Bab 14: Turunan Parsial

Bab 14 · Turunan Parsial

14.1 Fungsi Beberapa Peubah

Sebagian besar besaran di dunia nyata bergantung pada lebih dari satu peubah: suhu di suatu titik bergantung pada posisi (x, y, z) dan waktu t; volume silinder bergantung pada r dan h; hasil produksi bergantung pada tenaga kerja dan modal. Bab 14 mengembangkan kalkulus diferensial untuk fungsi seperti itu.

1. Definisi

FUNGSI DUA PEUBAH

Fungsi dua peubah f adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut (x, y) dalam himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (*daerah asal*) dengan tepat satu bilangan real $f(x, y)$. *Daerah hasil* (range) adalah himpunan semua nilai $f(x, y)$. Fungsi tiga peubah $f(x, y, z)$ didefinisikan serupa dengan $D \subseteq \mathbb{R}^3$; fungsi n peubah $f(x_1, \ldots, x_n)$ memakai $\mathbb{R}^n$.

Bila daerah asal tidak disebutkan, kita ambil himpunan terbesar titik yang membuat rumusnya bermakna.

CONTOH 1 — MENCARI DAERAH ASAL

1. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$: syarat $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, jadi $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, cakram tertutup berjari-jari 3. Daerah hasil $[0, 3]$.
2. $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$: syarat $x + y > 1$, setengah bidang di atas garis $y = 1 - x$ (tanpa garisnya). Daerah hasil $\mathbb{R}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$: syarat $x \neq \pm y$, seluruh bidang tanpa dua garis $y = x$, $y = -x$.
4. $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} \;/\; \ln(4 - z)$: syarat $z \geq x^2 + y^2$, $z < 4$, $z \neq 3$. Daerah di dalam paraboloid, di bawah bidang $z = 4$, tanpa bidang $z = 3$.

CONTOH 2 — MODEL NYATA

- Bunga majemuk bulanan: $A(P, r, t) = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$. $A(1000;\ 0{,}06;\ 5) = 1000(1{,}005)^{60} \approx 1348{,}85$.
- Produksi Cobb–Douglas: $P(L, K) = 2L^{0{,}6}K^{0{,}4}$. $P(100, 100) = 200$; bila tenaga kerja digandakan dan modal dipangkas setengah, $P(200, 50) = 2 \cdot 200^{0{,}6}50^{0{,}4} \approx 229{,}7$, naik sekitar 14,9%.
- Volume silinder: $V(r, h) = \pi r^2 h$.

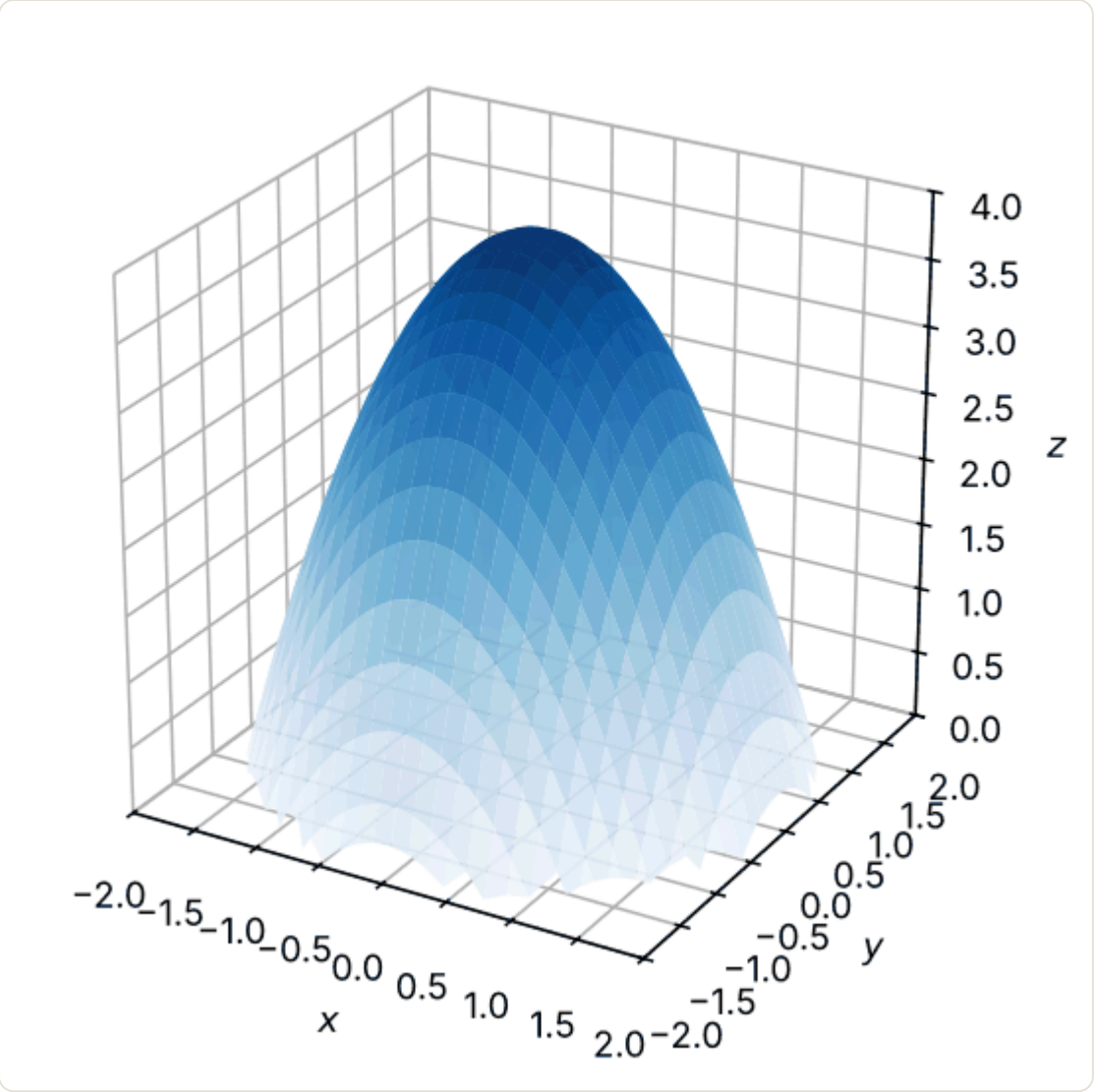
2. Grafik

GRAFIK

Grafik f dengan daerah asal D adalah himpunan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$. Ini sebuah permukaan di ruang: tinggi permukaan di atas titik (x, y) adalah $f(x, y)$.

CONTOH 3 — GRAFIK $F = 4 - X^2 - Y^2$

Grafiknya $z = 4 - x^2 - y^2$ adalah paraboloid eliptik yang membuka ke bawah (12.6) dengan puncak $(0, 0, 4)$. Ia memotong bidang xy di lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Bila kita batasi $z \geq 0$, diperoleh mangkuk terbalik di atas cakram jari-jari 2.



Grafik $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ untuk $z \geq 0$.

CONTOH 4 — GRAFIK FUNGSI SEDERHANA

- $f(x, y) = 3 - x - y$: bidang miring (12.5) yang memotong sumbu di $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$: kerucut (belahan atas).
- $f(x, y) = \sin x$: silinder bergelombang (peubah y tidak muncul).
- $f(x, y) = xy$: permukaan pelana (paraboloid hiperbolik yang diputar).

3. Kurva ketinggian (kontur)

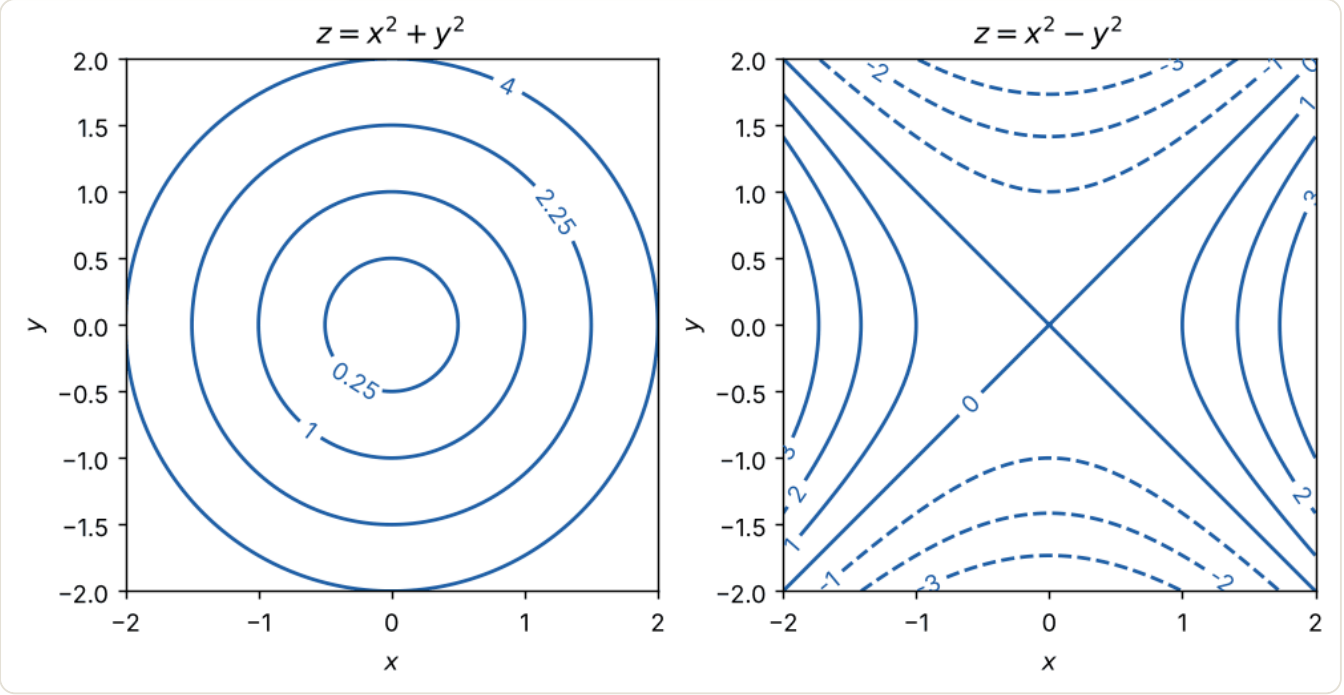
KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian (level curve) f adalah himpunan semua titik (x, y) di daerah asal dengan $f(x, y) = k$, dengan k konstanta. Ia adalah proyeksi ke bidang xy dari irisan grafik dengan bidang $z = k$. **Peta kontur** adalah kumpulan kurva ketinggian untuk beberapa nilai k.

Pada peta topografi, garis kontur menghubungkan titik berketinggian sama; pada peta cuaca, *isoterm* menghubungkan titik bersuhu sama dan *isobar* titik bertekanan sama. Kontur yang rapat berarti permukaan curam; kontur yang renggang berarti landai.

