Bab 13: Fungsi Vektor

Bab 13 · Fungsi Vektor

13.1 Fungsi Vektor dan Kurva Ruang

Di Bab 10 kita menggambarkan kurva bidang dengan persamaan parametrik $x = f(t),\ y = g(t)$. Di ruang, kurva memerlukan tiga fungsi. Menggabungkannya menjadi satu objek bervektor memberi alat yang kuat: **fungsi vektor**, yang memungkinkan kita memakai kalkulus untuk membahas gerak, kecepatan, dan percepatan (13.4).

1. Fungsi vektor

DEFINISI

Fungsi vektor adalah fungsi yang daerah asalnya himpunan bilangan real dan daerah hasilnya himpunan vektor. Di ruang,

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t),\, g(t),\, h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k},$$

dengan f, g, h fungsi bernilai real (disebut *fungsi komponen*). Daerah asal $\mathbf{r}$ adalah irisan daerah asal ketiga komponennya.

CONTOH 1 — DAERAH ASAL

$\mathbf{r}(t) = \langle \ln(4 - t^2),\ \sqrt{t+1},\ \dfrac{1}{t-1} \rangle$. Syarat: $4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2; t + 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq -1; t \neq 1$. Daerah asal: $[-1, 1) \cup (1, 2)$.

2. Kurva ruang

Bila t berubah, ujung vektor posisi $\mathbf{r}(t)$ menggambar sebuah **kurva ruang** C. Persamaan parametriknya $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$, dan $\mathbf{r}$ disebut *parametrisasi* C. Satu kurva dapat diparametrisasi dengan banyak cara.

Limit dan kekontinuan

LIMIT DAN KONTINU

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\left\langle \lim_{t\to a}f(t),\ \lim_{t\to a}g(t),\ \lim_{t\to a}h(t)\right\rangle$$

asalkan ketiga limit komponen ada. $\mathbf{r}$ kontinu di a bila $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$; ini setara dengan kekontinuan ketiga komponen.

CONTOH 2 — LIMIT

$\lim_{t\to 0}\left\langle \dfrac{\sin t}{t},\ e^{2t},\ \dfrac{1-\cos t}{t^2}\right\rangle=\langle 1,1,\tfrac{1}{2}\rangle$.

