.

1. Integral parsial dan integral berulang

$\int_c^d f(x,y)\,dy$ berarti integrasi terhadap y dengan x dianggap konstan; hasilnya fungsi x. Integral hasilnya terhadap x memberi **integral berulang**:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

Integral dalam dihitung lebih dulu, dari dalam ke luar.

CONTOH 1 — DUA URUTAN

$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{2}$. Dengan urutan dibalik: $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 dy = \int_1^2 9y\,dy = 9\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{2}$. Hasilnya sama.

2. Teorema Fubini

TEOREMA FUBINI

Jika f kontinu pada $R = [a,b]\times[c,d]$, maka

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Berlaku juga bila f terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, asalkan integral berulangnya ada.)

Gagasan geometris. Untuk x tetap, $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ adalah luas irisan padatan oleh bidang yang tegak lurus sumbu x. Mengintegrasikan luas irisan sepanjang x memberi volume (prinsip Cavalieri). Mengiris pada arah lain memberi urutan lain, dengan volume yang sama.

CONTOH 2 — VOLUME NYATA

$\iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA$ dengan $R = [0,2] \times [0,2]$: $\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[16y - x^2 y - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \tfrac{16}{3}\right) dx = \int_0^2 \left(\tfrac{80}{3} - 2x^2\right) dx = \tfrac{160}{3} - \tfrac{16}{3} = 48.$

CONTOH 3 — PILIH URUTAN YANG MUDAH

$\iint_R ye^{xy}\,dA$, $R = [0,1] \times [0,2]$. Integrasikan lebih dulu terhadap x (karena $\int ye^{xy}dx = e^{xy}$ sederhana): $\int_0^2 \int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^2 (e^y - 1)\,dy = e^2 - 3 \approx 4{,}389$. Bila dibalik, integral dalam $\int ye^{xy}dy$ memerlukan integrasi parsial dan jauh lebih rumit.

CONTOH 4 — FUNGSI TERPISAH

Bila $f(x,y) = g(x)h(y)$ dan $R = [a,b] \times [c,d]$, maka $\iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$. Misalnya $\iint_{[0,\pi/2]^2} \sin x \cos y\,dA = 1 \cdot 1 = 1.$

CONTOH 5 — INTEGRASI TERHADAP X LEBIH DULU

Hitung $\iint_{[1,2]\times[0,\pi]} y\sin(xy)\,dA$. Integrasi terhadap x lebih dulu: $\int_1^2 y\sin(xy)\,dx = [-\cos(xy)]_1^2 = \cos y - \cos 2y$. Lalu $\int_0^\pi (\cos y - \cos 2y)\,dy = 0 - 0 = 0.$

3. Penerapan pada volume

CONTOH 6 — PADATAN DI BAWAH BIDANG

Volume padatan di bawah bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas $R = [0,1] \times [0,1]$: $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (4 - x - 1)\,dx = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}$.

CONTOH 7 — VOLUME ANTARA DUA PERMUKAAN

Volume di antara $z = x^2 + y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas) di atas $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pada R berlaku $x^2 + y^2 \le 2$, sehingga $x^2 + y^2 \le 8 - (x^2 + y^2)$ dan urutan permukaan benar. $V = \iint_R (8 - 2x^2 - 2y^2)\, dA = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 32 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$. (Karena $\iint_R x^2 dA = \int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.)

4. Kesalahan umum

- Salah menaruh batas: pada $dy\, dx$, batas dalam untuk y, batas luar untuk x.
- Menjadikan x variabel saat mengintegrasikan terhadap y (atau sebaliknya).
- Menganggap faktorisasi $\iint g(x)h(y)$ bekerja pada daerah bukan persegi panjang. Pada daerah umum, batas bergantung pada peubah lain.

5. Ringkasan

- Integral berulang: hitung dari dalam ke luar, menahan peubah lain konstan.
- Fubini: untuk f kontinu pada persegi panjang, urutan tidak penting.
- Pilih urutan yang membuat integral dalam termudah.

Berikutnya 15.3: daerah yang bukan persegi panjang.

15.3 Integral Ganda Dua atas Daerah Umum

Daerah yang kita integrasikan jarang berupa persegi panjang. Di sini kita memperluas integral ganda ke daerah terbatas D berbentuk umum dengan menggunakan batas yang bergantung pada peubah lain.

1. Integral atas daerah umum

Untuk daerah terbatas D, kurung D dalam persegi panjang R dan definisikan $F(x,y) = f(x,y)$ bila $(x,y) \in D$ dan $F = 0$ di luar D. Maka $\iint_D f\,dA := \iint_R F\,dA$. Dalam praktik kita memakai dua jenis daerah.

DAERAH TIPE I (BATAS ATAS DAN BAWAH BERUPA FUNGSI X)

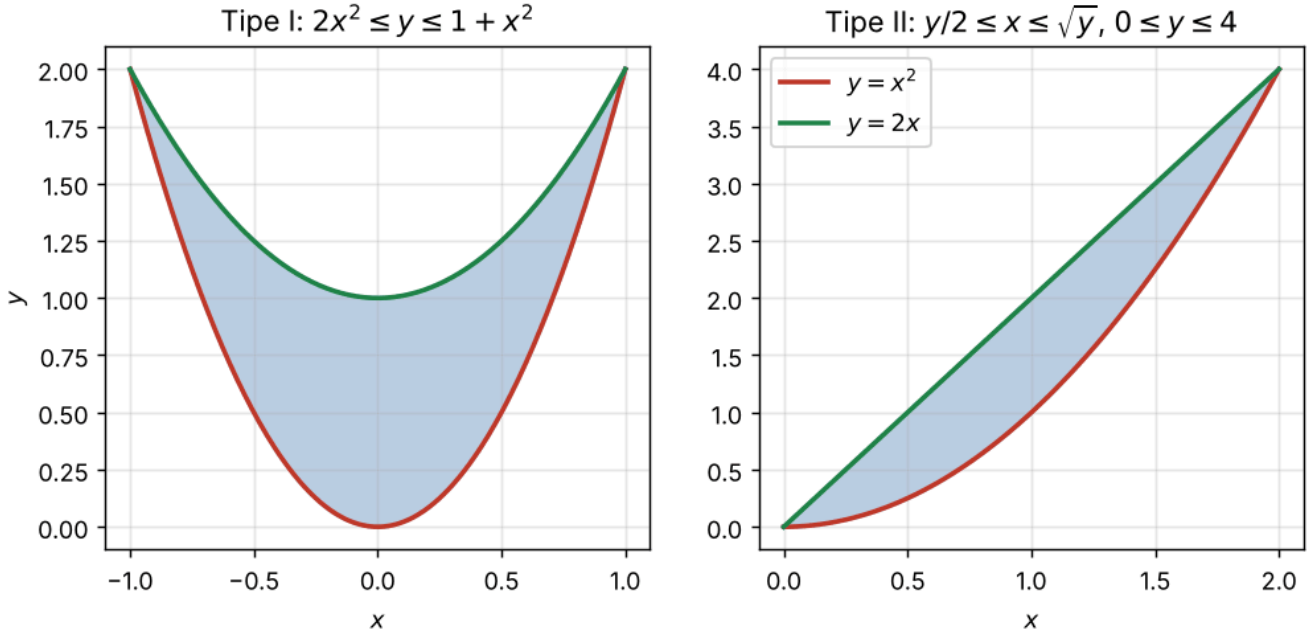
$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ dengan g_1, g_2 kontinu. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

DAERAH TIPE II (BATAS KIRI DAN KANAN BERUPA FUNGSI Y)

$D = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



Kiri: tipe I, dibatasi parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Kanan: tipe II, daerah di antara $y = x^2$ dan $y = 2x$.

CARA MENYUSUN BATAS

1. Gambar daerah D.
2. Untuk tipe I: gambar anak panah vertikal melalui D dari batas bawah ke batas atas; itulah batas y. Batas x adalah ujung kiri dan kanan seluruh daerah.
3. Untuk tipe II: anak panah horizontal; batas x dari kiri ke kanan, batas y adalah ujung bawah dan atas.

Batas integral dalam boleh memuat peubah luar; batas integral luar harus konstanta.

2. Contoh

CONTOH 1 — TIPE I

$\iint_D (x + 2y)\,dA$, D antara parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Perpotongan: $2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$. Untuk $-1 \le x \le 1$, $2x^2 \le y \le 1 + x^2$.

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2 \Big]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + x - x^3 + 2x^2 - 3x^4\right) d$$

Suku ganjil x dan $-x^3$ saling menghapus pada selang simetris: $2\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \dfrac{32}{15} \approx 2{,}133$.

CONTOH 2 — TIPE II

$\iint_D (x+y)\,dA$, D antara $y = x^2$ dan $y = 2x$ (titik potong $(0,0)$ dan $(2,4)$). Sebagai tipe II: $0 \le y \le 4$, $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$. Sebagai tipe I: $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 2x$: $\int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x} dx$. Di $y = 2x$ suku dalam kurung bernilai $2x^2 + 2x^2 = 4x^2$; di $y = x^2$ bernilai $x^3 + \frac{x^4}{2}$. Jadi integralnya $\int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx$ dan hasilnya $\frac{32}{3} - 4 - \frac{16}{5} = \frac{160 - 60 - 48}{15} = \frac{52}{15} \approx 3{,}467$.