CONTOH 5 — KONTUR DUA FUNGSI

- $f = x^2 + y^2$: kurva ketinggian $x^2 + y^2 = k$ adalah lingkaran konsentris berjari-jari $\sqrt{k}$ ($k > 0$). Jarak jari-jari: untuk $k = 1, 4, 9$ jari-jarinya $1, 2, 3$: kontur makin rapat ke arah luar karena permukaan makin curam.
- $f = x^2 - y^2$: $x^2 - y^2 = k$ hiperbola; untuk $k = 0$ dua garis $y = \pm x$. Pola khas pelana.



Peta kontur $z = x^2 + y^2$ (kiri) dan $z = x^2 - y^2$ (kanan).

CONTOH 6 — FUNGSI DARI KONTUR

Kurva ketinggian $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ dengan $f = k$: $y = kx^2$, keluarga parabola yang melalui titik asal (tanpa titik asalnya). Jadi nilai k menyatakan "kelengkungan" parabola.

4. Fungsi tiga peubah dan permukaan ketinggian

Grafik $f(x,y,z)$ berada di $\mathbb{R}^4$ dan tidak dapat digambar. Kita memvisualisasikannya lewat **permukaan ketinggian** $f(x,y,z) = k$.

CONTOH 7 — PERMUKAAN KETINGGIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $f = k$ bola berjari-jari $\sqrt{k}$, makin besar bola untuk k naik.
- $f = x^2 + y^2 - z^2$: $k > 0$ hiperboloid satu lembar, $k < 0$ hiperboloid dua lembar, $k = 0$ kerucut (12.6).
- $f = x + 2y + 3z$: bidang-bidang sejajar, $x + 2y + 3z = k$.
- $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$: bola-bola konsentris; model potensial gravitasi atau listrik (potensial sama pada bola).

CONTOH 8 — SUHU

Suhu pelat tipis $T(x,y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ (derajat C). Isoterm $T = 20$: $1 + x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$, sebuah elips dengan setengah sumbu 2 (arah x) dan $\sqrt{2}$ (arah y). Suhu maksimum 100 di titik asal.

5. Kesalahan umum

- Mengira kurva ketinggian adalah kurva pada grafik. Kurva ketinggian berada *di bidang* xy; kurva pada grafik adalah *jejak* di tinggi k.
- Lupa membatasi daerah asal (akar, logaritma, penyebut).
- Mengira dua kurva ketinggian berbeda dapat berpotongan: karena f memberi tepat satu nilai di tiap titik, kurva ketinggian untuk k berbeda tidak pernah berpotongan.

6. Ringkasan

- $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; grafik fungsi dua peubah adalah permukaan $z = f(x, y)$.
- Kurva ketinggian $f(x, y) = k$; permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$.
- Peta kontur menunjukkan kecuraman: rapat $=$ curam.

Berikutnya 14.2: limit dan kekontinuan.

14.2 Limit dan Kekontinuan

Limit fungsi dua peubah mirip limit satu peubah, tetapi ada perbedaan penting: titik (x, y) dapat mendekati (a, b) dari *tak hingga banyak arah dan lintasan*, bukan hanya dari kiri dan kanan.

1. Definisi limit

DEFINISI

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain, $f(x,y)$ dibuat sedekat mungkin ke L dengan mengambil (x,y) cukup dekat (tetapi tidak sama dengan) (a,b), dalam cakram berjari-jari δ.

Sifat limit (jumlah, selisih, hasil kali, hasil bagi dengan penyebut tak nol, kombinasi dengan fungsi kontinu) berlaku seperti pada satu peubah. Untuk polinomial dan fungsi rasional (di titik daerah asalnya), limit sama dengan substitusi.

CONTOH 1 — SUBSTITUSI LANGSUNG

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 y + 3y}{x + y^2} = \frac{2 + 6}{1 + 4} = \frac{8}{5}.$$

2. Uji dua lintasan (untuk menunjukkan limit tidak ada)

AKIBAT LANGSUNG DARI DEFINISI

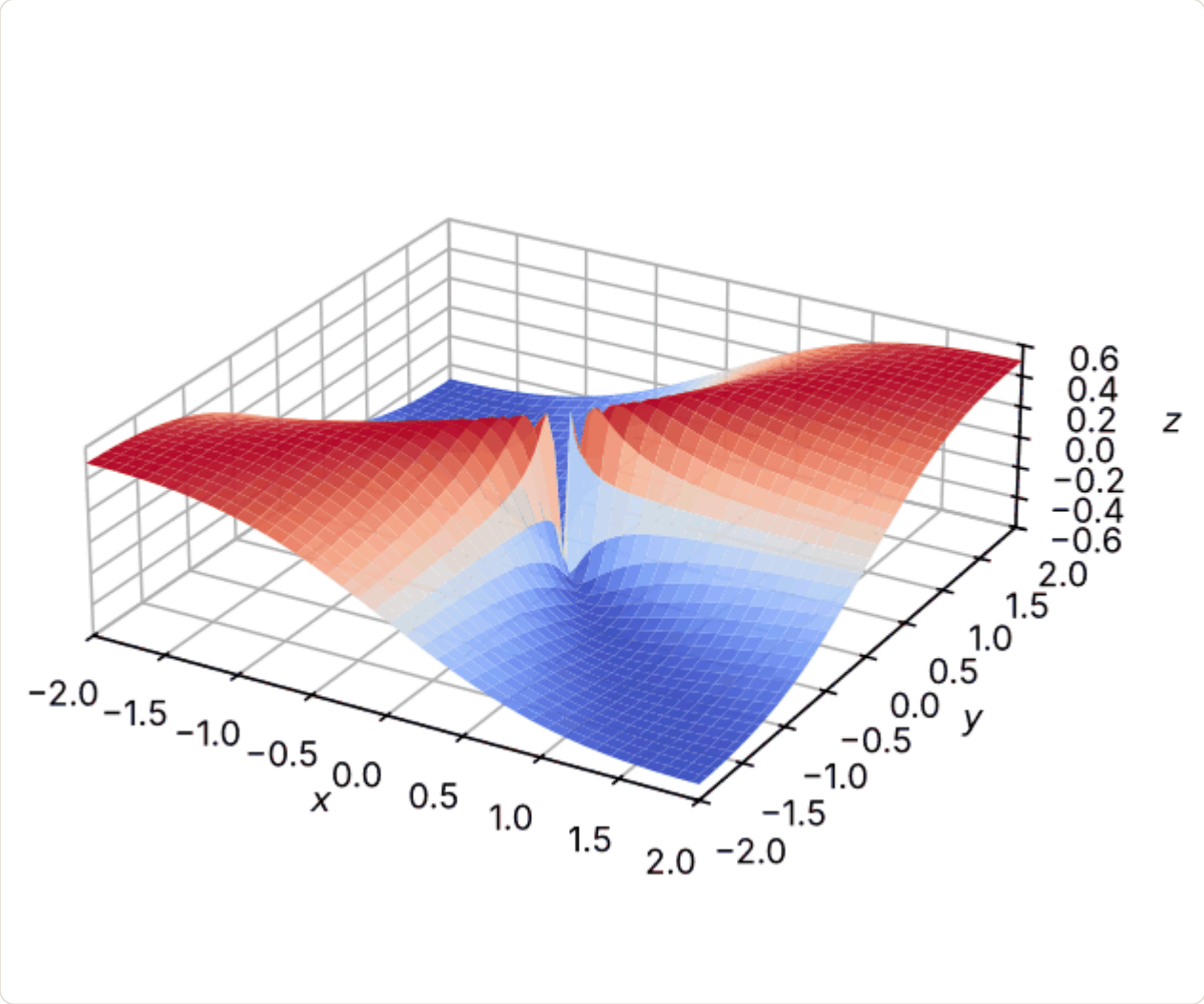
Jika $f(x,y) \to L_1$ sepanjang lintasan C_1 menuju (a,b) dan $f(x,y) \to L_2$ sepanjang lintasan C_2 dengan $L_1 \neq L_2$, maka $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ **tidak ada**.

CONTOH 2 — $\dfrac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2}$

Di $(0, 0)$: sepanjang sumbu x ($y = 0$): $f = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1$. Sepanjang sumbu y ($x = 0$): $f = -1 \to -1$. Limit tidak ada.

CONTOH 3 — $\dfrac{XY}{X^2 + Y^2}$

Sepanjang $y = mx$: $f = \dfrac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \dfrac{m}{1 + m^2}$, bergantung pada m: 0 untuk $m = 0$, $\frac{1}{2}$ untuk $m = 1$. Limit di $(0, 0)$ tidak ada. Pada grafik (gambar), permukaan "terpelintir" di sekitar asal sehingga tidak punya satu tinggi tunggal di sana.



Grafik $xy/(x^2 + y^2)$: nilai berubah menurut arah mendekati asal.

CONTOH 4 — LINTASAN LENGKUNG

$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. Sepanjang setiap garis $y = mx$: $f = \dfrac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \dfrac{m^2x}{1+m^4x^2} \to 0$; sepanjang sumbu juga 0. Tetapi sepanjang parabola $x = y^2$: $f = \dfrac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$. Limit tidak ada.

Pelajaran: memeriksa semua garis lurus belum cukup untuk membuktikan limit ada.

CONTOH 5 — SATU LINTASAN CUKUP MENOLAK

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ di asal. Sepanjang $y = mx$: $\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \frac{mx}{x^2+m^2} \to 0$. Sepanjang $y = x^2$: $\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. Tidak ada limit.

3. Menunjukkan limit ada

Teorema apit

Bila $|f(x,y) - L| \le g(x,y)$ dan $g \to 0$, maka $f \to L$.

CONTOH 6 — MEMAKAI PENGAPIT

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$. Karena $x^2 \le x^2+y^2$, $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \le 3|y| \to 0$. Limitnya 0.

Koordinat kutub (untuk limit di titik asal)

Dengan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(x,y) \to (0,0)$ setara dengan $r \to 0^+$. Jika f dapat ditulis $r\cdot$ (fungsi terbatas dalam θ), limitnya 0.

CONTOH 7 — KUTUB

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to0} \dfrac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2} = \lim\limits_{r\to0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) = 0$, karena faktor trigonometri terbatas $\left|\cdot\right| \le 2$.

CONTOH 8 — LIMIT TERKENAL

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$: dengan $u = x^2+y^2 \to 0^+$, $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Limit $= 1$. Begitu pula $\lim \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$.

CONTOH 9 — KUTUB GAGAL BILA TAK TERBATAS

$\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta$: bergantung pada θ dan tidak menuju satu nilai tunggal; limit tidak ada (0 sepanjang sumbu y, 1 sepanjang sumbu x).

4. Kekontinuan

DEFINISI

f kontinu di (a,b) bila $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. f kontinu pada D bila kontinu di setiap titik D.

Polinomial kontinu di $\mathbb{R}^2$; fungsi rasional kontinu di semua titik di mana penyebut tak nol; komposisi fungsi kontinu kontinu.

CONTOH 10 — FUNGSI BAGIAN DEMI BAGIAN

$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ kontinu di mana-mana: untuk titik selain asal, ia fungsi rasional dengan penyebut tak nol; di asal limitnya 0 (Contoh 6) sama dengan $f(0,0)$. Sebaliknya, $g = \frac{xy}{x^2+y^2}$ dengan $g(0,0) = 0$ *tidak* kontinu di asal (Contoh 3).