3. Kurva-kurva penting

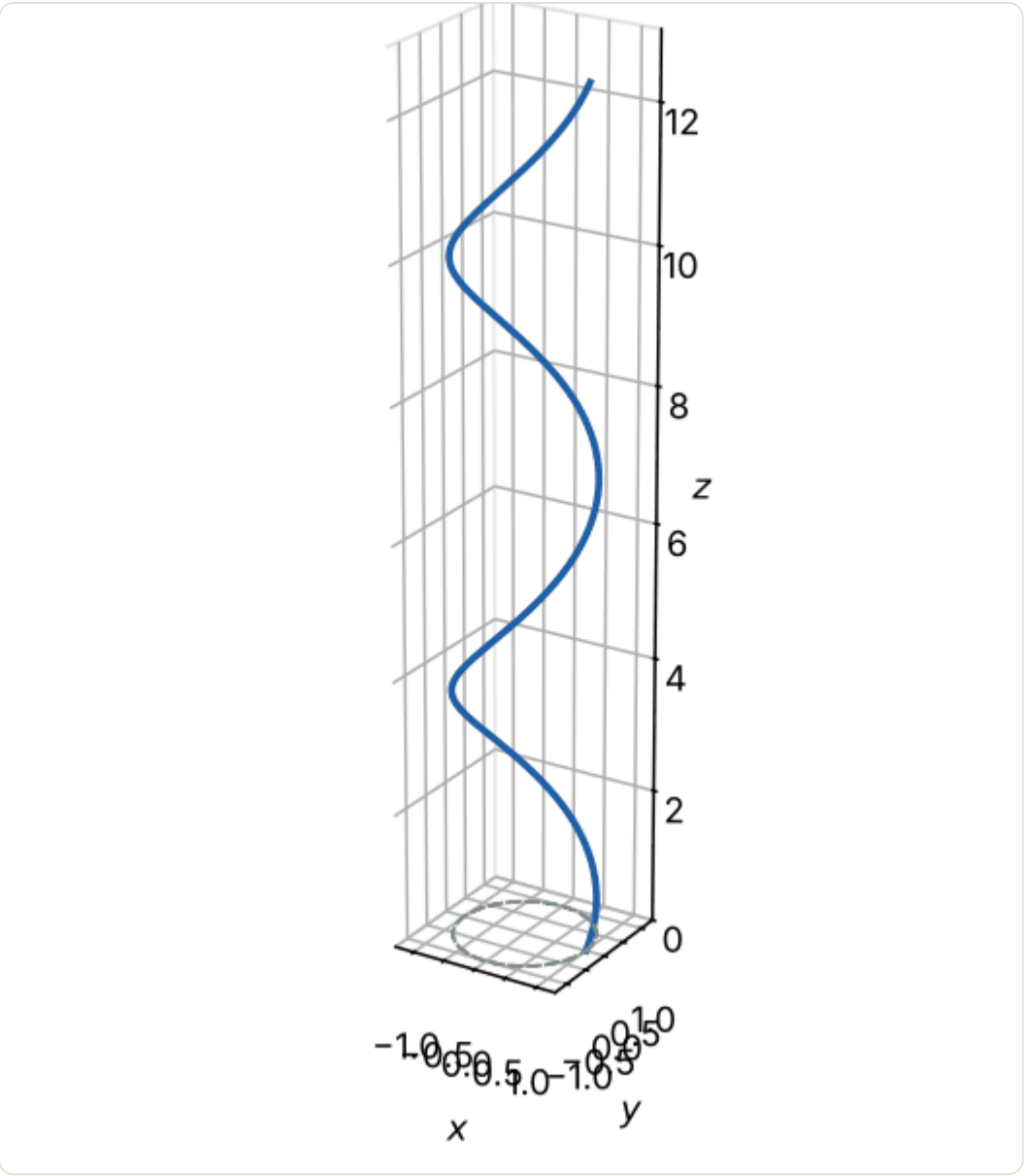
Garis lurus

Garis melalui $\mathbf{r}_0$ dengan arah $\mathbf{v}$: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$ (12.5). Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t)=(1-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r}_1$, $0\le t\le 1$.

Heliks (spiral)

CONTOH 3 — HELIKS

$\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$. Karena $x^2+y^2=1$, kurva terletak pada silinder lingkaran $x^2+y^2=1$ (12.6). Sementara t naik, titik berputar mengelilingi silinder dan naik dengan laju tetap: $z=t$. Satu putaran (t naik 2π) menaikkan z sebesar 2π. Bentuk umum $\langle a\cos t,\ a\sin t,\ bt\rangle$ berjari-jari a dan "tinggi ulir" $2\pi b$ per putaran. Bila $b<0$ heliks berputar ke arah sebaliknya.



Heliks $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$, dengan proyeksi lingkaran di bidang xy.

Kubik terpilin

CONTOH 4 — KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Proyeksi pada bidang xy: $y = x^2$; pada bidang xz: $z = x^3$; pada bidang yz: $z^2 = y^3$. Kurva terletak pada silinder parabolik $y = x^2$ sekaligus silinder $z = x^3$.