CONTOH 3 — DAERAH DI ANTARA $Y = X$ DAN $Y = X^2$

D: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$. $\iint_D (x+y)\,dA = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$.

CONTOH 4 — VOLUME TETRAHEDRON

Padatan dibatasi bidang $x + 2y + z = 2$ dan bidang-bidang koordinat (oktan pertama). Alas: segitiga di bidang xy dengan $z = 0$: $x + 2y = 2$, jadi $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$. Tinggi $z = 2 - x - 2y$.

$$V = \int_0^2 \int_0^{1 - x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \left[-\tfrac{2}{3}\left(1 - \tfrac{x}{2}\right)^3\right]_0^2 = \tfrac{2}{3}.$$

Cek geometris: $V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$ (tetrahedron dengan rusuk saling tegak lurus 2, 1, 2).

CONTOH 5 — LUAS DARI INTEGRAL GANDA

$A(D) = \iint_D 1\,dA$. Untuk daerah Contoh 1: $\int_{-1}^{1} \left[(1 + x^2) - 2x^2\right] dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Untuk daerah Contoh 2: $\int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Kebetulan sama.

3. Membalik urutan integrasi

Kadang integral berulang hanya dapat dihitung bila urutannya dibalik: gambar daerah dari batas yang diberikan, lalu tulis ulang sebagai tipe lain.

CONTOH 6 — ANTITURUNAN TIDAK ELEMENTER

$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$. $\int e^{y^2}\,dy$ tidak punya antiturunan elementer. Daerahnya $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$: segitiga dengan titik $(0,0), (0,1), (1,1)$. Sebagai tipe II: $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.
$\int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\tfrac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \dfrac{e-1}{2} \approx 0{,}859.$

CONTOH 7 — PEMBALIKAN DENGAN COSINUS

$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dx\,dy$. Daerah: $0 \le y \le 2$, $y^2 \le x \le 4$, yaitu $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{x}$.
Balik: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^4 = \frac{\sin 16}{4} \approx -0{,}072.$

4. Sifat tambahan

- Jika $D = D_1 \cup D_2$ dan D_1, D_2 tidak tumpang tindih kecuali di batas: $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$.
- $m\,A(D) \le \iint_D f\,dA \le M\,A(D)$ bila $m \le f \le M$.
- Nilai rata-rata: $f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(D)}\iint_D f\,dA$.

CONTOH 8 — TAKSIRAN

$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dA$ untuk D cakram $x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$ (luas $\frac{\pi}{4}$). Pada D: $0 \le \sin(x^2+y^2) \le \sin\frac{1}{4} \approx 0{,}247$. Maka $0 \le \iint \le 0{,}247 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 0{,}194$.

5. Kesalahan umum

- Batas luar yang memuat peubah. Batas luar harus konstanta.
- Tidak menggambar daerah, sehingga batas tertukar.
- Pada pembalikan urutan, lupa bahwa batas lama menjadi batas yang berbeda: gambar dulu.
- Salah tanda ketika kurva atas dan bawah tertukar (hasil luas negatif).

6. Ringkasan

- Tipe I: $a \le x \le b$, $g_1 \le y \le g_2$. Tipe II: $c \le y \le d$, $h_1 \le x \le h_2$.
- Gambar daerah, tulis batas, hitung dari dalam ke luar.

- Membalik urutan dapat menghindari antiturunan yang tak elementer.

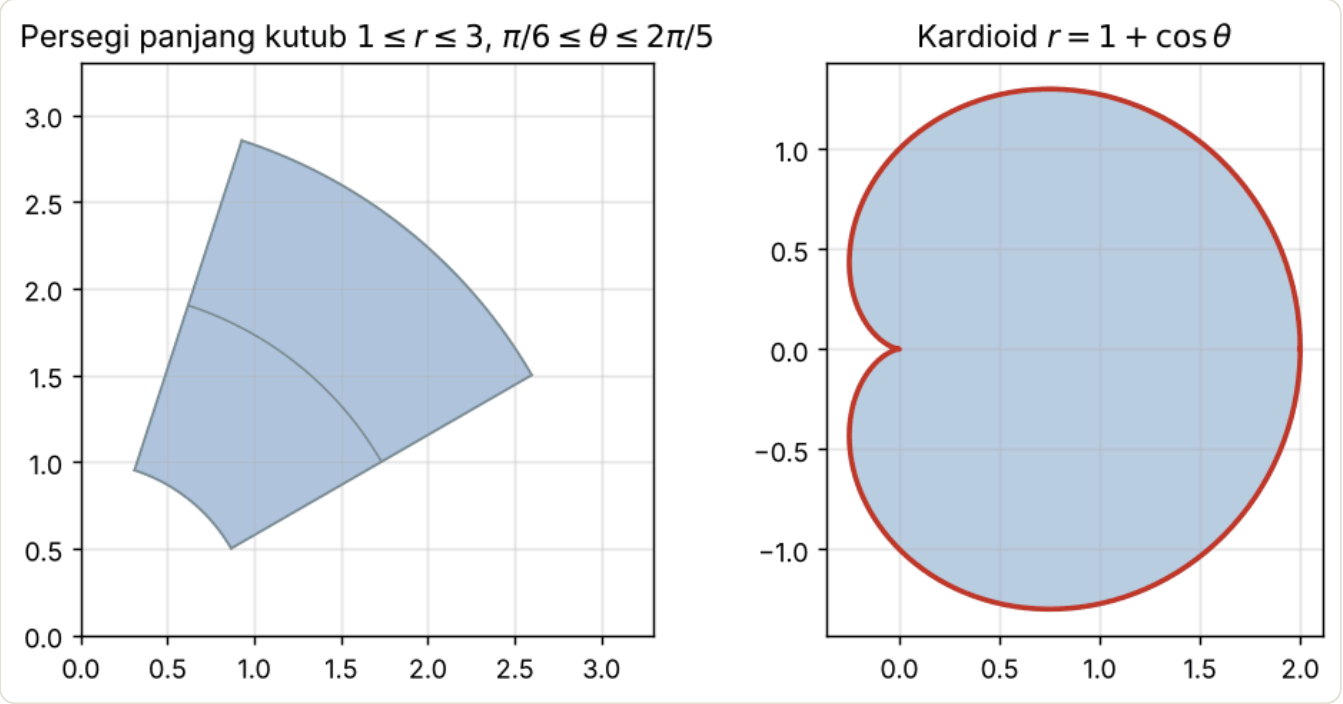
Berikutnya 15.4: koordinat kutub.

15.4 Integral Ganda Dua dalam Koordinat Kutub

Bila daerah berupa lingkaran, cincin, atau juring, atau bila integran memuat $x^2 + y^2$, koordinat kutub jauh lebih cocok daripada koordinat Kartesius.

1. Persegi panjang kutub

Dalam koordinat kutub, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. **Persegi panjang kutub** adalah $R = \{(r,\theta) : a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ (dengan $0 \le a < b$, $\beta - \alpha \le 2\pi$).



Kiri: persegi panjang kutub. Kanan: daerah di dalam kardioid.

Mengapa muncul faktor r. Bagi R menjadi persegi panjang kutub kecil R_{ij} dengan lebar Δr dan sudut $\Delta\theta$. Luas sektor cincin $= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$ dengan r_i^* rata-rata jari-jari. Jadi $\Delta A_{ij} = r_i^*\Delta r\Delta\theta$: luas elemen lebih besar bila lebih jauh dari titik asal.

PERUBAHAN KE KOORDINAT KUTUB

Jika f kontinu pada persegi panjang kutub R: $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta.$$

Bentuk $dA = r\,dr\,d\theta$. Jangan lupa faktor r.

CONTOH 1 — PARABOLOID

Volume di bawah $z = 4 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang xy: daerah $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA DAN KERUCUT

Belahan bola atas $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (jari-jari 3): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{9 - r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = 18\pi$ (sesuai $\frac{2}{3}\pi \cdot 27$). Padatan di bawah kerucut $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang xy: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3 - r) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 9\pi$, sesuai rumus kerucut $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3$.

CONTOH 3 — INTEGRAN DENGAN $X^2 + Y^2$

$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, D cakram satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2}(e - 1) = \pi(e - 1) \approx 5{,}398$. Di Kartesius integral ini tak dapat dihitung secara elementer.

2. Daerah kutub umum

DAERAH Θ-SEDERHANA

Jika $D = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$, maka

$$\iint_D f\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

Dengan $f = 1$: $A(D) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[h_2^2 - h_1^2\right] d\theta$.

CONTOH 4 — LUAS KARDIOID

$r = 1 + \cos\theta$: $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}$.

CONTOH 5 — LINGKARAN YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

$\iint_D x\,dA$ dengan $D:\ x^2 + y^2 \le 2x$, yaitu $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. Dalam kutub: $r^2 \le 2r\cos\theta \Rightarrow r \le 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi$. Cek: $\iint x\,dA = \bar{x}\cdot A = 1\cdot\pi$ (pusat massa di $x=1$, luas π).