CONTOH 11 — DI MANA KONTINU?

$f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$ kontinu pada $x^2+y^2 > 1$ (di luar lingkaran satuan). $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x^2-y}$ kontinu di mana pun kecuali parabola $y = x^2$.

Tiga peubah

Definisi sama: bola kecil di $\mathbb{R}^3$ menggantikan cakram. Misalnya $\lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} \dfrac{xz+e^{y}}{x+z} = \dfrac{2+1}{3} = 1.$

5. Kesalahan umum

- Memeriksa hanya sumbu atau garis lalu menyimpulkan limit ada (Contoh 4 dan 5 membantahnya).
- Memakai kutub untuk limit di titik selain asal tanpa menggeser dulu.
- Mengira jika f kontinu terhadap tiap peubah secara terpisah maka kontinu secara gabungan. Itu tidak benar (Contoh 3 memberi kasus kontinu per peubah di semua titik tapi tidak kontinu di asal: $g(x,0)=0$ dan $g(0,y)=0$).

6. Ringkasan

- Limit ada hanya bila semua lintasan menuju nilai yang sama.
- Menolak: dua lintasan dengan nilai berbeda. Menerima: pengapit atau kutub.
- Kontinu: limit $=$ nilai fungsi; polinomial dan fungsi rasional kontinu di daerah asalnya.

Berikutnya 14.3 Turunan Parsial.

14.3 Turunan Parsial

Pada fungsi satu peubah, turunan mengukur laju perubahan. Pada fungsi dua peubah, laju perubahan bergantung pada arah. Langkah pertama yang paling sederhana: menggerakkan satu peubah saja dan menahan yang lain tetap.

1. Definisi dan notasi

TURUNAN PARSIAL

Untuk $f(x, y)$:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}, \qquad f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$

bila limitnya ada. Notasi lain: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = D_x f$.

Cara menghitung. Untuk f_x: anggap y konstanta dan turunkan terhadap x dengan aturan biasa. Untuk f_y: anggap x konstanta.

CONTOH 1 — TURUNAN POLINOMIAL

$f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$: $f_x = 3x^2 + 2xy^3$, $f_y = 3x^2 y^2 - 4y$. Di $(2, 1)$: $f_x = 12 + 4 = 16$, $f_y = 12 - 4 = 8$.

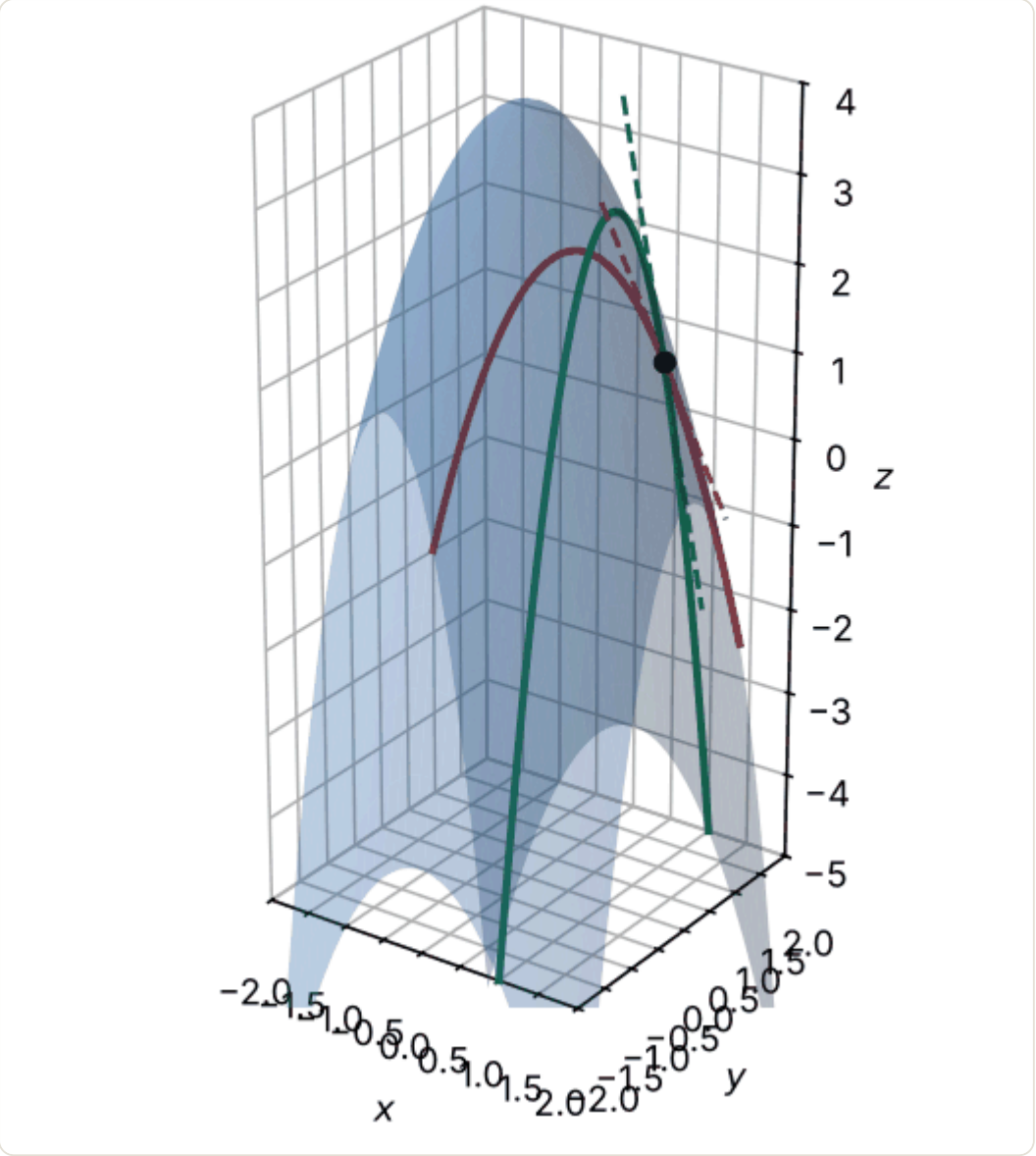
CONTOH 2 — FUNGSI TRANSENDEN

$f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$: $f_x = y e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y)$, $f_y = x e^{xy} \sin(x+y) + e^{xy} \cos(x+y)$. $g(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$: $g_x = \dfrac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

2. Tafsir geometris dan laju perubahan

Grafik $z = f(x, y)$ dipotong bidang $y = b$ menghasilkan kurva $z = f(x, b)$. $f_x(a, b)$ adalah **kemiringan garis singgung** kurva ini di titik $(a, b, f(a, b))$. Serupa, $f_y(a, b)$ adalah kemiringan kurva

$z = f(a, y)$. Sebagai laju perubahan: f_x adalah laju perubahan z terhadap x ketika y tetap.



Permukaan $z = 4 - x^2 - 2y^2$; kurva merah ($y = 1$) dan hijau ($x = 1$) dengan garis singgungnya di $(1, 1, 1)$.

CONTOH 3 — SINGGUNG PADA IRISAN

$f = 4 - x^2 - 2y^2$, di $(1, 1)$: $f = 1$, $f_x = -2x = -2$, $f_y = -4y = -4$. Garis singgung pada irisan $y = 1$: arah $\langle 1, 0, -2 \rangle$; pada irisan $x = 1$: arah $\langle 0, 1, -4 \rangle$. Keduanya menentukan bidang singgung (14.4).

CONTOH 4 — MEMBACA KONTUR

Pada peta suhu, jika $T_x > 0$ di sebuah titik, suhu naik bila kita bergerak ke timur (arah x positif). Bila $T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$ (14.1), di $(1,1)$: $T_x = -\dfrac{200x}{(1+x^2+2y^2)^2} = -12{,}5$, $T_y = -\dfrac{400y}{(\cdot)^2} = -25$. Suhu turun 12,5 derajat per satuan jarak ke arah x dan 25 derajat per satuan ke arah y.

CONTOH 5 — GAS IDEAL

$PV = nRT$. Dengan $P = \dfrac{nRT}{V}$: $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ (tekanan turun bila volume naik pada suhu tetap) dan $\dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$. Hubungan siklik: $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{nR}{P}$ dan $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{nR}$, sehingga

$$\frac{\partial P}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{nRT}{V^2}\cdot\frac{nR}{P}\cdot\frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{PV} = -1.$$

Hasilnya -1, bukan $+1$ seperti yang "tampak" bila ∂ dianggap pecahan biasa.

3. Fungsi tiga peubah atau lebih

Turunkan terhadap satu peubah, anggap semua yang lain konstan.

CONTOH 6 — TIGA PEUBAH

$f(x,y,z) = xy + yz^2 + e^{xz}$: $f_x = y + ze^{xz}$, $f_y = x + z^2$, $f_z = 2yz + xe^{xz}$. Di $(1,2,0)$: $f_x = 2$, $f_y = 1$, $f_z = 1$.

4. Turunan parsial orde tinggi

$(f_x)_x = f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $(f_x)_y = f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, dan seterusnya. Untuk $f = x^3y^2 - 2x\,y + y^4$: $f_x = 3x^2y^2 - 2y$, $f_y = 2x^3y - 2x + 4y^3$; $f_{xx} = 6xy^2$, $f_{xy} = 6x^2y - 2$, $f_{yx} = 6x^2y - 2$, $f_{yy} = 2x^3 + 12y^2$.

TEOREMA CLAIRAUT

Bila f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada cakram yang memuat (a,b), maka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Akibatnya, untuk fungsi yang cukup mulus urutan turunan tidak penting. Ini menghemat pekerjaan: untuk $f = \sin(xy^2) + e^x \ln y$ lebih mudah memilih urutan yang menghasilkan ekspresi sederhana.

CONTOH 7 — MEMILIH URUTAN

$f(x,y,z) = e^{yz}\cos x + z^3 y$. Untuk f_{zyx}: turunkan lebih dulu terhadap x: $f_x = -e^{yz}\sin x$; lalu y: $-ze^{yz}\sin x$; lalu z: $-(1+yz)e^{yz}\sin x$. Mengubah urutan tidak mengubah hasil.

5. Persamaan diferensial parsial

CONTOH 8 — PERSAMAAN LAPLACE

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ dipenuhi $u = e^x \sin y$: $u_{xx} = e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \sin y$, jumlah 0. Juga $u = \ln(x^2+y^2)$: $u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, dan karena simetri $u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; jumlah 0. Fungsi seperti ini disebut *harmonik*; mereka menggambarkan suhu keadaan tunak dan potensial listrik.

CONTOH 9 — PERSAMAAN GELOMBANG

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Untuk $u = \sin(x-ct)$: $u_{tt} = -c^2\sin(x-ct)$, $u_{xx} = -\sin(x-ct)$, sehingga $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Gelombang yang merambat ke kanan dengan laju c.

CONTOH 10 — PERSAMAAN PANAS

$u_t = k u_{xx}$. Untuk $u = e^{-kt}\sin x$: $u_t = -ke^{-kt}\sin x$, $u_{xx} = -e^{-kt}\sin x$, jadi $u_t = k u_{xx}$. Pola sinus meluruh secara eksponensial karena panas menyebar.