4. Kurva sebagai irisan permukaan

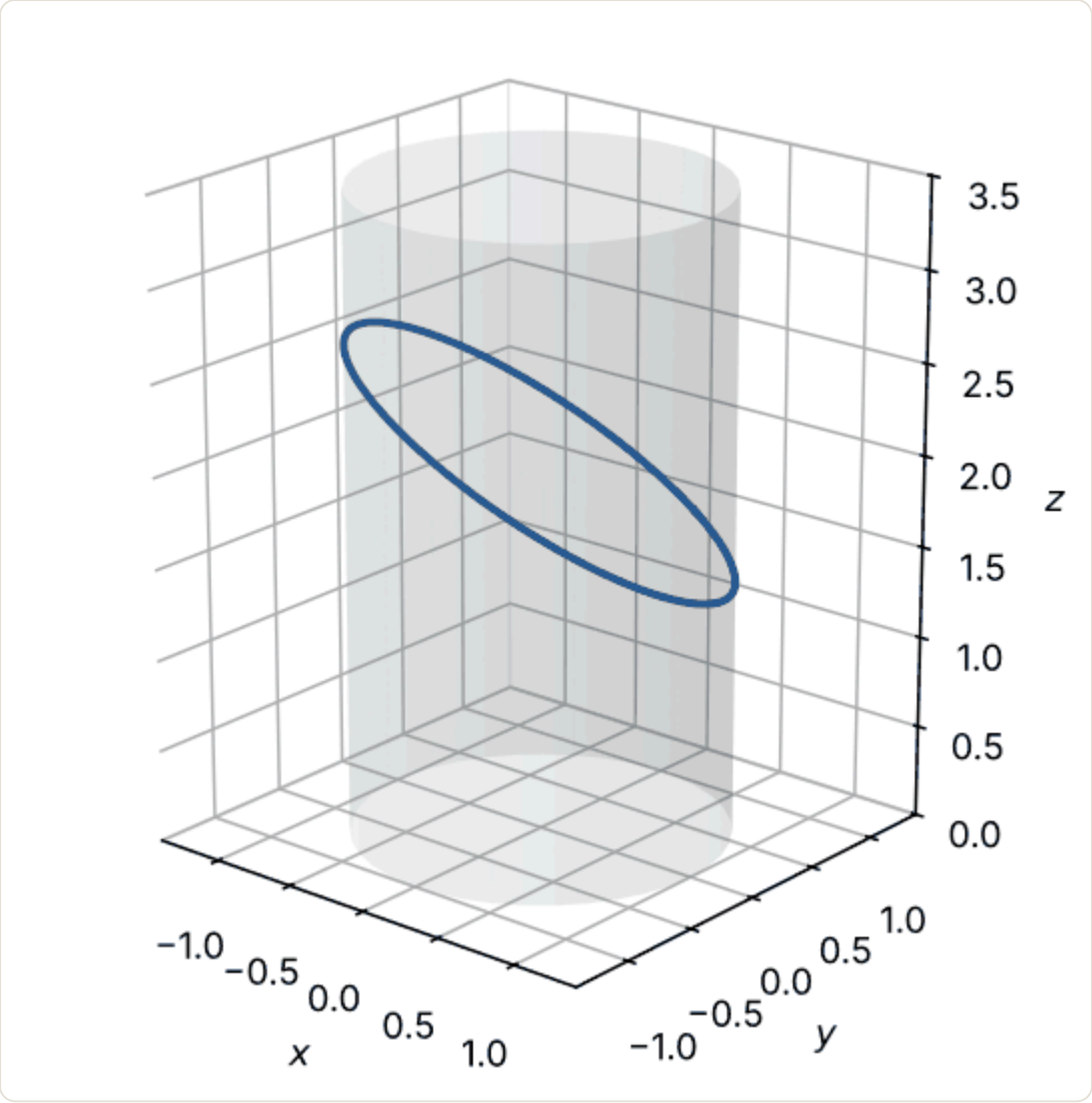
Kurva sering diberikan sebagai perpotongan dua permukaan. Untuk menparametrisasinya, pilih parametrisasi salah satu kurva proyeksi, lalu cari peubah ketiga dari persamaan kedua.

CONTOH 5 — SILINDER DAN BIDANG

Cari parametrisasi perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$. Proyeksi pada bidang xy adalah lingkaran satuan: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dari bidang, $z = 2 - y = 2 - \sin t$. Jadi

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\ \sin t,\ 2 - \sin t \rangle.$$

Kurva ini sebuah elips (irisan bidang miring dengan silinder), terletak pada bidang $y + z = 2$.



Elips: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dengan bidang $y + z = 2$.

CONTOH 6 — PARABOLOID DAN BIDANG

Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan $z = 4$: lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ pada tinggi 4, $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t,\ 2\sin t,\ 4 \rangle$. Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan bidang $y = x$: $z = 2x^2$, $\mathbf{r}(t) = \langle t,\ t,\ 2t^2 \rangle$ (parabola).

CONTOH 7 — BOLA DAN SILINDER (KURVA VIVIANI)