CONTOH 6 — CINCIN

$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ untuk $1 \le x^2 + y^2 \le 9$: $\int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1}{r}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$.

3. Integral Gauss

CONTOH 7 — $\int_{-\infty}^{\infty} E^{-X^2}\,DX = \sqrt{\Pi}$

Misalkan $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Maka $I^2 = \iint e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$. Jadi $I = \sqrt{\pi}$ (karena $I > 0$). Hasil ini fondasi distribusi normal dalam statistika.

4. Kapan memakai koordinat kutub?

- Daerah: lingkaran, cakram, cincin, juring, kardioid, kurva $r = f(\theta)$.
- Integran: bergantung pada $x^2 + y^2$, atau pada $y/x = \tan\theta$.
- Hindari bila daerah berbentuk persegi atau segitiga umum.

5. Kesalahan umum

- Lupa faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.

- Lupa mengubah x, y dalam integran menjadi $r\cos\theta$, $r\sin\theta$.
- Batas θ salah untuk lingkaran yang tidak berpusat di asal (mis. $r = 2\cos\theta$ hanya memakai $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- Memakai $0 \le \theta \le \pi$ untuk lingkaran penuh. Lingkaran penuh di sekitar asal perlu 2π.

6. Ringkasan

- $dA = r\,dr\,d\theta$; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
- Daerah: $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$.
- Aplikasi: volume paraboloid/bola/kerucut, integral Gauss.

Berikutnya 15.5 Penerapan Integral Ganda Dua.

15.5 Penerapan Integral Ganda Dua

Integral ganda dua mengukur lebih dari volume. Dengan memilih integran yang tepat kita menghitung massa lamina, pusat massa, momen inersia, probabilitas, dan nilai harapan.

1. Kerapatan dan massa

Lamina (keping tipis) menempati daerah D di bidang dengan **rapat massa** (massa per satuan luas) $\rho(x,y)$ kontinu. Massa potongan kecil ΔA di (x,y) adalah $\approx \rho\,\Delta A$; menjumlahkan:

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA.$$

Hal yang sama berlaku untuk muatan listrik (kerapatan muatan σ): $Q = \iint_D \sigma\,dA$.

2. Momen dan pusat massa

MOMEN DAN PUSAT MASSA

Momen terhadap sumbu x dan y:

$$M_x = \iint_D y\,\rho\,dA, \qquad M_y = \iint_D x\,\rho\,dA.$$

Pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Bila ρ konstan, pusat massa disebut **sentroid** dan hanya bergantung pada bentuk D.

CONTOH 1 — SEGITIGA DENGAN KERAPATAN $X+Y$

Lamina segitiga $D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$, $\rho = x+y$. $m = \int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. $M_y = \iint x(x+y)\,dA = \frac{1}{8}$, $M_x = \frac{1}{8}$ (simetri antara x dan y). Pusat massa: $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{1/8}{1/3} = \dfrac{3}{8}$. Bandingkan sentroid segitiga $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: massa lebih terkonsentrasi menjauhi asal karena ρ naik ke arah itu.

CONTOH 2 — SETENGAH CAKRAM

Sentroid setengah cakram $D:\ x^2+y^2\le a^2,\ y\ge 0$ ($\rho=1$): $A=\frac{\pi a^2}{2}$; $\bar{x}=0$ (simetri).
$M_x=\iint y\,dA=\int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{a^3}{3}\cdot 2=\frac{2a^3}{3}$. $\bar{y}=\dfrac{2a^3/3}{\pi a^2/2}=\dfrac{4a}{3\pi}\approx 0{,}424a$.

3. Momen inersia

Momen inersia mengukur kesulitan memutar benda. Partikel bermassa m pada jarak d dari sumbu mempunyai momen inersia md^2. Untuk lamina:

$$I_x=\iint_D y^2\rho\,dA,\qquad I_y=\iint_D x^2\rho\,dA,\qquad I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho\,dA=I_x+I_y.$$

I_0 adalah *momen inersia polar* terhadap titik asal. **Jari-jari girasi** R terhadap sumbu: $mR^2=I$, jadi $R=\sqrt{I/m}$.

CONTOH 3 — CAKRAM HOMOGEN

Cakram $x^2+y^2\le a^2$, ρ konstan, massa $m=\rho\pi a^2$. $I_0=\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{1}{2}ma^2$. Karena simetri, $I_x=I_y=\frac{1}{4}ma^2$. Jari-jari girasi terhadap sumbu x: $R=\frac{a}{2}$.

CONTOH 4 — MOMEN INERSIA SEGITIGA CONTOH 1

Untuk lamina Contoh 1: $I_x=\iint y^2(x+y)\,dA=\frac{1}{15}$, $I_y=\frac{1}{15}$ (simetri), $I_0=\frac{2}{15}$. Jari-jari girasi $R_x=\sqrt{I_x/m}=\sqrt{\frac{1/15}{1/3}}=\sqrt{\frac{1}{5}}\approx 0{,}447$.

4. Probabilitas

Dua peubah acak kontinu X,Y mempunyai **fungsi kerapatan gabungan** $f(x,y)\ge 0$ dengan $\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dA=1$. Peluang titik (X,Y) jatuh di D:

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)\,dA.$$

Nilai harapan: $\mu_1=E[X]=\iint x f\,dA$, $\mu_2=E[Y]=\iint y f\,dA$.

CONTOH 5 — KERAPATAN POLINOMIAL

$f(x,y) = x + y$ pada $[0,1]^2$ (nol di tempat lain). Cek: $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1$. $P(X+Y \le 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{3}$. $E[X] = \iint x(x+y)\,dA = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$ (sama untuk Y).

CONTOH 6 — KERAPATAN EKSPONENSIAL

$f(x,y) = 2e^{-x-2y}$ untuk $x, y \ge 0$. Cek: $\int_0^\infty e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty 2e^{-2y}dy = 1 \cdot 1$. Karena f terpisah, X dan Y bebas. $P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty 2e^{-x-2y}dx\,dy = \int_0^\infty 2e^{-3y}dy = \frac{2}{3}$. $E[X] = 1$, $E[Y] = \frac{1}{2}$.

5. Muatan dan nilai rata-rata

CONTOH 7 — MUATAN TOTAL

Muatan terdistribusi pada cakram $x^2 + y^2 \le 1$ dengan kerapatan $\sigma = \sqrt{x^2+y^2}$ C/m². $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$ C.

CONTOH 8 — SUHU RATA-RATA

Suhu $T = 100 - x^2 - y^2$ pada cakram $x^2 + y^2 \le 4$. $\iint T\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (100 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi(200 - 4) = 392\pi$. Luas 4π. Suhu rata-rata $= \dfrac{392\pi}{4\pi} = 98$.

6. Kesalahan umum

- Lupa membagi momen dengan massa saat mencari $\bar{x}, \bar{y}$.
- Menyamakan sentroid dan pusat massa saat ρ tidak konstan.
- Menulis $I_x = \iint x^2 \rho\,dA$: momen terhadap sumbu x memakai y^2.
- Kerapatan peluang yang tidak berintegral 1.

7. Ringkasan

- $m = \iint \rho\,dA$; $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.
- $I_x = \iint y^2\rho$, $I_y = \iint x^2\rho$, $I_0 = I_x + I_y$.

- Peluang $= \iint_D f\, dA$; $E[X] = \iint x f\, dA$.

Berikutnya 15.6 Luas Permukaan.

15.6 Luas Permukaan

Kita sudah dapat menghitung panjang kurva (10.2, 13.3) dan volume padatan (15.2). Sekarang giliran luas sebuah permukaan lengkung S di ruang.

1. Permukaan sebagai grafik $z = f(x, y)$

Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu pada D. Bagi D menjadi persegi panjang kecil R_{ij} berluas $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Di atas R_{ij}, permukaan kira-kira berupa jajargenjang bagian dari bidang singgung (14.4). Jajargenjang itu dibentangkan oleh vektor

$$\mathbf{a} = \langle \Delta x,\, 0,\, f_x \Delta x \rangle, \qquad \mathbf{b} = \langle 0,\, \Delta y,\, f_y \Delta y \rangle.$$

Luasnya $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Hitung $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Delta x \Delta y \, \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$, sehingga

$$\Delta S_{ij} \approx \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\; \Delta A.$$

Menjumlahkan dan mengambil limit memberi:

LUAS PERMUKAAN GRAFIK

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA.$$

(Ini analog dari $L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ untuk kurva.)

FAKTOR KEMIRINGAN

$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \dfrac{1}{\cos \gamma}$, dengan γ sudut antara bidang singgung dan bidang xy (sudut antara $\langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ dan $\mathbf{k}$). Permukaan yang lebih miring mempunyai luas lebih besar daripada proyeksinya. Bila bidang datar, faktor sama dengan 1.