6. Turunan implisit

CONTOH 11 — Z SEBAGAI FUNGSI IMPLISIT

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$ mendefinisikan z implisit. Turunkan terhadap x (anggap y tetap): $3x^2 + 3z^2 z_x = 6yz + 6xyz_x \Rightarrow z_x(3z^2 - 6xy) = 6yz - 3x^2$, jadi $z_x = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$. Serupa $z_y = \dfrac{2xz - y^2}{z^2 - 2xy}$. Di titik $(1,2,3)$ (periksa: $1+8+27 = 36 = 6\cdot 6$): $z_x = \dfrac{12-1}{9-4} = \dfrac{11}{5}$.

7. Kesalahan umum

- Lupa menganggap peubah lain konstan, mis. menurunkan y pada f_x.
- Menulis $\partial z/\partial x =$ "dz/dx" begitu saja; notasi ∂ menandakan peubah lain ditahan.
- Mengira Clairaut berlaku tanpa kekontinuan turunan orde dua.
- Kesalahan tanda pada turunan hasil bagi atau rantai.

8. Ringkasan

- f_x menahan y tetap; f_y menahan x tetap. Geometris: kemiringan irisan.
- Turunan orde tinggi; Clairaut: $f_{xy} = f_{yx}$ bila kontinu.
- Beberapa PDP penting: Laplace, gelombang, panas.
- Turunan implisit dengan menurunkan kedua ruas.

Berikutnya 14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear.

14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear

Pada fungsi satu peubah, garis singgung memberi hampiran linear terbaik di dekat sebuah titik. Untuk fungsi dua peubah, objek yang sepadan adalah **bidang singgung**.

1. Bidang singgung

PERSAMAAN BIDANG SINGGUNG

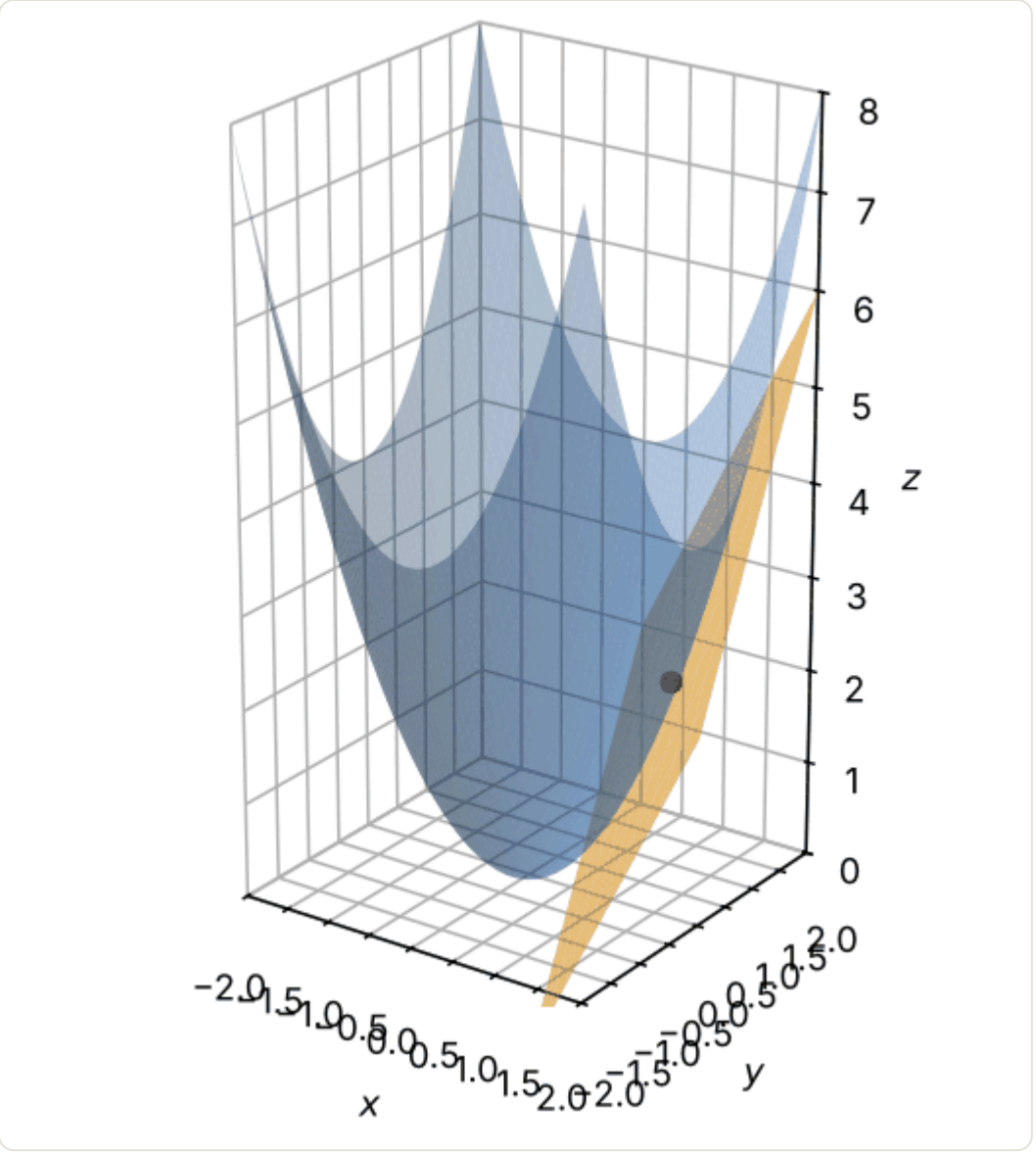
Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu. Bidang singgung pada permukaan $z = f(x, y)$ di titik $P(a, b, c)$, $c = f(a, b)$, adalah

$$z - c = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b).$$

Penurunan. Garis singgung irisan $y = b$ di P berarah $\mathbf{u} = \langle 1, 0, f_x \rangle$; garis singgung irisan $x = a$ berarah $\mathbf{v} = \langle 0, 1, f_y \rangle$. Normal bidang yang memuat keduanya: $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$. Persamaan bidang melalui P: $-f_x(x-a) - f_y(y-b) + (z-c) = 0$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 1 — PARABOLOID

$z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 2$. Bidang singgung: $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, yaitu $z = 2x + 2y - 2$.



Bidang singgung $z = 2x + 2y - 2$ pada paraboloid $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$.

CONTOH 2 — PARABOLOID LAIN

$z = 2x^2 + y^2$ di $(1, 1, 3)$: $f_x = 4x = 4$, $f_y = 2y = 2$. $z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. Vektor normalnya $\langle 4, 2, -1 \rangle$ (atau $\langle -4, -2, 1 \rangle$).

CONTOH 3 — KAPAN BIDANG SINGGUNG MENDATAR?

$z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$: $f_x = 2x - 4$, $f_y = 2y + 6$. Bidang singgung mendatar bila $f_x = f_y = 0$: $(2, -3)$, $z = 4 + 9 - 8 - 18 = -13$. Titik $(2, -3, -13)$ adalah dasar paraboloid (minimum, 14.7).

2. Hampiran linear

LINEARISASI

Fungsi

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

disebut **linearisasi** f di (a,b). Hampiran $f(x,y) \approx L(x,y)$ baik di dekat (a,b). Grafik L adalah bidang singgung.

CONTOH 4 — LINEARISASI DAN HAMPIRAN

$f(x,y) = xe^{xy}$ di $(1,0)$: $f = 1$, $f_x = e^{xy}(1+xy) = 1$, $f_y = x^2 e^{xy} = 1$. $L = 1 + (x-1) + y = x + y$. Maka $f(1{,}1, -0{,}1) \approx L = 1{,}0$; nilai sebenarnya $1{,}1e^{-0{,}11} \approx 0{,}9854$. Galat sekitar 1,5%.

CONTOH 5 — HAMPIRAN AKAR

$f = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ di $(2,1)$: $f = 3$, $f_x = -\dfrac{x}{f} = -\dfrac{2}{3}$, $f_y = -\dfrac{7y}{f} = -\dfrac{7}{3}$. $L = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1)$. Untuk $(1{,}95;\ 1{,}08)$: $L = 3 + 0{,}0333 - 0{,}1867 = 2{,}8467$. Nilai tepat $\sqrt{20 - 3{,}8025 - 8{,}1648} = \sqrt{8{,}0327} \approx 2{,}8342$. Galat $\approx 0{,}0125$, cukup kecil mengingat perubahan masukan sampai $0{,}08$.

3. Keterdiferensialan

DEFINISI

$z = f(x,y)$ **terdiferensialkan** di (a,b) bila $\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$ dapat ditulis

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

dengan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ bila $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

TEOREMA (SYARAT CUKUP)

Bila turunan parsial f_x, f_y ada di sekitar (a,b) dan kontinu di (a,b), maka f terdiferensialkan di (a,b). Jika terdiferensialkan, maka f kontinu di titik itu.

Keberadaan f_x dan f_y saja *tidak* menjamin keterdiferensialan, bahkan tidak menjamin kekontinuan: fungsi $g = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $g(0,0) = 0$ (14.2) memiliki $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$ tetapi tidak kontinu di asal.

4. Diferensial

DIFERENSIAL TOTAL

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Dengan $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, dz adalah perubahan sepanjang *bidang singgung* sedangkan Δz adalah perubahan sepanjang *permukaan*; $\Delta z \approx dz$ untuk perubahan kecil. Untuk tiga peubah, $dw = w_x\,dx + w_y\,dy + w_z\,dz$.

CONTOH 6 — VOLUME SILINDER

$V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$. Silinder berjari-jari $r = 5$ cm dan tinggi $h = 12$ cm diukur dengan galat maksimum 0,1 cm untuk keduanya: $dV = 2\pi(5)(12)(0{,}1) + \pi(25)(0{,}1) = 12\pi + 2{,}5\pi = 14{,}5\pi \approx 45{,}55\ \text{cm}^3$. Volume $300\pi \approx 942{,}5\ \text{cm}^3$; galat relatif $\approx 4{,}8\%$.

CONTOH 7 — BALOK

Balok berukuran $75 \times 60 \times 40$ cm dengan galat pengukuran maksimum $0{,}2$ cm per sisi. $V = xyz$, $dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = (2400 + 3000 + 4500)(0{,}2) = 1980\ \text{cm}^3$. $V = 180\,000\ \text{cm}^3$, galat relatif $\approx 1{,}1\%$. Galat relatif adalah jumlah galat relatif tiap sisi: $\frac{0{,}2}{75} + \frac{0{,}2}{60} + \frac{0{,}2}{40} = 0{,}0027 + 0{,}0033 + 0{,}005 = 0{,}011$.

CONTOH 8 — HAMBATAN PARALEL

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Untuk $R_1 = 100$, $R_2 = 300$: $R = 75\ \Omega$. $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{90000}{160000} = 0{,}5625$; $\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{10000}{160000} = 0{,}0625$. Bila tiap hambatan memiliki galat $\pm 1\ \Omega$, $dR \le (0{,}5625 + 0{,}0625)\cdot 1 = 0{,}625\ \Omega$. Hambatan yang lebih kecil lebih mempengaruhi hasil.