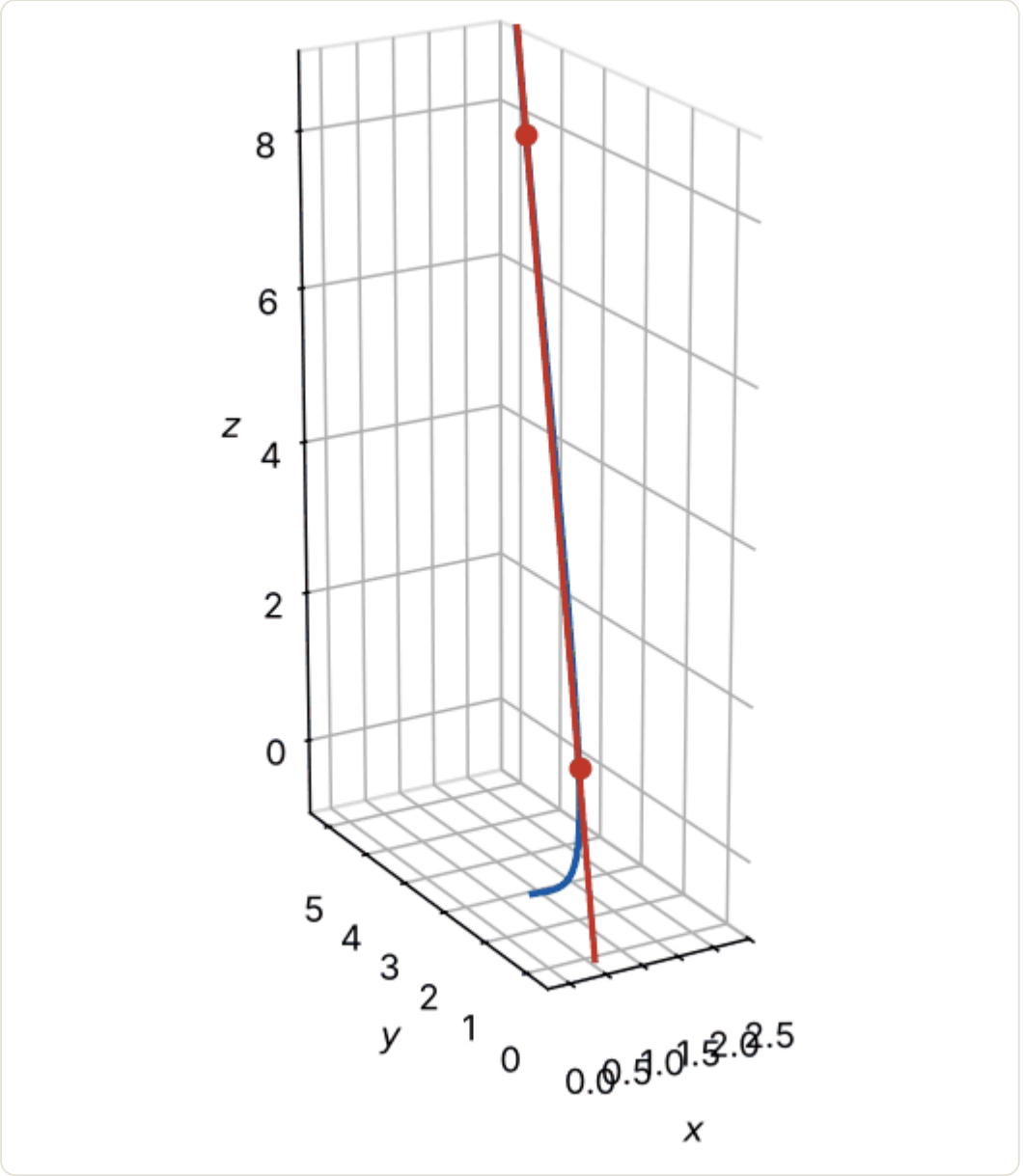
Bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dan silinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$, yaitu $x^2 + y^2 = 2x$. Parametrisasi silinder: $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$. Maka $z^2 = 4 - 2x = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$, jadi $z = \pm 2 \sin \frac{t}{2}$. Kurva (dua cabang untuk $0 \le t \le 2\pi$): $\langle 1 + \cos t,\ \sin t,\ 2\sin \frac{t}{2} \rangle$ dan cerminannya di $z \to -z$.

5. Perpotongan versus tabrakan

Dua kurva yang berpotongan di suatu titik belum tentu "bertabrakan". Misalkan dua partikel bergerak sepanjang kurva $\mathbf{r}_1(t)$ dan $\mathbf{r}_2(s)$. Kurva berpotongan bila ada t, s dengan $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(s)$. Partikel *bertabrakan* bila $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$: titik yang sama pada waktu yang sama.

CONTOH 8 — TITIK POTONG DAN TABRAKAN

$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ dan garis sekan $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s,\ 1 + 3s,\ 1 + 7s \rangle$. Samakan: $t = 1 + s$, $t^2 = 1 + 3s$, $t^3 = 1 + 7s$. Dari yang pertama dan kedua: $(1+s)^2 = 1 + 3s \Rightarrow s^2 - s = 0 \Rightarrow s = 0$ atau $s = 1$. Untuk $s = 0$: $t = 1$, dan $t^3 = 1 = 1 + 0$ benar: titik $(1, 1, 1)$. Untuk $s = 1$: $t = 2$, $t^3 = 8 = 1 + 7$ benar: titik $(2, 4, 8)$. Jadi dua titik potong. Tabrakan memerlukan $t = s$: dari $t = 1 + s$ mustahil. Kedua partikel tidak pernah bertabrakan, meskipun jalurnya berpotongan.