2. Contoh

CONTOH 1 — BIDANG

Bagian bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas persegi $[0,1]^2$: $f_x = -1$, $f_y = -2$, faktor $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Luas $= \sqrt{6} \cdot 1 \approx 2{,}449$. (Konstan karena kemiringan konstan.)

CONTOH 2 — PARABOLOID

Luas bagian paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 9$. Proyeksinya cakram $x^2 + y^2 \le 9$. $f_x = 2x$, $f_y = 2y$: $\sqrt{1 + 4r^2}$. Dengan kutub: $A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117{,}3$.

CONTOH 3 — BELAHAN BOLA

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$: $f_x = -\dfrac{x}{z}$, $f_y = -\dfrac{y}{z}$, $1 + f_x^2 + f_y^2 = \dfrac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2} = \dfrac{a^2}{z^2}$. Faktor $= \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^a \dfrac{a\, r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a = 2\pi a^2$. Seluruh bola: $4\pi a^2$. (Integralnya takwajar di $r = a$ tetapi konvergen.)

CONTOH 4 — KERUCUT

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ untuk $0 \le z \le h$: $f_x = \frac{x}{r}$, $f_y = \frac{y}{r}$, faktor $\sqrt{2}$. $A = \sqrt{2} \cdot \pi h^2$. Untuk $h = 3$: $9\sqrt{2}\pi \approx 39{,}99$. Cek: luas selimut kerucut $\pi r s$ dengan $r = h$, $s = h\sqrt{2}$: $\sqrt{2}\pi h^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PELANA DI ATAS CAKRAM

$z = xy$ di atas $x^2 + y^2 \le 1$: $\sqrt{1 + y^2 + x^2}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 3{,}829$ (cakram datar luas $\pi \approx 3{,}142$).

CONTOH 6 — INTEGRAL KARTESIUS

$z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ di atas $[0,1]^2$: $f_x = \sqrt{x}$, $f_y = \sqrt{y}$. $A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\left[(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\right] dx = \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right) \approx 1{,}4066$.

3. Permukaan parametrik

Bila permukaan diberikan oleh $\mathbf{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$, $(u,v) \in D$, vektor $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v$ menyinggung permukaan, dan

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA.$$

Grafik $z = f(x,y)$ adalah kasus khusus $\mathbf{r} = \langle x, y, f(x,y)\rangle$, $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$.

CONTOH 7 — BOLA LEWAT PARAMETRISASI

Bola jari-jari a: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $\mathbf{r}_\phi = \langle a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi\rangle$, $\mathbf{r}_\theta = \langle -a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0\rangle$. $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2\sin\phi\,\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\rangle$, panjang $a^2\sin\phi$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$. Faktor $a^2\sin\phi$ ini akan muncul lagi di koordinat bola (15.9).

CONTOH 8 — SILINDER

Silinder $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le h$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$. $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, 0\rangle$, panjang a. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} a\, dz\, d\theta = 2\pi a h$, yaitu keliling kali tinggi.

CONTOH 9 — PARABOLOID KEDUA

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ untuk $x^2 + y^2 \le 3$: faktor $\sqrt{1+r^2}$. $A = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{14\pi}{3} \approx 14{,}66$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $\iint_D z\, dA$ atau luas D sebagai luas permukaan. Luas D hanya luas proyeksi.
- Lupa faktor r ketika berpindah ke kutub setelah membentuk $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.
- Menggunakan rumus grafik pada permukaan yang tidak berupa grafik terhadap D yang dipilih (mis. bola penuh): gunakan parametrisasi.

5. Ringkasan

- Grafik: $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA$.

- Parametrik: $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$.
- Pengujian: bola $4\pi a^2$, silinder $2\pi a h$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 15.7 Integral Rangkap Tiga.

15.7 Integral Rangkap Tiga

Bila integran bergantung pada tiga peubah dan daerahnya berupa padatan di ruang, kita memakai integral rangkap tiga. Gagasannya sama dengan integral ganda dua, dengan satu dimensi tambahan.

1. Integral rangkap tiga atas balok

Untuk balok $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, bagi menjadi lmn balok kecil B_{ijk} dengan volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Pilih titik contoh dan jumlahkan:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V.$$

Bila f kontinu, limit ada. Teorema Fubini berlaku: integral rangkap tiga sama dengan integral berulang dalam urutan apa pun (enam kemungkinan urutan).

CONTOH 1 — BALOK

$\iiint_B xyz^2\,dV$, $B = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$. Karena integran terpisah: $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-1}^{2} y\,dy \cdot \int_0^3 z^2 dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{4} = 6{,}75$.

2. Padatan umum

Untuk padatan terbatas E, integral $\iiint_E f\,dV$ didefinisikan dengan memperluas f menjadi nol di luar E. Kita menghitungnya sebagai berikut. Pandang E sebagai padatan yang terletak antara dua permukaan di atas daerah D di bidang xy.

PADATAN TIPE 1 (ANTARA DUA GRAFIK $Z = U_1(X,Y)$ DAN $Z = U_2(X,Y)$)

$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$. Maka

$$\iiint_E f\,dV = \iint_D \Big[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dA.$$

Bila D tipe I: $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, maka

$$\iiint_E f\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f\,dz\,dy\,dx.$$

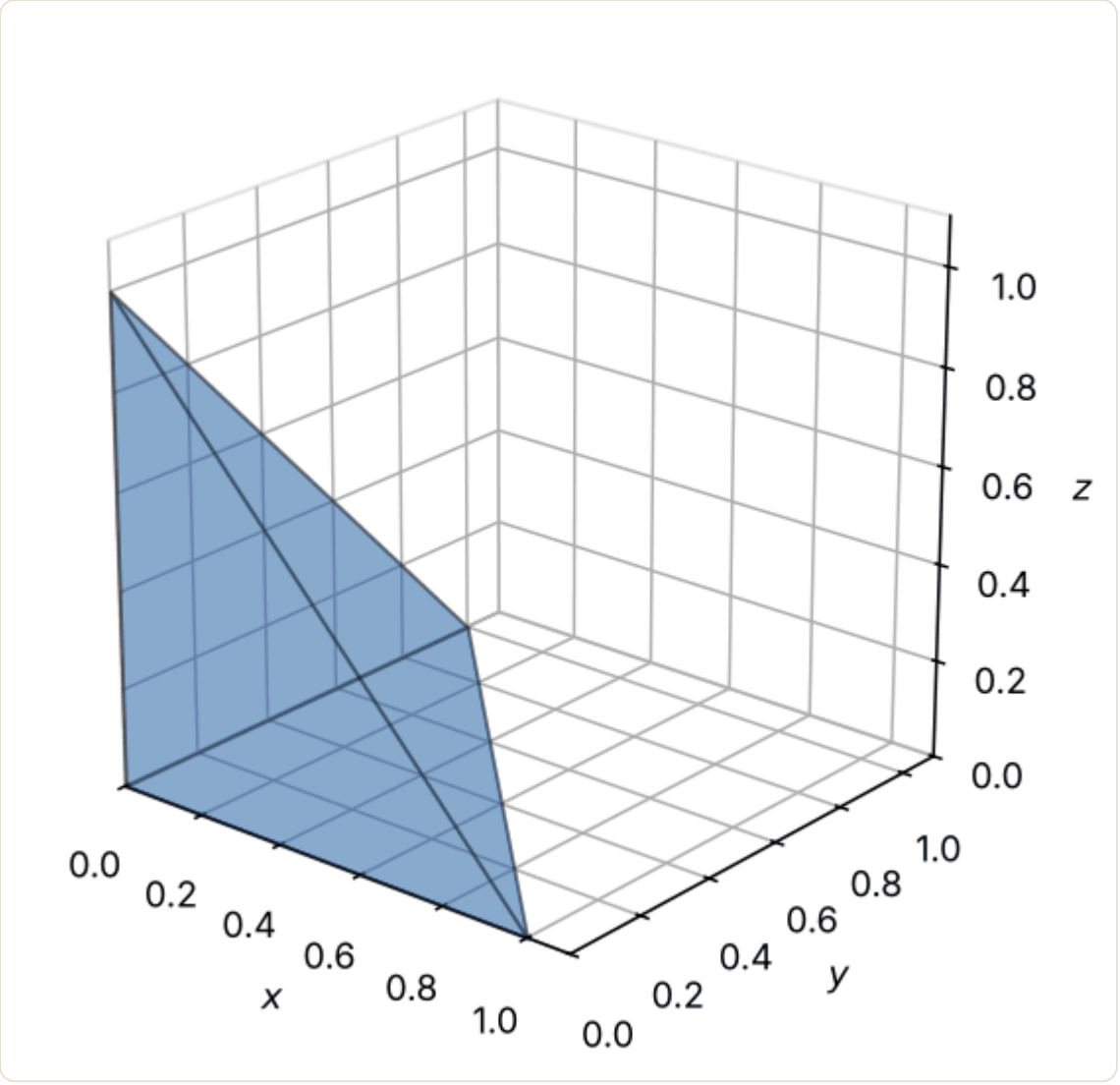
Padatan tipe 2 dan tipe 3 didefinisikan serupa dengan D di bidang yz atau xz (batas dalam berupa x atau y).