5. Kesalahan umum

- Memakai bidang singgung jauh dari titik singgungnya; hampiran hanya baik dekat (a, b).
- Menyamakan Δz dengan dz: sama hanya pada hampiran.
- Menganggap keberadaan f_x, f_y cukup untuk keterdiferensialan.
- Lupa mengevaluasi turunan parsial di titik singgung sebelum memasukkannya ke persamaan bidang.

6. Ringkasan

- Bidang singgung: $z - c = f_x(x-a) + f_y(y-b)$; normal $\langle f_x, f_y, -1\rangle$.
- $L(x,y)$ hampiran linear; $dz = f_x\,dx + f_y\,dy$.
- Turunan parsial kontinu $\Rightarrow$ terdiferensialkan $\Rightarrow$ kontinu.
- Diferensial dipakai untuk menaksir galat pengukuran.

Berikutnya 14.5 Aturan Rantai.

14.5 Aturan Rantai

Pada satu peubah, aturan rantai berbunyi $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. Bila fungsi luar bergantung pada beberapa peubah antara yang masing-masing bergantung pada peubah lain, kita menjumlahkan lintasan perubahan.

1. Aturan rantai: satu peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 1)

Misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensialkan, dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$ terturunkan. Maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Alasan. Perubahan Δt menyebabkan Δx, Δy, dan dari keterdiferensialan (14.4) $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$. Bagi dengan Δt dan ambil limit. Intinya: z berubah lewat dua "jalur", x dan y, dan sumbangannya dijumlahkan.

CONTOH 1 — RANTAI LANGSUNG

$z = x^2 y + 3xy^4$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. Di $t = 0$: $x = 0$, $y = 1$. $z_x = 2xy + 3y^4 = 3$, $z_y = x^2 + 12xy^3 = 0$, $x' = 2\cos 2t = 2$, $y' = -\sin t = 0$. $\dfrac{dz}{dt} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6$.

CONTOH 2 — KERUCUT YANG BERUBAH

Volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Jari-jari bertambah 2 cm/s dan tinggi berkurang 3 cm/s. Pada saat $r = 10$, $h = 15$: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2\pi r h}{3}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{2\pi \cdot 150}{3}(2) + \dfrac{100\pi}{3}(-3) = 200\pi - 100\pi = 100\pi \approx 314{,}2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Volume bertambah.

CONTOH 3 — GERAK SEPANJANG KURVA

Suhu $T(x, y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ dan partikel bergerak sepanjang $x = t$, $y = t$. Pada $t = 1$: $T_x = -12{,}5$, $T_y = -25$ (14.3), $x' = y' = 1$. $\dfrac{dT}{dt} = -12{,}5 - 25 = -37{,}5$ derajat per satuan waktu: partikel merasakan suhu yang menurun.

2. Aturan rantai: dua peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 2)

Bila $z = f(x,y)$ dengan $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

DIAGRAM POHON

Gambarkan z di atas, cabang ke x dan y (turunan $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$), lalu dari tiap x, y cabang ke s, t. Turunan $\partial z/\partial s$ adalah jumlah hasil kali sepanjang semua lintasan dari z ke s.

CONTOH 4 — DUA PEUBAH BEBAS

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2 t$. $z_x = e^x \sin y$, $z_y = e^x \cos y$; $x_s = t^2$, $x_t = 2st$, $y_s = 2st$, $y_t = s^2$.

$$z_s = e^x \sin y\, t^2 + e^x \cos y\, 2st, \qquad z_t = e^x \sin y\, 2st + e^x \cos y\, s^2.$$

Di $s = 1, t = 2$: $x = 4$, $y = 2$; $z_s = e^4(4\sin 2 + 4\cos 2) \approx 107{,}7$ dan $z_t = e^4(4\sin 2 + \cos 2) \approx 175{,}9$.

CONTOH 5 — TIGA PEUBAH ANTARA

$w = x^2 + yz$, $x = u + v$, $y = uv$, $z = u - v$. Aturan rantai: $w_u = 2x \cdot 1 + z \cdot v + y \cdot 1$. Di $u = 1, v = 2$: $x = 3, y = 2, z = -1$: $w_u = 6 - 2 + 2 = 6$. Cek langsung: $w = (u+v)^2 + u^2 v - uv^2$, $w_u = 2(u+v) + 2uv - v^2 = 6 + 4 - 4 = 6$. Juga $w_v = 2x + zu - y = 6 - 1 - 2 = 3$.

CONTOH 6 — KOORDINAT KUTUB

Untuk $z = f(x,y)$ dengan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $z_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$ dan $z_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta$. Dari sini diperoleh $z_r^2 + \dfrac{1}{r^2} z_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$. Untuk $f = x^2 + y^2$ (jadi $z = r^2$): $z_r = 2r$, $z_\theta = 0$, dan memang $f_x^2 + f_y^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4r^2$.

3. Aturan rantai umum

Bila u fungsi n peubah $x_1, \ldots, x_n$, dan tiap x_i fungsi m peubah $t_1, \ldots, t_m$, maka untuk setiap j:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

Hitung per lintasan dan jumlahkan.

4. Turunan implisit

TEOREMA FUNGSI IMPLISIT (BENTUK TURUNAN)

Bila $F(x, y) = 0$ mendefinisikan y sebagai fungsi terturunkan dari x dan $F_y \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Untuk $F(x, y, z) = 0$ mendefinisikan $z = f(x, y)$, dengan $F_z \neq 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Alasan. Turunkan $F(x, y(x)) = 0$ terhadap x dengan aturan rantai: $F_x \cdot 1 + F_y \frac{dy}{dx} = 0$.

CONTOH 7 — KURVA FOLIUM

$x^3 + y^3 = 6xy$, $F = x^3 + y^3 - 6xy$: $F_x = 3x^2 - 6y$, $F_y = 3y^2 - 6x$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$. Di $(3, 3)$: $\dfrac{6 - 9}{9 - 6} = -1$. Garis singgung: $y - 3 = -(x - 3)$, yaitu $x + y = 6$.

CONTOH 8 — PERMUKAAN IMPLISIT

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$: $F_x = 3x^2 - 6yz$, $F_z = 3z^2 - 6xy$. $z_x = -\dfrac{3x^2 - 6yz}{3z^2 - 6xy} = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$, sama dengan yang diperoleh di 14.3, tetapi lebih cepat. Di $(1, 2, 3)$: $z_x = \frac{11}{5}$.

CONTOH 9 — KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian $f(x,y)=k$: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$. Untuk $f=x^2+2y^2$ di $(2,1)$: $-\dfrac{4}{4}=-1$, kemiringan garis singgung kontur -1. Bandingkan dengan gradien $\langle 4,4\rangle$, yang tegak lurus arah $\langle 1,-1\rangle$ (14.6).

5. Turunan orde dua dengan aturan rantai

CONTOH 10 — RANTAI DUA KALI

Bila $z=f(x,y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, maka $\dfrac{dz}{dt}=2tf_x+3t^2f_y$. Turunkan lagi ($f_x$, f_y sendiri fungsi t): $\dfrac{d^2z}{dt^2}=2f_x+2t\big(2t\,f_{xx}+3t^2f_{xy}\big)+6tf_y+3t^2\big(2t\,f_{yx}+3t^2f_{yy}\big)$. Untuk $f=xy$ (jadi $z=t^5$): $f_x=y=t^3$, $f_y=x=t^2$, $f_{xy}=1$, $f_{xx}=f_{yy}=0$: $2t^3+2t(3t^2)+6t\cdot t^2+3t^2(2t)=2t^3+6t^3+6t^3+6t^3=20t^3$; dan memang $(t^5)''=20t^3$.

6. Kesalahan umum

- Menghilangkan salah satu lintasan (lupa suku $f_y\,dy/dt$).
- Menulis dz/dt dengan d untuk turunan parsial, atau ∂ pada turunan fungsi satu peubah.
- Pada turunan implisit, lupa tanda minus di $-F_x/F_y$.
- Lupa mengevaluasi x,y di titik sebelum mensubstitusi ke turunan parsial.

7. Ringkasan

- $\dfrac{dz}{dt}=z_x x'+z_y y'$; untuk dua peubah bebas jumlahkan lintasan.
- Diagram pohon membantu mengorganisasi lintasan.
- Implisit: $dy/dx=-F_x/F_y$, $z_x=-F_x/F_z$.

Berikutnya 14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien.

14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien

f_x dan f_y mengukur laju perubahan ke arah sumbu. Bagaimana bila kita bergerak ke arah lain? Jawabannya adalah **turunan berarah**, dan jawabannya dihitung dengan sebuah vektor yang sangat penting: **gradien**.

1. Turunan berarah

DEFINISI

Turunan berarah f di (a,b) pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1,\, b + hu_2) - f(a,b)}{h}.$$

Ia adalah laju perubahan f per satuan jarak bila kita bergerak dari (a,b) ke arah $\mathbf{u}$. Dengan $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ diperoleh f_x; dengan $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ diperoleh f_y.

TEOREMA

Bila f terdiferensialkan, maka $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\,u_1 + f_y(x,y)\,u_2$.

Bukti. Definisikan $g(h) = f(a + hu_1, b + hu_2)$. Maka $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = g'(0)$. Aturan rantai (14.5) memberi $g'(h) = f_x\,u_1 + f_y\,u_2$ dihitung di $(a + hu_1, b + hu_2)$; di $h = 0$ diperoleh rumus. $\blacksquare$

Bila $\mathbf{u}$ membentuk sudut θ dengan sumbu x positif, $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ dan $D_{\mathbf{u}} f = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$.

2. Vektor gradien

GRADIEN

$$\nabla f = \langle f_x,\, f_y \rangle = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}, \qquad \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \text{ (tiga peubah).}$$

Maka $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.

CONTOH 1 — TURUNAN BERARAH

$f(x,y) = x^2y^3 - 4y$, titik $(2,1)$, arah $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ (sudut $30°$). $f_x = 2xy^3 = 4$, $f_y = 3x^2y^2 - 4 = 8$; $\nabla f(2,1) = \langle 4, 8 \rangle$. $D_{\mathbf{u}} f = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 4 \approx 7{,}464$.

CONTOH 2 — ARAH BUKAN SATUAN

Arah yang diberikan sebagai vektor $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$ harus dinormalkan: $\mathbf{u} = \frac{1}{5}\langle 3, -4 \rangle$. Untuk f di Contoh 1: $D_{\mathbf{u}} f = \frac{1}{5}(4 \cdot 3 + 8 \cdot (-4)) = \frac{12 - 32}{5} = -4$. Turun 4 per satuan jarak ke arah itu.

CONTOH 3 — TIGA PEUBAH

$f(x,y,z) = x \sin(yz)$ di $(1,3,0)$ ke arah $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$. $\nabla f = \langle \sin yz,\ xz\cos yz,\ xy\cos yz \rangle$, di titik: $\langle 0, 0, 3 \rangle$. $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\sqrt{6}$. $D_{\mathbf{u}} f = \dfrac{3(-1)}{\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} \approx -1{,}225$.