Kubik terpilin dan garis sekan yang memotongnya di $(1, 1, 1)$ dan $(2, 4, 8)$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap kurva dan parametrisasinya sama. Kurva adalah himpunan titik; parametrisasi juga menentukan arah dan kecepatan penelusuran.
- Lupa memeriksa daerah asal tiap komponen (akar, logaritma, penyebut).
- Menyamakan perpotongan kurva dengan tabrakan partikel.
- Pada parametrisasi irisan permukaan: mengambil satu proyeksi tetapi lupa memeriksa kedua persamaan permukaan.

7. Ringkasan

- $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$; limit dan kekontinuan dihitung per komponen.
- Kurva penting: garis $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, heliks $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, kubik terpilin $\langle t, t^2, t^3 \rangle$.
- Parametrisasi irisan permukaan: parametrisasikan proyeksi, lalu selesaikan peubah ketiga.
- Perpotongan jalur $\neq$ tabrakan.

Berikutnya 13.2: turunan dan integral fungsi vektor.

13.2 Turunan dan Integral Fungsi Vektor

Kalkulus fungsi vektor berjalan komponen demi komponen, tetapi tafsir geometrisnya penting: turunan $\mathbf{r}'(t)$ adalah vektor singgung pada kurva.

1. Turunan

DEFINISI

Turunan fungsi vektor $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

bila limitnya ada. Bila $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ dengan f, g, h terturunkan, maka

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t),\ g'(t),\ h'(t) \rangle.$$

Tafsir geometris. $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ adalah vektor sekan dari titik $P = \mathbf{r}(t)$ ke $Q = \mathbf{r}(t+h)$. Dibagi h, ia searah sekan; ketika $h \to 0$ arahnya menuju garis singgung. Jadi bila $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{r}'(t)$ **menyinggung kurva di** P, menunjuk ke arah t membesar.

VEKTOR SINGGUNG SATUAN DAN GARIS SINGGUNG

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

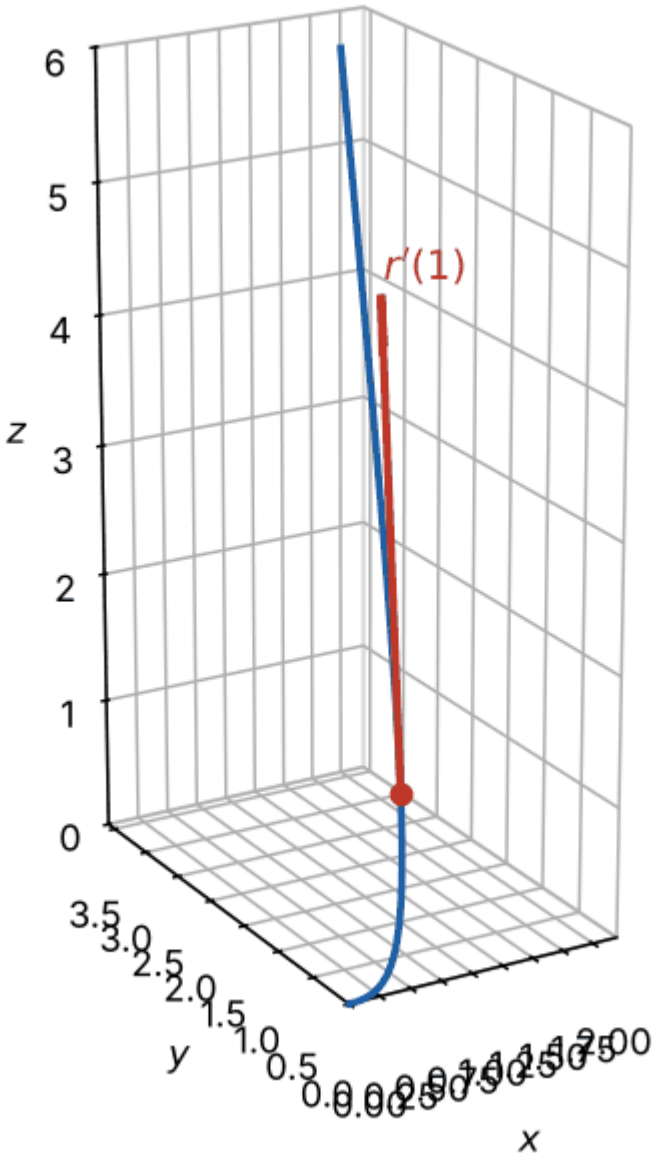
Garis singgung di $\mathbf{r}(t_0)$ adalah garis melalui titik itu dengan arah $\mathbf{r}'(t_0)$: $\mathbf{L}(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\,\mathbf{r}'(t_0)$.