STRATEGI

1. Gambar E dan proyeksinya D pada bidang koordinat.
2. Tentukan permukaan bawah dan atas (batas integral dalam).
3. Tentukan batas D (dua integral luar).
4. Hitung dari dalam ke luar.

CONTOH 2 — TETRAHEDRON

E: padatan di oktan pertama di bawah bidang $x + y + z = 1$. D: segitiga $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$; $0 \le z \le 1 - x - y$. Volume: $\iiint 1\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$. Dan $\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{24}$. Maka koordinat z sentroid $\bar{z} = \dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$ (dan sama untuk $\bar{x}, \bar{y}$ karena simetri).



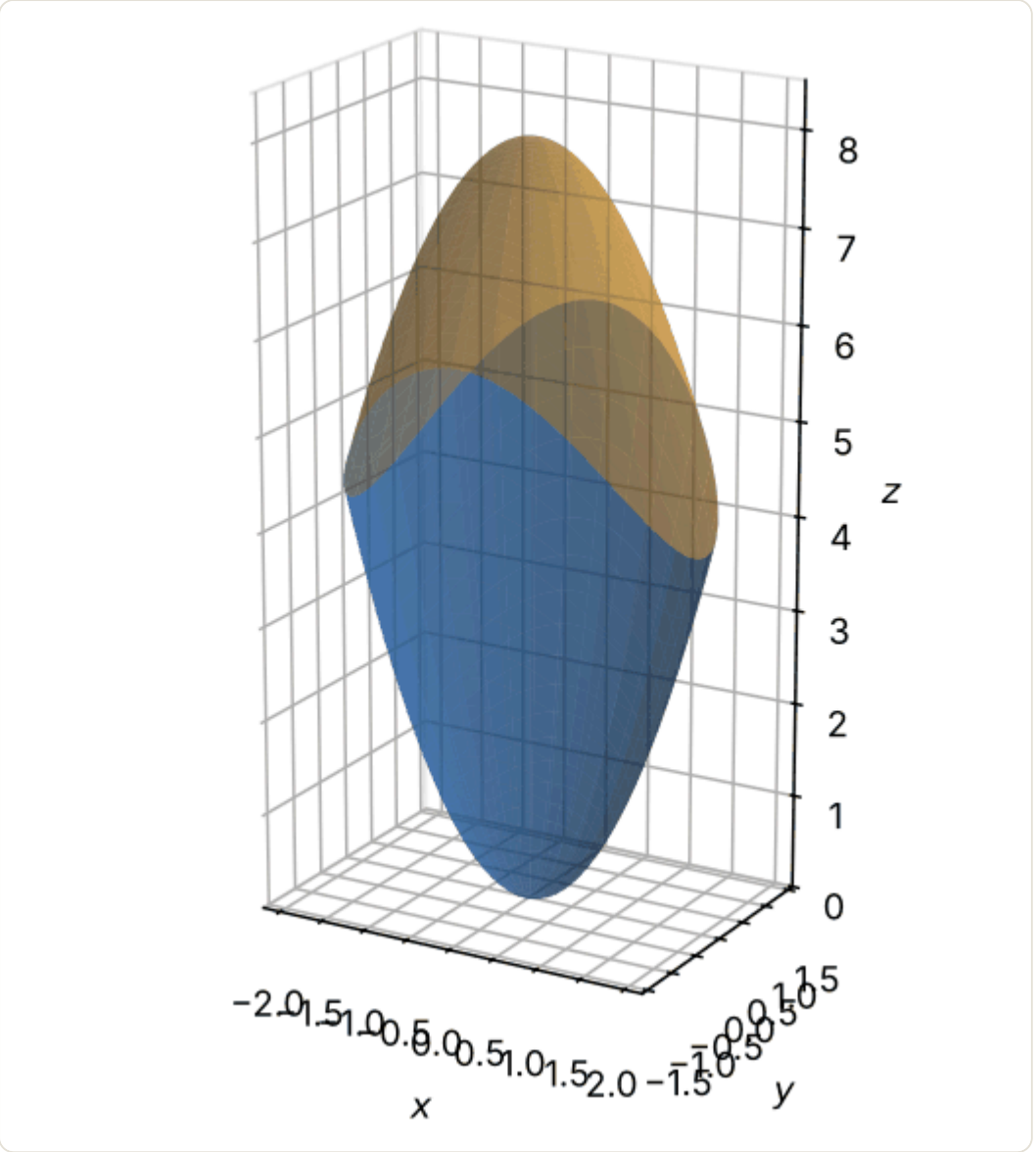
Tetrahedron dibatasi bidang koordinat dan $x + y + z = 1$.

CONTOH 3 — TETRAHEDRON LAIN

$\iiint_E 2x\,dV$, E di oktan pertama di bawah bidang $2x + 3y + z = 6$. Proyeksi: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2 - \frac{2x}{3}$; $0 \le z \le 6 - 2x - 3y$. Integral dalam: $\int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz = 2x(6 - 2x - 3y)$. Dengan $a = 6 - 2x$: $\int_0^{a/3}(a - 3y)\,dy = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$. Sisa: $\int_0^3 2x\dfrac{(6-2x)^2}{6}dx = \frac{4}{3}\int_0^3 x(3-x)^2 dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{4} = 9$.

CONTOH 4 — ANTARA DUA PARABOLOID

Volume padatan yang dibatasi $z = x^2 + 3y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas). Perpotongan: $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, elips D. $V = \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dA$. Substitusi $x = 2r\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\,r\sin\theta$ (elips menjadi $r \le 1$), Jacobian $2\sqrt{2}\,r$ (15.10): $8 - 2x^2 - 4y^2 = 8 - 8r^2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 8(1 - r^2)\,2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = 16\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = 8\sqrt{2}\,\pi \approx 35{,}54$.



Padatan di antara $z = x^2 + 3y^2$ (biru) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (oranye).

CONTOH 5 — MENGUBAH URUTAN

Padatan di bawah $z = 1 - y$ dan di atas bidang xy, $0 \le x \le 2, y \ge 0$. $V = \int_0^2 \int_0^1 (1 - y)\, dy\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Sebagai padatan tipe 3 (proyeksi pada bidang yz): segitiga $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1 - y$, dan x dari 0 sampai 2: $\int_0^1 \int_0^{1-y} 2\, dz\, dy = 1$.

3. Penerapan

RUMUS

Volume $V(E) = \iiint_E 1\,dV$. Nilai rata-rata $f_{\text{rata}} = \frac{1}{V(E)}\iiint_E f\,dV$. Bila padatan mempunyai kerapatan $\rho(x,y,z)$:

$$m = \iiint_E \rho\,dV, \quad M_{yz} = \iiint x\rho\,dV,\ M_{xz} = \iiint y\rho\,dV,\ M_{xy} = \iiint z\rho\,dV,$$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right), \qquad I_x = \iiint (y^2+z^2)\rho\,dV,\ I_y = \iiint (x^2+z^2)$$

CONTOH 6 — MASSA DENGAN KERAPATAN VARIABEL

Kubus $[0,1]^3$ dengan $\rho = x+y+z$: $m = 3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy\,dz = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (karena $\iiint x = \frac{1}{2}$, sama untuk y, z). $M_{yz} = \iiint x(x+y+z)\,dV = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$. $\bar{x} = \dfrac{5/6}{3/2} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$; sama untuk $\bar{y}, \bar{z}$. Pusat massa bergeser ke arah sudut $(1,1,1)$, di mana kerapatan terbesar.

CONTOH 7 — NILAI RATA-RATA

Rata-rata $f = z$ pada tetrahedron Contoh 2: $\dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. Rata-rata $f = x$ pada kubus satuan: $\frac{1}{2}$.

CONTOH 8 — PELUANG TIGA PEUBAH

Kerapatan gabungan $f(x,y,z) = 6e^{-x-2y-3z}$, $x,y,z \ge 0$: $\int_0^\infty e^{-x}dx\int_0^\infty 2e^{-2y}dy\int_0^\infty 3e^{-3z}dz = 1$. $P(X\le 1, Y\le 1, Z\le 1) = (1-e^{-1})(1-e^{-2})(1-e^{-3}) \approx 0{,}632\cdot 0{,}865\cdot 0{,}950 \approx 0{,}519$.

4. Kesalahan umum

- Memakai batas z yang salah karena tidak menggambar padatan.
- Batas integral luar tidak konstan.
- Lupa membuat $\iiint 1\,dV$ jika yang diminta volume.
- Menyamakan $\bar{x}$ dengan M_{xz}/m: $\bar{x}$ memakai momen terhadap bidang yz, M_{yz}.

5. Ringkasan

- Integral rangkap tiga $=$ integral berulang dalam tiga integral satu peubah.
- Padatan tipe 1: $(x, y) \in D, u_1 \leq z \leq u_2$.
- Volume, massa, pusat massa, momen inersia, dan peluang adalah penerapan utama.