3. Arah pertumbuhan tercepat

TEOREMA

Misalkan f terdiferensialkan dan $\nabla f \neq \mathbf{0}$. Nilai maksimum $D_{\mathbf{u}} f$ adalah $|\nabla f|$, dicapai bila $\mathbf{u}$ searah ∇f. Nilai minimum $-|\nabla f|$ dicapai pada arah $-\nabla f$. Pada arah tegak lurus ∇f, $D_{\mathbf{u}} f = 0$.

Bukti. $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$, dengan θ sudut antara ∇f dan $\mathbf{u}$. Nilai maksimum $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$), minimum -1 ($\theta = \pi$), nol di $\theta = \pi/2$. ■

CONTOH 4 — ARAH TERCEPAT

Untuk f di Contoh 1 di $(2,1)$: laju kenaikan maksimum $|\langle 4, 8 \rangle| = \sqrt{80} \approx 8{,}944$ pada arah $\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Laju turun paling cepat $-8{,}944$ ke arah $-\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Perubahan nol pada arah $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle$ (garis singgung kurva ketinggian).

CONTOH 5 — PENDAKI DI BUKIT

Tinggi bukit $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$ (meter). Di $(60, 40)$: $\nabla z = \langle -0{,}01x, -0{,}02y\rangle = \langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$, $|\nabla z| = 1$. Tanjakan paling curam: arah $\langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$ dengan kemiringan 1 (sudut 45°). Bila pendaki berjalan ke arah $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1\rangle$: $D_{\mathbf{u}} z = \dfrac{-0{,}6 - 0{,}8}{\sqrt{2}} \approx -0{,}99$, turun hampir 1 meter per meter. Untuk berjalan mendatar ia harus mengikuti arah $\pm\langle 0{,}8, -0{,}6\rangle$.

CONTOH 6 — SUHU DAN SEMUT

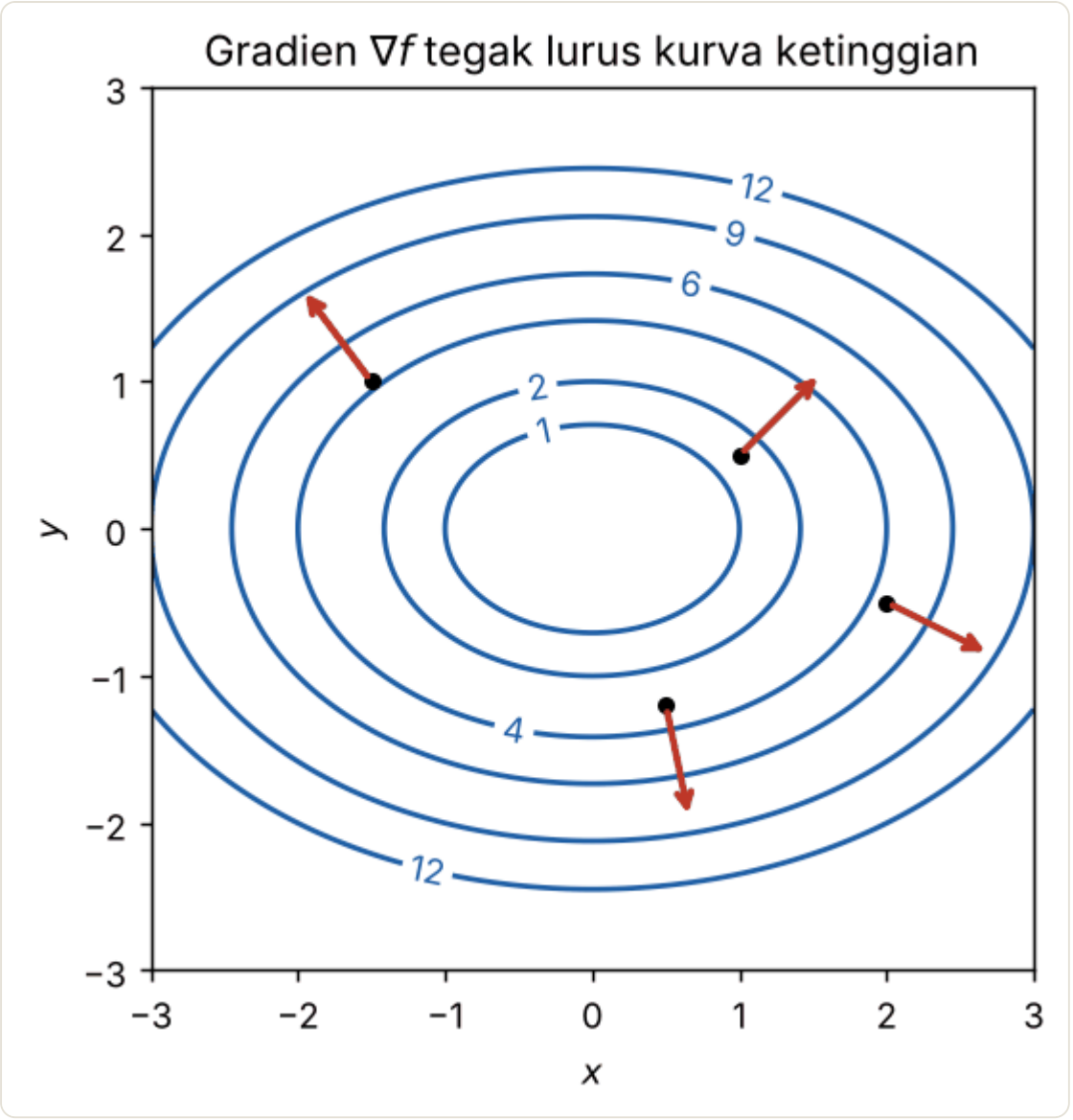
Suhu $T = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ di $(1, 1)$: $\nabla T = \langle -12{,}5, -25\rangle$. Semut yang ingin menghangat secepat mungkin bergerak ke arah $\nabla T \propto \langle -1, -2\rangle$ (menuju asal, tempat panas); yang ingin mendingin bergerak ke $\langle 1, 2\rangle$. Laju maksimum $|\nabla T| = \sqrt{12{,}5^2 + 25^2} \approx 27{,}95$ derajat per satuan jarak.

4. Gradien tegak lurus kurva ketinggian

TEOREMA

Di setiap titik P pada kurva ketinggian $f(x, y) = k$ (atau permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$), vektor $\nabla f(P)$ tegak lurus garis singgung (atau bidang singgung) kurva (permukaan) tersebut di P.

Bukti (kurva). Misalkan $\mathbf{r}(t)$ parametrisasi kurva ketinggian. Karena $f(\mathbf{r}(t)) = k$, aturan rantai memberi $\nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, yaitu $\nabla f \perp \mathbf{r}'$, vektor singgung. Argumen sama berlaku untuk setiap kurva pada permukaan ketinggian, jadi ∇f tegak lurus semua singgung di P. $\blacksquare$



Gradien (panah merah) tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah f naik.

BIDANG SINGGUNG DAN GARIS NORMAL PERMUKAAN KETINGGIAN

Untuk permukaan $F(x,y,z)=k$ di $P(x_0,y_0,z_0)$ dengan $\nabla F(P)\neq\mathbf{0}$:

$$F_x(P)(x-x_0)+F_y(P)(y-y_0)+F_z(P)(z-z_0)=0,$$

dan garis normal $\dfrac{x-x_0}{F_x}=\dfrac{y-y_0}{F_y}=\dfrac{z-z_0}{F_z}$.

CONTOH 7 — ELIPSOID

$F=\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=3$ di $(-2,1,-3)$ (periksa: $1+1+1=3$). $\nabla F=\langle\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{9}\rangle=\langle-1,2,-\frac{2}{3}\rangle$. Bidang singgung: $-(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$. Kalikan -3: $3x-6y+2z=-18$. Garis normal: $\langle-2-s,\ 1+2s,\ -3-\frac{2}{3}s\rangle$.

CONTOH 8 — GRAFIK SEBAGAI PERMUKAAN KETINGGIAN

Grafik $z = f(x, y)$ adalah permukaan ketinggian $F = f(x, y) - z = 0$, dengan $\nabla F = \langle f_x, f_y, -1 \rangle$ normalnya, sesuai 14.4. Untuk $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $\langle 2, 2, -1 \rangle$, bidang $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, sama dengan $z = 2x + 2y - 2$.

CONTOH 9 — SINGGUNG KONTUR

Kontur $x^2 + 2y^2 = 3$ di $(1, 1)$: $\nabla f = \langle 2, 4 \rangle$. Garis singgung kontur: $2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$, yaitu $x + 2y = 3$.

5. Kesalahan umum

- Memakai vektor arah yang bukan satuan. Normalkan dulu.
- Mengira $|\nabla f|$ adalah laju pada arah tertentu: itu laju *maksimum*.
- Menyamakan ∇f dengan arah kurva ketinggian: ia *tegak lurus*.
- Menghitung gradien sebelum mengevaluasinya di titik yang diminta.

6. Ringkasan

- $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ satuan.
- Maksimum $|\nabla f|$ pada arah ∇f; minimum pada $-\nabla f$; nol tegak lurus ∇f.
- ∇f tegak lurus kurva/permukaan ketinggian; dipakai untuk bidang singgung dan garis normal.

Berikutnya 14.7 Nilai Maksimum dan Minimum.

14.7 Nilai Maksimum dan Minimum

Salah satu penerapan terpenting turunan: mencari nilai terbesar dan terkecil. Pada dua peubah gagasan dasarnya sama dengan satu peubah, tetapi ada satu jenis titik baru: titik pelana.

1. Definisi

MAKSIMUM DAN MINIMUM

f mempunyai **maksimum lokal** di (a, b) bila $f(x, y) \leq f(a, b)$ untuk semua (x, y) dalam suatu cakram di sekitar (a, b); $f(a, b)$ disebut nilai maksimum lokal. **Minimum lokal** didefinisikan dengan $\geq$. Bila ketaksamaan berlaku untuk semua (x, y) di daerah asal, nilainya **mutlak** (global).

TEOREMA FERMAT (DUA PEUBAH)

Jika f mempunyai maksimum atau minimum lokal di (a, b) dan turunan parsial pertamanya ada di sana, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$.

Alasannya: fungsi satu peubah $g(x) = f(x, b)$ mempunyai ekstrem lokal di $x = a$, jadi $g'(a) = f_x(a, b) = 0$; serupa untuk f_y. Titik dengan $f_x = f_y = 0$ (atau salah satu turunan tidak ada) disebut **titik kritis**. Titik kritis hanyalah *kandidat*: tidak semuanya ekstrem.

Titik kritis yang bukan maksimum maupun minimum lokal disebut **titik pelana**: di sekitarnya f naik ke beberapa arah dan turun ke arah lain (seperti $f = x^2 - y^2$ di asal).

2. Uji turunan kedua

UJI TURUNAN KEDUA

Misalkan turunan parsial kedua f kontinu di sekitar (a, b), dengan $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Definisikan

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \text{ di } (a, b).$$

- $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$: **minimum lokal**.
- $D > 0$ dan $f_{xx} < 0$: **maksimum lokal**.
- $D < 0$: **titik pelana**.
- $D = 0$: uji tidak memberi kesimpulan.