CONTOH 1 — TURUNAN DAN SINGGUNG HELIKS

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$. Di $t = \pi/4$: titik $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, arah $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\rangle$. Garis singgung: $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}(1-s),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+s),\ \frac{\pi}{4}+s \right\rangle$.

CONTOH 2 — SINGGUNG KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Di $t = 1$: titik $(1, 1, 1)$, arah $\langle 1, 2, 3 \rangle$, garis singgung $\langle 1 + s, 1 + 2s, 1 + 3s \rangle$; $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 2, 3 \rangle$.



Vektor singgung $\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ pada kubik terpilin di $(1, 1, 1)$.

CONTOH 3 — SUDUT PERPOTONGAN DUA KURVA

Kurva $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ memotong garis $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s, 1 + 3s, 1 + 7s \rangle$ di $(1, 1, 1)$ ($t = 1$, $s = 0$). Arah singgung: $\mathbf{r}_1'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}_2' = \langle 1, 3, 7 \rangle$. $\cos\theta = \dfrac{1 + 6 + 21}{\sqrt{14}\sqrt{59}} = \dfrac{28}{28{,}74} \approx 0{,}974$, $\theta \approx 13{,}0^\circ$. Sudut antara dua kurva didefinisikan sebagai sudut antara garis singgungnya.

2. Aturan turunan

TEOREMA

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ fungsi vektor terturunkan, c skalar, f fungsi bernilai real. Maka:

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}+\mathbf{v}] = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}] = c\mathbf{u}'$
3. $\dfrac{d}{dt}[f\mathbf{u}] = f'\mathbf{u} + f\mathbf{u}'$
4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$
5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$ (urutan pada hasil kali silang harus dijaga)
6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (aturan rantai)

Bukti aturan 4. Dengan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$: $\frac{d}{dt}\sum u_i v_i = \sum (u_i' v_i + u_i v_i') = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$. Aturan 5 dibuktikan serupa dengan menjabarkan komponen hasil kali silang. ■

CONTOH 4 — HASIL KALI TITIK DAN SILANG

$\mathbf{u} = \langle t, t^2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, t, t^3\rangle$. Maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = t + t^3 + t^3 = t + 2t^3$ dengan turunan $1 + 6t^2$. Dengan aturan 4: $\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' = \langle 1, 2t, 0\rangle\cdot\langle 1, t, t^3\rangle + \langle t, t^2, 1\rangle\cdot\langle 0, 1, 3t^2\rangle = (1 + 2t^2) + (t^2 + 3t^2) = 1 + 6t^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PANJANG KONSTAN BERARTI TEGAK LURUS

Jika $|\mathbf{r}(t)| = c$ konstan, maka $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = c^2$. Turunkan: $2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0$, jadi $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$. Geometrisnya: kurva pada bola berpusat di asal mempunyai singgung yang tegak lurus jari-jari. Hal yang sama berlaku untuk $\mathbf{T}$: karena $|\mathbf{T}| = 1$, maka $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (dipakai di 13.3 untuk vektor normal).

CONTOH 6 — TURUNAN DENGAN ATURAN RANTAI

$\mathbf{u}(t) = \langle t^2, e^t, \sin t\rangle$ dan $f(t) = \ln t$: $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\ln t) = \frac{1}{t}\langle 2\ln t,\ e^{\ln t},\ \cos(\ln t)\rangle = \left\langle \frac{2\ln t}{t},\ 1,\ \frac{\cos\ln t}{t}\right\rangle$.

Turunan orde tinggi

$\mathbf{r}''(t) = \langle f'', g'', h'' \rangle$ adalah turunan dari $\mathbf{r}'$. Untuk kubik terpilin $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6t \rangle$. Vektor $\mathbf{r}''$ akan menjadi percepatan.

Kurva disebut **mulus** bila $\mathbf{r}'$ kontinu dan $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (kecuali mungkin di ujung). Kurva mulus tidak punya sudut tajam atau titik balik tiba-tiba; $\mathbf{T}$ berubah kontinu.