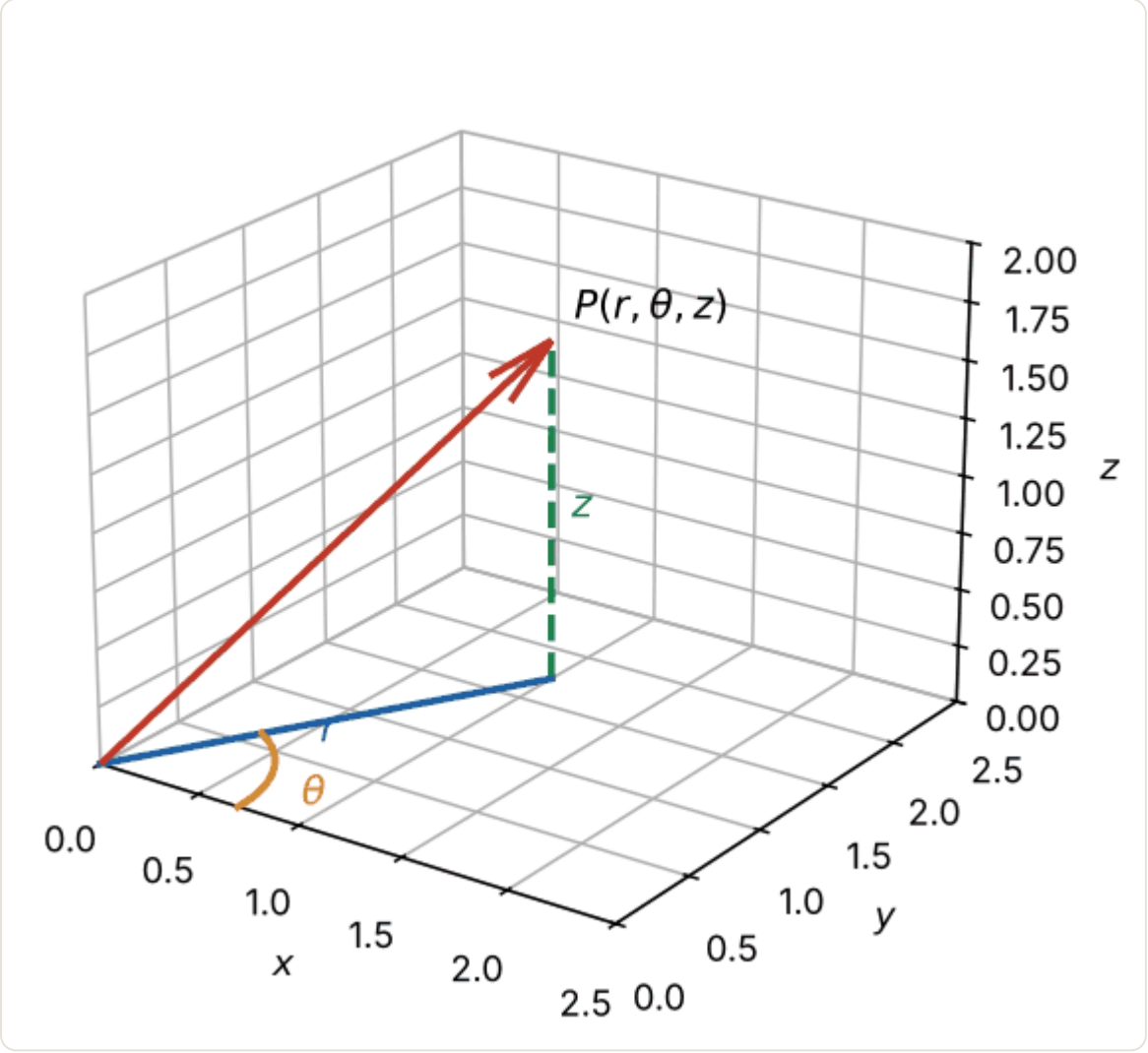
Berikutnya 15.8: koordinat tabung.

15.8 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Tabung

Seperti koordinat kutub memudahkan integral ganda atas cakram, **koordinat tabung** (silinder) memudahkan integral rangkap tiga atas padatan yang mempunyai sumbu simetri.

1. Koordinat tabung

Titik P di ruang dinyatakan oleh (r, θ, z): (r, θ) adalah koordinat kutub proyeksi P pada bidang xy, dan z adalah ketinggian.



Koordinat tabung (r, θ, z).

KONVERSI

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Permukaan sederhana: $r = c$ silinder, $\theta = c$ setengah bidang vertikal, $z = c$ bidang mendatar, $z = r$ kerucut, $z = r^2$ paraboloid.

CONTOH 1 — MENGUBAH KOORDINAT

- Titik tabung $(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$: $x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$, $y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$, $z = 1$: $(-1, \sqrt{3}, 1)$.
- Titik Kartesius $(3, -3, -7)$: $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\tan\theta = -1$ dan titik di kuadran IV, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (atau $\frac{7\pi}{4}$), $z = -7$.
- Persamaan $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ menjadi $r^2 + z^2 = 4$.

2. Integral rangkap tiga dalam koordinat tabung

Bila $E = \{(r,\theta,z) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ u_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \le z \le u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)\}$, maka

$$\iiint_E f\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1}^{u_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Elemen volume: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ (elemen luas kutub $r\,dr\,d\theta$ dikalikan dz).

CONTOH 2 — VOLUME DI ANTARA PARABOLOID DAN BIDANG

Padatan di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 4$: $r^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \int_{r^2}^4 r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 (4 - r^2) r\,dr = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 3 — ANTARA DUA PARABOLOID PUTAR

Padatan antara $z = r^2$ dan $z = 8 - r^2$: perpotongan $r^2 = 8 - r^2 \Rightarrow r = 2$. $V = 2\pi\int_0^2 (8 - 2r^2) r\,dr = 2\pi(16 - 8) = 16\pi \approx 50{,}27$.

CONTOH 4 — INTEGRAN DENGAN $\sqrt{X^2+Y^2}$

$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, E di dalam silinder $x^2+y^2=9$, antara $z=-2$ dan $z=5$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^5 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 9\cdot 7 = 126\pi \approx 395{,}8$.

CONTOH 5 — MOMEN INERSIA SILINDER

Silinder padat jari-jari a, tinggi h, kerapatan konstan ρ, sumbu = sumbu z. $I_z = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \rho\cdot 2\pi\cdot h\cdot \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2 h)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$.

CONTOH 6 — DI DALAM BOLA DAN DI ATAS KERUCUT

Padatan E di dalam bola $x^2+y^2+z^2\le 4$ dan di atas kerucut $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$. Dalam tabung: $r\le z\le\sqrt{4-r^2}$, dan $r\le\sqrt{4-r^2}\Rightarrow r\le\sqrt{2}$. $V = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)r\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\approx 4{,}907$.
(Bentuk "kerucut es krim"; ulangi dengan koordinat bola di 15.9.)

CONTOH 7 — PUSAT MASSA KERUCUT

Kerucut padat $r\le z\le h$, kerapatan konstan. Volume: $\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_r^h r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^h(h-r)r\,dr = 2\pi\frac{h^3}{6} = \frac{\pi h^3}{3}$. $\iiint z\,dV = 2\pi\int_0^h\int_r^h zr\,dz\,dr = 2\pi\int_0^h\frac{h^2-r^2}{2}r\,dr = 2\pi\cdot\frac{h^4}{8} = \frac{\pi h^4}{4}$. $\bar{z} = \dfrac{\pi h^4/4}{\pi h^3/3} = \dfrac{3h}{4}$, diukur dari titik puncak (yaitu $\frac{h}{4}$ dari alas).

3. Kapan memakai koordinat tabung?

- Padatan: silinder, paraboloid putar, kerucut berporos sumbu z, padatan yang proyeksinya pada bidang xy adalah cakram atau cincin.
- Integran memuat x^2+y^2.
- Bila sumbu simetri adalah sumbu lain, tukar peran peubah (mis. $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ dan x sebagai tinggi).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor r.

- Salah menentukan batas r dari proyeksi: batas r harus dari proyeksi padatan pada bidang xy, bukan dari satu permukaan saja.
- Lupa mengubah $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$, atau $x^2 + y^2 + z^2$ menjadi $r^2 + z^2$.

5. Ringkasan

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.
- Cocok untuk padatan yang berporos pada satu sumbu.
- Penerapan: volume, massa, pusat massa, momen inersia.

Berikutnya 15.9 Koordinat Bola.