Gagasan. Di dekat titik kritis, f menyerupai bentuk kuadrat $\frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2)$. Bentuk ini positif untuk semua $(h, k) \neq \mathbf{0}$ tepat bila $f_{xx} > 0$ dan $D > 0$ (kriteria matriks definit positif); negatif bila $f_{xx} < 0$, $D > 0$; berganda tanda bila $D < 0$.

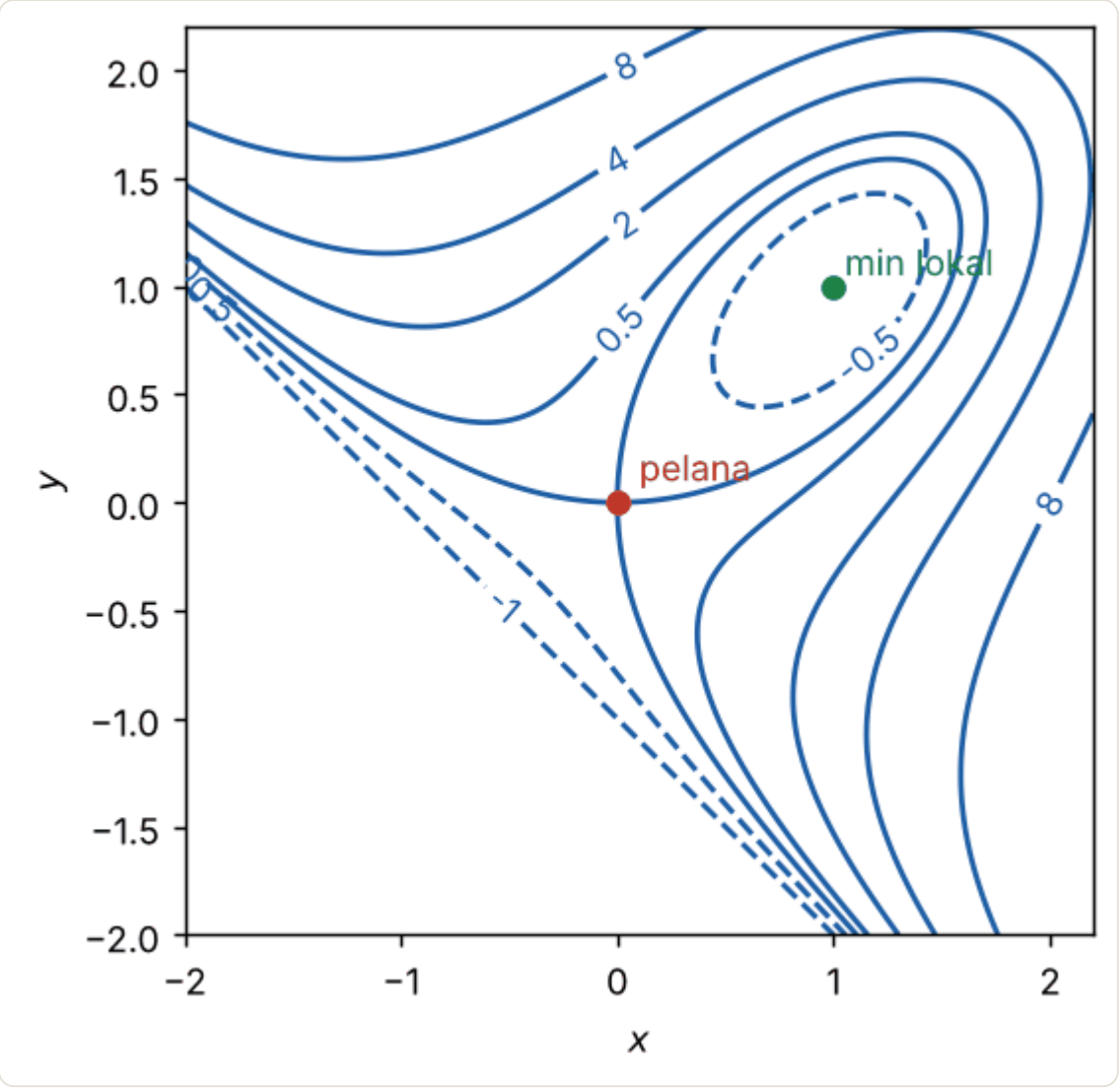
CONTOH 1 — TIGA TITIK KRITIS

$f = x^4 + y^4 - 4xy$. $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$. Dari $f_x = 0$: $y = x^3$; masukkan: $4x^9 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$. Titik kritis: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$, $D = 144x^2y^2 - 16$.

- $(0, 0)$: $D = -16 < 0$: pelana.
- $(1, 1)$: $D = 128 > 0$, $f_{xx} = 12 > 0$: minimum lokal, $f = 1 + 1 - 4 = -2$.
- $(-1, -1)$: $D = 128$, $f_{xx} = 12$: minimum lokal, $f = -2$.

CONTOH 2 — $F = X^3 + Y^3 - 3XY$

$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$; $f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$. Titik: $(0, 0)$, $(1, 1)$. $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, $D = 36xy - 9$. Di $(0, 0)$: $D = -9$: pelana. Di $(1, 1)$: $D = 27 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$: minimum lokal $f = -1$.



Kontur $f = x^3 + y^3 - 3xy$: pelana di $(0, 0)$, minimum lokal di $(1, 1)$.

CONTOH 3 — $D = 0$

Untuk $f = x^4 + y^4$ di $(0, 0)$: $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$, $D = 0$: uji gagal, tetapi jelas $(0, 0)$ minimum (nilai ≥ 0). Untuk $g = x^2 + y^3$: titik kritis $(0, 0)$, $D = 0$; sepanjang sumbu y negatif $g < 0$, sepanjang sumbu x $g > 0$: bukan ekstrem (pelana). Kesimpulannya, saat $D = 0$ perlu analisis langsung.

CONTOH 4 — JARAK TITIK KE BIDANG

Cari titik pada bidang $x + 2y + z = 4$ yang terdekat dengan $(1, 0, -2)$. Substitusi $z = 4 - x - 2y$: $d^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$. $\partial_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14$; $\partial_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24$. Selesaikan: $x + y = \frac{7}{2}$, $4x + 10y = 24 \Rightarrow 6y = 10$, $y = \frac{5}{3}$, $x = \frac{11}{6}$, $z = -\frac{7}{6}$. $d^2 = \frac{25}{36} + \frac{100}{36} + \frac{25}{36} = \frac{150}{36}$, $d = \frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}041$, sama dengan $\frac{|1+0-2-4|}{\sqrt{6}}$ (12.5). Bentuk d^2 merupakan paraboloid terbuka ke atas, jadi titik kritis adalah minimum global.

CONTOH 5 — KOTAK TANPA TUTUP

Kotak persegi panjang tanpa tutup bervolume 32 m³: minimalkan luas bahan $A = xy + 2xz + 2yz$ dengan $z = \frac{32}{xy}$: $A = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$. $A_x = y - \frac{64}{x^2} = 0$, $A_y = x - \frac{64}{y^2} = 0 \Rightarrow x = y = 4$, $z = 2$, $A = 16 + 16 + 16 = 48$ m². $A_{xx} = \frac{128}{x^3} = 2 > 0$, $A_{xy} = 1$, $D = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$: minimum. Alas persegi, tinggi setengah sisi alas.

3. Nilai ekstrem mutlak pada daerah tertutup

TEOREMA NILAI EKSTREM

Jika f kontinu pada himpunan $D \subset \mathbb{R}^2$ yang tertutup dan terbatas, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak di D.

Metode (tiga langkah).

1. Cari nilai f di titik kritis di bagian dalam D.
2. Cari nilai ekstrem f pada batas D (kurangi ke fungsi satu peubah, atau pakai Lagrange, 14.8).
3. Nilai terbesar dan terkecil di antara semuanya adalah maksimum dan minimum mutlak.

CONTOH 6 — PERSEGI PANJANG

$f = x^3 - 3x + y^2$ pada $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.
Dalam: $f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $f_y = 2y = 0$: $f(1, 0) = -2$, $f(-1, 0) = 2$.
Sisi $y = \pm 1$: $g(x) = x^3 - 3x + 1$, $g' = 0$ di $x = \pm 1$: $g(1) = -1$, $g(-1) = 3$; ujung $g(2) = 3$, $g(-2) = -1$.
Sisi $x = 2$: $2 + y^2 \in [2, 3]$; sisi $x = -2$: $-2 + y^2 \in [-2, -1]$.
Nilai-nilai kandidat: $-2,\ 2,\ -1,\ 3,\ -2,\ -1$. Maksimum mutlak 3 (di $(-1, \pm 1)$ dan $(2, \pm 1)$); minimum mutlak -2 (di $(1, 0)$ dan $(-2, 0)$).

CONTOH 7 — SEGITIGA

$f = x^2 + y^2 - 2x$ pada segitiga $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Dalam: $f_x = 2x - 2 = 0$, $f_y = 2y = 0 \Rightarrow (1, 0)$, yang berada di batas (sisi bawah). Sisi $y = 0$, $0 \le x \le 2$: $x^2 - 2x \in [-1, 0]$, min -1 di $x = 1$. Sisi $x = 0$, $0 \le y \le 2$: $y^2 \in [0, 4]$. Sisi miring $y = 2 - x$: $x^2 + (2 - x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$, minimum di $x = \frac{3}{2}$: $2 \cdot \frac{9}{4} - 9 + 4 = -\frac{1}{2}$; ujung: $x = 0$: 4; $x = 2$: 0. Maksimum mutlak 4 di $(0, 2)$; minimum mutlak -1 di $(1, 0)$.

4. Kesalahan umum

- Menganggap setiap titik kritis adalah ekstrem; pelana adalah kemungkinan ketiga.
- Lupa memeriksa batas pada daerah tertutup.
- Memakai uji turunan kedua saat $D = 0$.
- Salah tanda: $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, bukan $f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2$.

5. Ringkasan

- Ekstrem lokal $\Rightarrow f_x = f_y = 0$ (titik kritis).
- $D > 0$, $f_{xx} > 0$: min; $D > 0$, $f_{xx} < 0$: maks; $D < 0$: pelana.
- Pada daerah tertutup terbatas: bandingkan titik kritis dan nilai pada batas.

Berikutnya 14.8 Pengali Lagrange.