3. Integral

INTEGRAL FUNGSI VEKTOR

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b f\,dt,\ \int_a^b g\,dt,\ \int_a^b h\,dt \right\rangle.$$

Teorema Dasar Kalkulus berlaku: bila $\mathbf{R}' = \mathbf{r}$, maka $\int_a^b \mathbf{r}\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$. Integral tak tentu menghasilkan $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$, dengan $\mathbf{C}$ vektor konstanta.

CONTOH 7 — INTEGRAL TENTU

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \langle \cos t,\ \sin t,\ t \rangle\,dt = \left\langle 1,\ 1,\ \tfrac{\pi^2}{8} \right\rangle$. Sedangkan $\displaystyle\int_0^1 \langle 2t,\ 3t^2,\ e^t \rangle\,dt = \langle 1,\ 1,\ e - 1 \rangle$.

CONTOH 8 — MASALAH NILAI AWAL

Cari $\mathbf{r}(t)$ bila $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\ e^t,\ 1 \rangle$ dan $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 2 \rangle$. Integrasi: $\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ e^t,\ t \rangle + \mathbf{C}$. Di $t = 0$: $\langle 0, 1, 0 \rangle + \mathbf{C} = \langle 1, 0, 2 \rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 1, -1, 2 \rangle$. Jadi $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1,\ e^t - 1,\ t + 2 \rangle$.

CONTOH 9 — DUA KALI INTEGRASI

Percepatan $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, kecepatan awal $\mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, posisi awal $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$. Integrasi pertama: $\mathbf{r}' = \langle 0, 2t, 3t^2 \rangle + \langle 1, 0, 0 \rangle = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Integrasi kedua: $\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle + \langle 0, 1, 2 \rangle = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$.

CONTOH 10 — KETEGAKAN LURUS DAN INTEGRAL

Jika $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle \cdot 3$ (gerak melingkar jari-jari 3), maka $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ untuk semua t, konsisten dengan Contoh 5. Integrasi $\mathbf{r}'$ dari 0 ke 2π memberi $\langle 0, 0 \rangle$: perpindahan total nol karena kembali ke titik awal, tetapi jarak tempuh $\int |\mathbf{r}'| = 6\pi$ (13.3).

4. Kesalahan umum

- Memakai aturan hasil kali silang dengan urutan terbalik: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ bukan $\mathbf{v}' \times \mathbf{u}$.
- Menulis $|\mathbf{r}|' = |\mathbf{r}'|$: umumnya tidak benar. Panjang vektor posisi tidak sama dengan laju.
- Lupa konstanta vektor $\mathbf{C}$ pada integral tak tentu, atau memperlakukannya sebagai skalar.
- Menyatakan $\mathbf{r}'(t)$ singgung padahal $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ (kurva tidak mulus di titik itu).

5. Ringkasan

- $\mathbf{r}' = \langle f', g', h' \rangle$ adalah vektor singgung; $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$.
- Aturan: jumlah, hasil kali dengan skalar, titik, silang, rantai.
- $|\mathbf{r}|$ konstan $\Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{r}'$.
- Integral per komponen; masalah nilai awal memakai konstanta vektor.

Berikutnya 13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan.

13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan

Dua pertanyaan geometris alami pada kurva ruang: *berapa panjangnya?* dan *seberapa tajam ia melengkung?* Jawaban pertama adalah panjang busur; jawaban kedua adalah kelengkungan. Dari keduanya lahir kerangka $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ yang bergerak sepanjang kurva.

1. Panjang busur

PANJANG BUSUR KURVA RUANG

Untuk kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$, $a \le t \le b$, yang ditelusuri tepat satu kali,

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

Gagasan. Bagi $[a, b]$ menjadi selang kecil Δt. Panjang ruas lurus antar titik $\mathbf{r}(t_{i-1})$ dan $\mathbf{r}(t_i)$ adalah $\approx |\mathbf{r}'(t_i)|\Delta t$. Menjumlahkan dan mengambil limit memberi integral. Ini perluasan rumus di bidang (10.2) ke tiga dimensi.

CONTOH 1 — PANJANG SATU PUTARAN HELIKS

$\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$, $0 \le t \le 2\pi$: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi \approx 8{,}886$. Cek geometris: bila silinder dibuka, satu putaran berupa sisi miring segitiga siku-siku dengan alas 2π (keliling) dan tinggi 2π: $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{2}$. Cocok.

CONTOH 2 — KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ tidak punya antiturunan elementer sederhana. Integrasi numerik (Simpson) memberi $L \approx 1{,}863$. Bandingkan jarak lurus dari $(0,0,0)$ ke $(1,1,1)$: $\sqrt{3} \approx 1{,}732 < 1{,}863$, sesuai harapan bahwa kurva lebih panjang dari ruas lurus.