15.9 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Bola

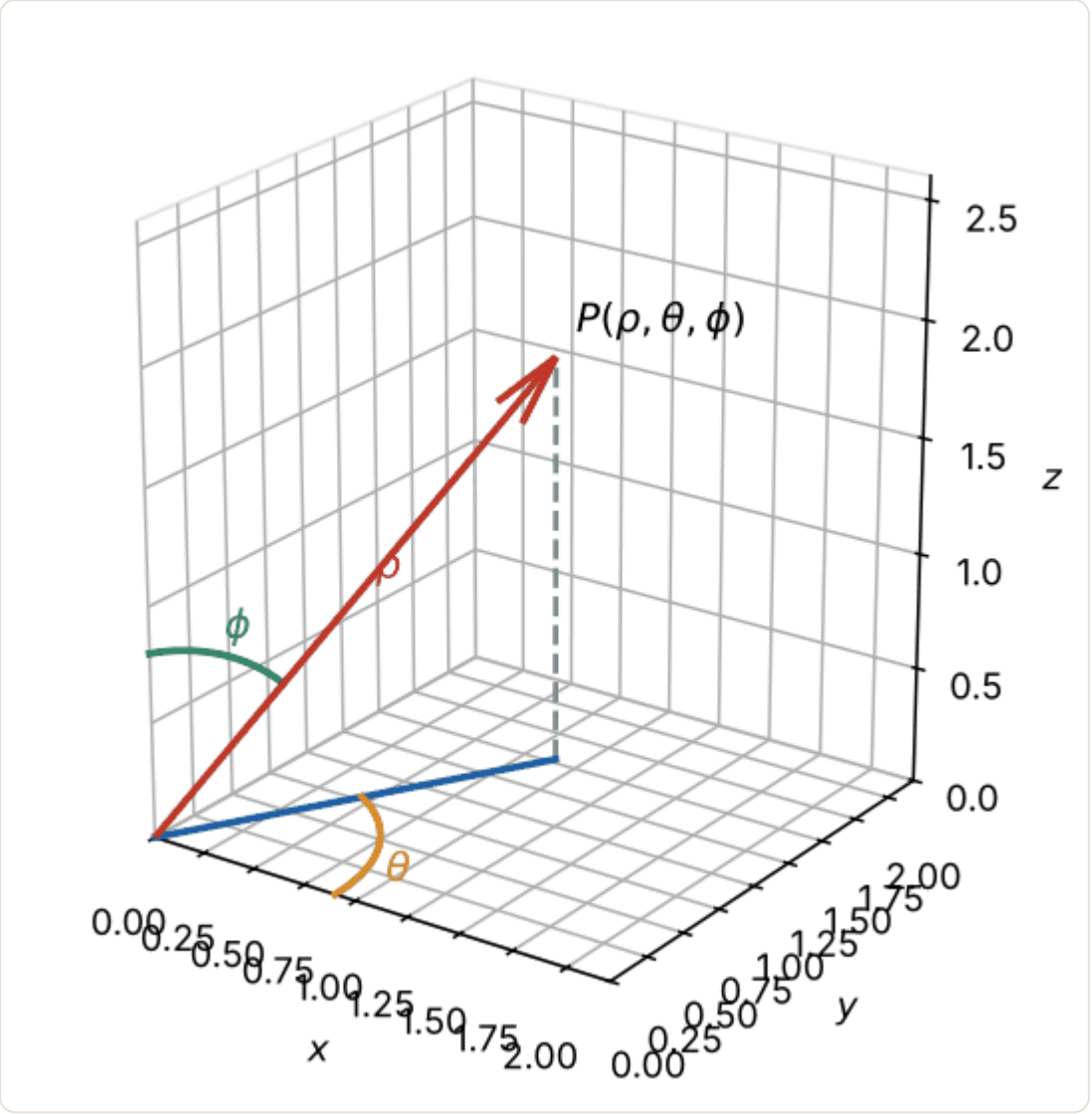
Untuk padatan yang simetris terhadap sebuah titik (bola, kerucut berpusat di titik asal, bagian bola), **koordinat bola** adalah pilihan terbaik.

1. Koordinat bola

DEFINISI

Titik P dinyatakan oleh (ρ, θ, ϕ):

- $\rho = |OP| \geq 0$: jarak dari titik asal,
- θ: sudut azimut, sama seperti pada koordinat tabung (diukur dari sumbu x positif di bidang xy),
- $\phi \in [0, \pi]$: sudut antara sumbu z positif dan ruas garis OP.



Koordinat bola (ρ, θ, ϕ).

KONVERSI

Dari segitiga siku-siku OPQ dengan Q proyeksi P di bidang xy: $|OQ| = r = \rho \sin\phi$ dan $z = \rho\cos\phi$. Maka

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Permukaan: $\rho = c$ bola berpusat di asal; $\theta = c$ setengah bidang vertikal; $\phi = c$ kerucut (setengah kerucut) dengan puncak di asal; $\phi = \frac{\pi}{2}$ bidang xy.

CONTOH 1 — KONVERSI TITIK

- $(\rho, \theta, \phi) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.
- Titik $(0, 2, -2)$: $\rho = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$, $\cos\phi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

CONTOH 2 — PERSAMAAN PERMUKAAN

- $z = \sqrt{x^2+y^2}$: $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ (kerucut).
- $x^2+y^2+z^2 = 2z$: $\rho^2 = 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho = 2\cos\phi$, bola $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.
- $x^2+y^2 = 1$: $\rho\sin\phi = 1$, silinder (kurang cocok di koordinat bola).

2. Elemen volume

Potongan kecil padatan dibatasi ρ sampai $\rho+\Delta\rho$, ϕ sampai $\phi+\Delta\phi$, θ sampai $\theta+\Delta\theta$. Ia hampir berupa balok dengan rusuk: $\Delta\rho$ (arah radial), $\rho\Delta\phi$ (busur lingkaran besar), dan $\rho\sin\phi\,\Delta\theta$ (busur sejajar bidang xy, jari-jari $\rho\sin\phi$). Volume $\approx \rho^2\sin\phi\,\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$.

INTEGRAL RANGKAP TIGA DALAM KOORDINAT BOLA

$$\iiint_E f\,dV = \int_\alpha^\beta \int_c^d \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

untuk $E = \{a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ c \le \phi \le d\}$ ("baji bola"). $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.

3. Contoh

CONTOH 3 — VOLUME BOLA

$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

CONTOH 4 — EKSPONENSIAL

$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, B bola satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}(e-1) = \frac{4\pi}{3}(e-1) \approx 7{,}198$.

CONTOH 5 — KERUCUT ES KRIM

Padatan di dalam bola $\rho \le 2$ dan di atas kerucut $\phi = \frac{\pi}{4}$ (yaitu $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}) \approx 4{,}907$. Sama dengan hasil 15.8 Contoh 6, tetapi jauh lebih singkat. Rumus umum untuk bola jari-jari a dengan sudut setengah puncak ϕ_0: $V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$.

CONTOH 6 — ANTARA DUA BOLA

Padatan $1 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$: $V = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{8-1}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}33$.

CONTOH 7 — BELAHAN BOLA

$\iiint_H z \, dV$, H belahan bola atas jari-jari a: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}$. Volume $H = \frac{2}{3}\pi a^3$. Maka $\bar{z} = \dfrac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3} = \dfrac{3a}{8}$: pusat massa belahan bola homogen berada di $\frac{3}{8}a$ di atas pusatnya.

CONTOH 8 — MOMEN INERSIA BOLA

Bola padat homogen (kerapatan ρ_0, massa $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$): $I_z = \rho_0 \iiint (x^2 + y^2)\, dV = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi\rho_0 a^5}{15} = \frac{2}{5}ma^2$. (Gunakan $\int_0^{\pi}\sin^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}$.)

CONTOH 9 — JARAK RATA-RATA DARI PUSAT

Jarak rata-rata titik di dalam bola jari-jari a dari pusatnya: $\dfrac{\iiint \rho \, dV}{V} = \dfrac{4\pi \cdot a^4/4}{4\pi a^3/3} = \frac{3}{4}a$ (lebih besar dari $\frac{a}{2}$ karena volume lebih banyak di dekat permukaan).

CONTOH 10 — BOLA YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

Bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ berpersamaan $\rho \le 2\cos\phi, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Volume $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos\phi)^3}{3} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4\pi}{3}$. Benar untuk bola jari-jari 1.

4. Memilih koordinat

Bentuk padatan / integran	Koordinat
Persegi panjang, tetrahedron, bidang	Kartesius
Silinder, paraboloid putar, memuat $x^2 + y^2$	Tabung
Bola, kerucut berpuncak di asal, memuat $x^2 + y^2 + z^2$	Bola

5. Kesalahan umum

- Memakai ϕ untuk sudut di bidang xy dan θ untuk sudut dari sumbu z (tertukar dengan konvensi di sini).
- Lupa faktor $\rho^2 \sin\phi$ (bukan hanya ρ^2).
- ϕ berada pada $[0, \pi]$, bukan $[0, 2\pi]$.
- Lupa mengubah $z = \rho\cos\phi$ pada integran.

6. Ringkasan

- $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$.
- $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.
- Cocok untuk bola dan kerucut berpusat di titik asal.

Berikutnya 15.10: perubahan peubah secara umum.