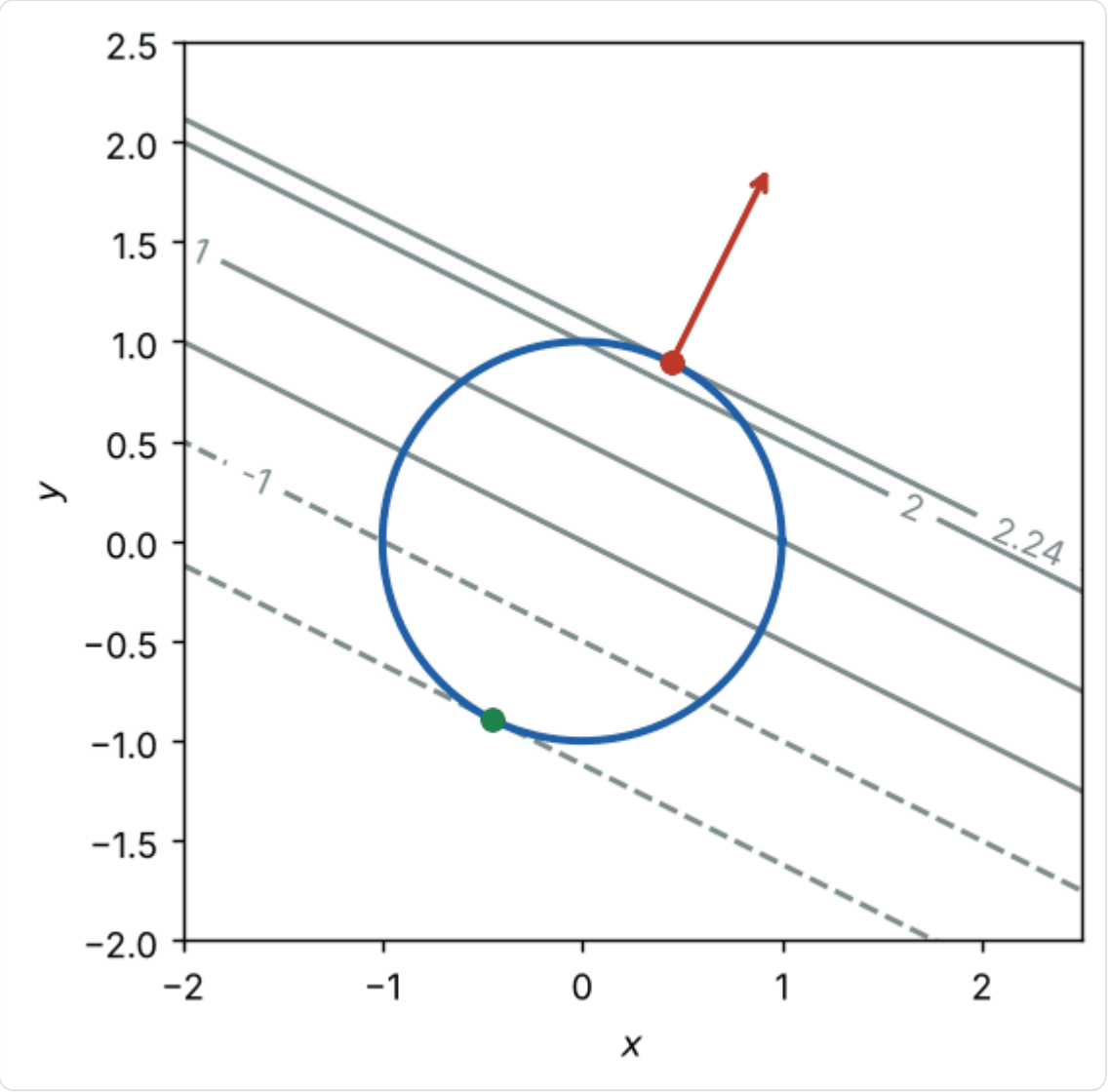
14.8 Pengali Lagrange

Banyak masalah optimasi mempunyai *kendala*: memaksimalkan hasil dengan anggaran tertentu, meminimalkan bahan dengan volume tertentu. Metode **pengali Lagrange** menangani ini tanpa harus menyelesaikan kendala secara eksplisit.

1. Gagasan geometris

Maksimalkan $f(x, y)$ dengan kendala $g(x, y) = k$. Kurva kendala $g = k$ adalah sebuah kurva di bidang. Kita memakai kurva ketinggian $f = c$ dan menaikkan c sejauh masih menyentuh kurva kendala. Nilai c terbesar tercapai pada titik di mana kurva ketinggian *menyinggung* kurva kendala. Di titik singgung, keduanya mempunyai garis singgung sama, jadi gradiennya sejajar:

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$



Maksimumkan $f = x + 2y$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$: kontur f menyinggung lingkaran di titik merah.

2. Metode

METODE PENGALI LAGRANGE (SATU KENDALA)

Untuk mencari ekstrem $f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = k$ (dengan $\nabla g \neq \mathbf{0}$):

1. Selesaikan sistem $\nabla f = \lambda \nabla g$ dan $g = k$; yaitu $f_x = \lambda g_x$, $f_y = \lambda g_y$, $f_z = \lambda g_z$, $g = k$.
2. Hitung f di semua titik (x, y, z) hasilnya. Terbesar = maksimum, terkecil = minimum (bila ekstrem ada).

λ disebut **pengali Lagrange**. Hal yang sama berlaku untuk dua peubah (hilangkan z).

Catatan. Bila g berupa kurva tertutup dan terbatas (lingkaran, elips, dsb.), teorema nilai ekstrem menjamin ekstrem ada. Pada kendala tak terbatas (mis. hiperbola), periksa dengan cara lain apakah titik yang ditemukan memang maksimum atau minimum.

CONTOH 1 — FUNGSI LINEAR PADA LINGKARAN

Maksimalkan dan minimalkan $f = x + 2y$ dengan $x^2 + y^2 = 1$. $\nabla f = \langle 1, 2\rangle = \lambda\langle 2x, 2y\rangle \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{\lambda}$. Masukkan ke kendala: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4}$, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Titik: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ dengan $f = \sqrt{5}$ (maksimum) dan $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ dengan $f = -\sqrt{5}$ (minimum). Cocok dengan Cauchy–Schwarz: $|x + 2y| \le \sqrt{1+4}\sqrt{x^2+y^2}$.

CONTOH 2 — KOTAK TERTUTUP

Kotak tertutup bervolume 1000 cm³ dengan luas permukaan terkecil. $f = 2(xy + yz + zx)$, $g = xyz = 1000$. $f_x = 2(y+z) = \lambda yz$, $f_y = 2(x+z) = \lambda xz$, $f_z = 2(x+y) = \lambda xy$. Kalikan persamaan pertama dengan x, kedua dengan y, ketiga dengan z: $2x(y+z) = 2y(x+z) = 2z(x+y) = \lambda xyz$. Dari dua pertama: $xz = yz \Rightarrow x = y$ (karena $z \neq 0$); dari yang kedua dan ketiga: $xy = xz \Rightarrow y = z$. Jadi $x = y = z = 10$ (kubus), luas $= 600$ cm².

CONTOH 3 — EKSTREM PADA CAKRAM

Cari ekstrem mutlak $f = x^2 + 2y^2 - x$ pada cakram $x^2 + y^2 \le 1$. *Dalam:* $f_x = 2x - 1 = 0$, $f_y = 4y = 0$: $(\frac{1}{2}, 0)$, $f = -\frac{1}{4}$. *Batas* $x^2 + y^2 = 1$ dengan Lagrange: $2x - 1 = 2\lambda x$, $4y = 2\lambda y$. Dari yang kedua: $y = 0$ atau $\lambda = 2$. Bila $y = 0$: $x = \pm 1$, $f(1,0) = 0$, $f(-1,0) = 2$. Bila $\lambda = 2$: $2x - 1 = 4x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, $y^2 = \frac{3}{4}$, $f = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ di $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Maksimum mutlak $\frac{9}{4}$; minimum mutlak $-\frac{1}{4}$ di $(\frac{1}{2}, 0)$.

CONTOH 4 — JARAK TERDEKAT

Titik pada $x^2 + y^2 = 4$ yang terjauh dan terdekat ke $(3, 4)$? Minimalkan $f = (x-3)^2 + (y-4)^2$, $g = x^2 + y^2 = 4$. $2(x-3) = 2\lambda x$, $2(y-4) = 2\lambda y \Rightarrow x = \frac{3}{1-\lambda}$, $y = \frac{4}{1-\lambda}$, jadi (x, y) sejajar $(3, 4)$: $(x, y) = s(3, 4)$, $25s^2 = 4$, $s = \pm\frac{2}{5}$. Terdekat $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$, jarak $5 - 2 = 3$; terjauh $(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$, jarak $5 + 2 = 7$. Sesuai gambaran geometris: pusat lingkaran, titik, dan titik ekstrem segaris.

3. Dua kendala

DUA KENDALA

Untuk ekstrem $f(x,y,z)$ dengan $g(x,y,z)=k$ dan $h(x,y,z)=l$: selesaikan

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h,\quad g=k,\quad h=l.$$

Artinya ∇f terletak pada bidang yang direntang $\nabla g,\nabla h$ (tegak lurus kurva irisan).

CONTOH 5 — SILINDER DAN BIDANG

Ekstrem $f=z$ pada kurva irisan $x^2+y^2=1$ dan $x+y+z=2$. $\langle 0,0,1\rangle=\lambda\langle 2x,2y,0\rangle+\mu\langle 1,1,1\rangle$. Komponen z: $\mu=1$. Komponen x,y: $2\lambda x+1=0$, $2\lambda y+1=0\Rightarrow x=y$. Dari silinder: $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $z=2-x-y=2\mp\sqrt{2}$. Maksimum $2+\sqrt{2}\approx 3{,}414$ di $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},2+\sqrt{2}\right)$; minimum $2-\sqrt{2}\approx 0{,}586$. (Sesuai dengan elips irisan, titik tertinggi dan terendah.)

4. Contoh ekonomi dan arti λ

CONTOH 6 — PRODUKSI DENGAN ANGGARAN

Produksi $P=L^{0{,}6}K^{0{,}4}$. Biaya satu unit tenaga kerja 2 dan modal 5; anggaran 100: $2L+5K=100$. $P_L=\frac{0{,}6P}{L}=2\lambda$, $P_K=\frac{0{,}4P}{K}=5\lambda$. Bagi: $\dfrac{0{,}6K}{0{,}4L}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow K=\dfrac{4}{15}L$. Masukkan: $2L+\frac{4}{3}L=100\Rightarrow L=30$, $K=8$. $P=30^{0{,}6}8^{0{,}4}\approx 17{,}68$. Pola umum Cobb–Douglas: L dan K memakai bagian anggaran $0{,}6$ dan $0{,}4$: $2L=60$, $5K=40$.

ARTI λ

$\lambda=\dfrac{dP^*}{d(\text{anggaran})}$: perubahan nilai optimum akibat kenaikan satu satuan batas kendala. Pada Contoh 6: $\lambda=\frac{P_L}{2}=\frac{0{,}6P}{2L}\approx 0{,}1768$. Verifikasi: bila anggaran dinaikkan menjadi 101, $L=30{,}3$, $K=8{,}08$, P naik $\approx 0{,}1768$. Disebut *harga bayangan*.

5. Kesalahan umum

- Lupa menyertakan persamaan kendala $g = k$ dalam sistem.
- Membuang solusi $x = 0$ atau $y = 0$ ketika membagi (seperti pada Contoh 3).
- Tidak membandingkan nilai f di semua titik kandidat.
- Mengira semua titik kandidat adalah maksimum atau semuanya minimum.

6. Ringkasan

- Ekstrem terkendala: $\nabla f = \lambda \nabla g$ dan $g = k$.
- Dua kendala: $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
- Pada daerah tertutup: titik kritis dalam + Lagrange pada batas.
- λ adalah laju perubahan optimum terhadap batas kendala.

Bab 14 berakhir di sini. Bab berikutnya, 15.1, memperkenalkan integral rangkap.