15.10 Perubahan Peubah dalam Integral Ganda

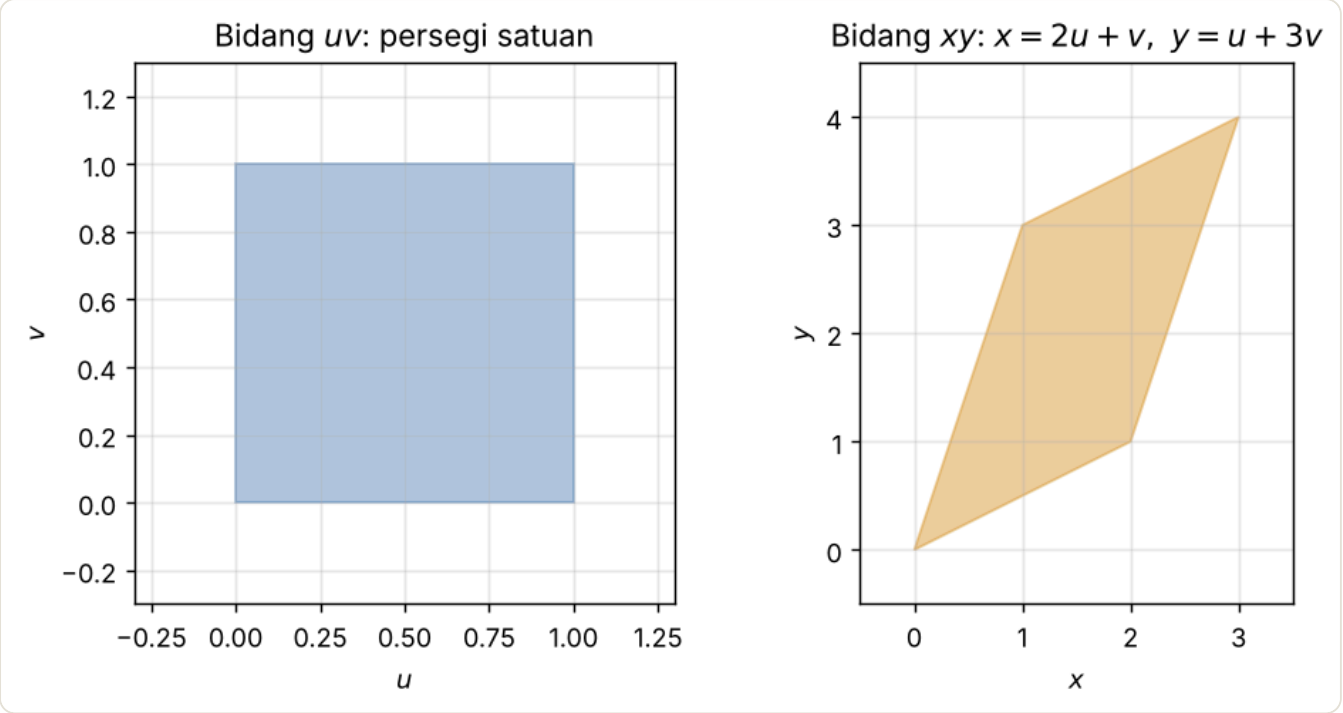
Pada integral satu peubah, substitusi $x = g(u)$ mengubah $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(g(u))\,g'(u)\,du$. Koordinat kutub, tabung, dan bola adalah substitusi khusus untuk integral ganda. Subbab ini memberi aturan umumnya, dengan **Jacobian** menggantikan $g'(u)$.

1. Transformasi

Transformasi T dari bidang uv ke bidang xy: $T(u,v) = (x,y)$ dengan $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$, dengan g, h mempunyai turunan parsial kontinu. Bila T satu-satu, T memetakan daerah S di bidang uv ke daerah R di bidang xy ($R = T(S)$), dan kita dapat berpindah bolak-balik.

CONTOH 1 — TRANSFORMASI LINEAR

$T:\ x = 2u + v,\ y = u + 3v$. Persegi satuan $S = [0,1]^2$ dipetakan menjadi jajargenjang dengan titik sudut $T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (2,1)$, $T(1,1) = (3,4)$, $T(0,1) = (1,3)$. Luas jajargenjang $= |\langle 2,1\rangle \times \langle 1,3\rangle| = |6 - 1| = 5$: luas S (yaitu 1) dikalikan 5.



Persegi satuan (kiri) dipetakan ke jajargenjang berluas 5 (kanan).

2. Jacobian

DETERMINAN JACOBI

Jacobian T:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Gagasan. Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ dipetakan hampir menjadi jajargenjang yang dibentangkan oleh $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$ (dengan $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$). Luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$. Jadi Jacobian adalah *faktor penskalaan luas* lokal.

CONTOH 2 — JACOBIAN BEBERAPA TRANSFORMASI

- Linear di Contoh 1: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$.
- Kutub $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.
  (Inilah asal faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.)
- $x = au, y = bv$: Jacobian ab.
- $x = u^2 - v^2, y = 2uv$: $\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2$.

3. Rumus perubahan peubah

PERUBAHAN PEUBAH (DUA PEUBAH)

Misalkan T transformasi C^1 satu-satu dengan Jacobian tak nol, memetakan S pada R. Untuk f kontinu,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Perhatikan tanda nilai mutlak.

STRATEGI

1. Pilih u, v sehingga daerah R menjadi sederhana (mis. persegi panjang) dan/atau integran menjadi sederhana.
2. Selesaikan x, y dalam u, v dan hitung $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (atau hitung $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ dan balik: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$).
3. Tentukan batas baru di bidang uv, lalu hitung.

CONTOH 3 — JAJARGENJANG

$\iint_R xy\,dA$ dengan $R = T(S)$, $S = [0,1]^2$, T pada Contoh 1. $xy = (2u+v)(u+3v) = 2u^2 + 7uv + 3v^2$. $\iint_R xy\,dA = 5\int_0^1\int_0^1 (2u^2+7uv+3v^2)\,du\,dv = 5\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{4} + 1\right) = 5 \cdot \frac{41}{12} = \frac{205}{12} \approx 17{,}08$.

CONTOH 4 — ELIPS

Daerah R : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$. Substitusi $x = au$, $y = bv$, $J = ab$; S: cakram $u^2 + v^2 \le 1$. Luas $= \iint_S ab\,du\,dv = \pi ab$. Juga $\iint_R x^2\,dA = a^3 b \iint_S u^2\,du\,dv = a^3 b \cdot \frac{\pi}{4}$. Untuk $a = 2, b = 1$: $\iint x^2\,dA = 2\pi$.

CONTOH 5 — DAERAH DI ANTARA HIPERBOLA DAN GARIS

Cari luas daerah R di kuadran pertama yang dibatasi $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$. Pilih $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$: R menjadi persegi $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 4$. Hitung $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = 2v$. Maka $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$. Luas $= \int_1^4\int_1^4 \dfrac{1}{2v}\,dv\,du = 3 \cdot \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{3}{2}\ln 4 = 3\ln 2 \approx 2{,}079$.

CONTOH 6 — INTEGRAN YANG RUMIT

$\iint_R \exp\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dA$, R segitiga $(0,0), (1,0), (0,1)$. Misalkan $u = x + y$, $v = x - y$; maka $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$, nilai mutlak $\frac{1}{2}$. Daerah: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$ menjadi $0 \le u \le 1$, $-u \le v \le u$. $\iint = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e - e^{-1}\right)du = \dfrac{e - e^{-1}}{4} \approx 0{,}588$.

CONTOH 7 — MEMERIKSA KUTUB

$\iint_D x\,dA$ pada cakram $(x-1)^2+y^2\le 1$: geser $x=1+u, y=v$ ($J=1$): $\iint_{u^2+v^2\le 1}(1+u)\,du\,dv = \pi + 0 = \pi$, sama dengan 15.4 Contoh 5.

4. Tiga peubah

JACOBIAN TIGA PEUBAH

Untuk $T(u,v,w)=(x,y,z)$:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}, \qquad \iiint_R f\,dV = \iiint_S f\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

CONTOH 8 — KOORDINAT TABUNG DAN BOLA

- Tabung: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$: determinan $= r$ (sama dengan kutub).
- Bola: $x=\rho\sin\phi\cos\theta, y=\rho\sin\phi\sin\theta, z=\rho\cos\phi$: determinan terhadap (ρ,ϕ,θ) bernilai mutlak $\rho^2\sin\phi$, sehingga $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (15.9).

CONTOH 9 — TRANSFORMASI LINEAR TIGA DIMENSI

$x=u+v, y=v+w, z=w+u$: $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix} = 1(1-0)-1(0-1)+0 = 2$. Kubus satuan di uvw dipetakan ke jajaran genjang tiga dimensi (parallelepiped) bervolume 2.

CONTOH 10 — VOLUME ELIPSOID

Elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$: $x=au, y=bv, z=cw$, $J=abc$, S bola satuan: $V = abc\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc$.

5. Kesalahan umum

- Lupa nilai mutlak pada Jacobian (luas tak boleh negatif).
- Memakai $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ padahal yang dibutuhkan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (saling berkebalikan).

- Tidak mengubah batas daerah ke koordinat baru.
- Transformasi yang tidak satu-satu (mis. $u = x^2$ pada daerah yang memuat x positif dan negatif).

6. Ringkasan

- $dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$; $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$.
- Kutub: $J = r$; tabung: $J = r$; bola: $J = \rho^2 \sin\phi$.
- Pilih transformasi yang menyederhanakan daerah atau integran.

Bab 15 berakhir di sini. Bab berikutnya, 16.1, membahas medan vektor dan integral garis.