CONTOH 3 — KURVA BIDANG $Y = X^2$

Parametrisasi $\langle t, t^2, 0 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \dfrac{2\sqrt{5} + \sinh^{-1} 2}{4} \approx 1{,}479$.

CONTOH 4 — KURVA LAIN, HASIL TERTUTUP

$\mathbf{r} = \langle 2t,\ t^2,\ \frac{1}{3}t^3 \rangle, 0 \le t \le 3$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2+2)^2} = t^2 + 2$. Maka $L = \int_0^3 (t^2 + 2)\, dt = 9 + 6 = 15$.

2. Fungsi panjang busur dan parametrisasi dengan panjang busur

Fungsi panjang busur dari titik acuan $t = a$:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du, \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Bila $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$, s naik tegas dan dapat dibalik: $t = t(s)$. Kurva yang ditulis dalam s, $\mathbf{r}(t(s))$, disebut **parametrisasi panjang busur**; padanya $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ (laju satu).

CONTOH 5 — HELIKS DENGAN PARAMETER S

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$ dengan acuan $t = 0$: $s = \sqrt{2}\, t \Rightarrow t = s/\sqrt{2}$. Jadi $\mathbf{r}(s) = \left\langle \cos \frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$. Pemeriksaan: $\mathbf{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin, \cos, 1 \rangle$ dan $|\mathbf{r}'(s)| = 1$.

CONTOH 6 — TITIK PADA JARAK TERTENTU

Mulai dari $(1, 0, 0)$ bergerak sejauh 4 satuan sepanjang heliks pada arah t naik. Titiknya $t = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$, yaitu $(\cos 2{,}828,\ \sin 2{,}828,\ 2{,}828) \approx (-0{,}951,\ 0{,}309,\ 2{,}828)$.

3. Kelengkungan

Untuk kurva yang diparametrisasi dengan s, vektor singgung satuan $\mathbf{T}(s)$ berubah arah. Seberapa cepat arahnya berubah per satuan panjang busur adalah kelengkungannya.

KELENGKUNGAN

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Garis lurus: $\mathbf{T}$ konstan, $\kappa = 0$. Lingkaran jari-jari R: $\kappa = 1/R$. **Jari-jari kelengkungan** adalah $\rho = 1/\kappa$.

RUMUS YANG LEBIH PRAKTIS

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Untuk kurva bidang $y = f(x)$: $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}$.

Penurunan rumus $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$. Tulis $\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = v\mathbf{T}$ dengan $v = ds/dt$. Turunkan: $\mathbf{r}'' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Maka $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v\mathbf{T} \times (v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}') = v^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$ karena $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (13.2, Contoh 5), $|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = |\mathbf{T}'|$. Jadi $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = v^2|\mathbf{T}'|$, dan $\kappa = |\mathbf{T}'|/v = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/v^3$. ■

CONTOH 7 — HELIKS

$\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t,\ -\cos t,\ 1\rangle$ (hitung: komponen i: $\cos t \cdot 0 - 1 \cdot (-\sin t) = \sin t$; j: $1 \cdot (-\cos t) - (-\sin t) \cdot 0 = -\cos t$; k: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Panjangnya $\sqrt{2}$; $|\mathbf{r}'|^3 = 2\sqrt{2}$. $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. Umumnya, untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$, $\kappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ konstan. Bila $b = 0$ kembali ke lingkaran: $\kappa = 1/a$.

CONTOH 8 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$

$\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{r}''(1) = \langle 0, 2, 6\rangle$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 12 - 6,\ 0 - 6,\ 2 - 0\rangle = \langle 6, -6, 2\rangle$, panjang $\sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. $|\mathbf{r}'|^3 = 14\sqrt{14}$. $\kappa(1) = \dfrac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}} \approx 0{,}1664$, jari-jari kelengkungan $\approx 6{,}01$.

CONTOH 9 — PARABOLA $Y = X^2$

$f' = 2x$, $f'' = 2$: $\kappa(x) = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$. Di titik puncak $x = 0$: $\kappa = 2$, jari-jari $\frac{1}{2}$ (paling melengkung). Di $x = 1$: $\kappa = 2/5^{3/2} \approx 0{,}1789$. Untuk $|x| \to \infty$, $\kappa \to 0$: parabola makin mendekati lurus.

CONTOH 10 — KELENGKUNGAN MAKSIMUM

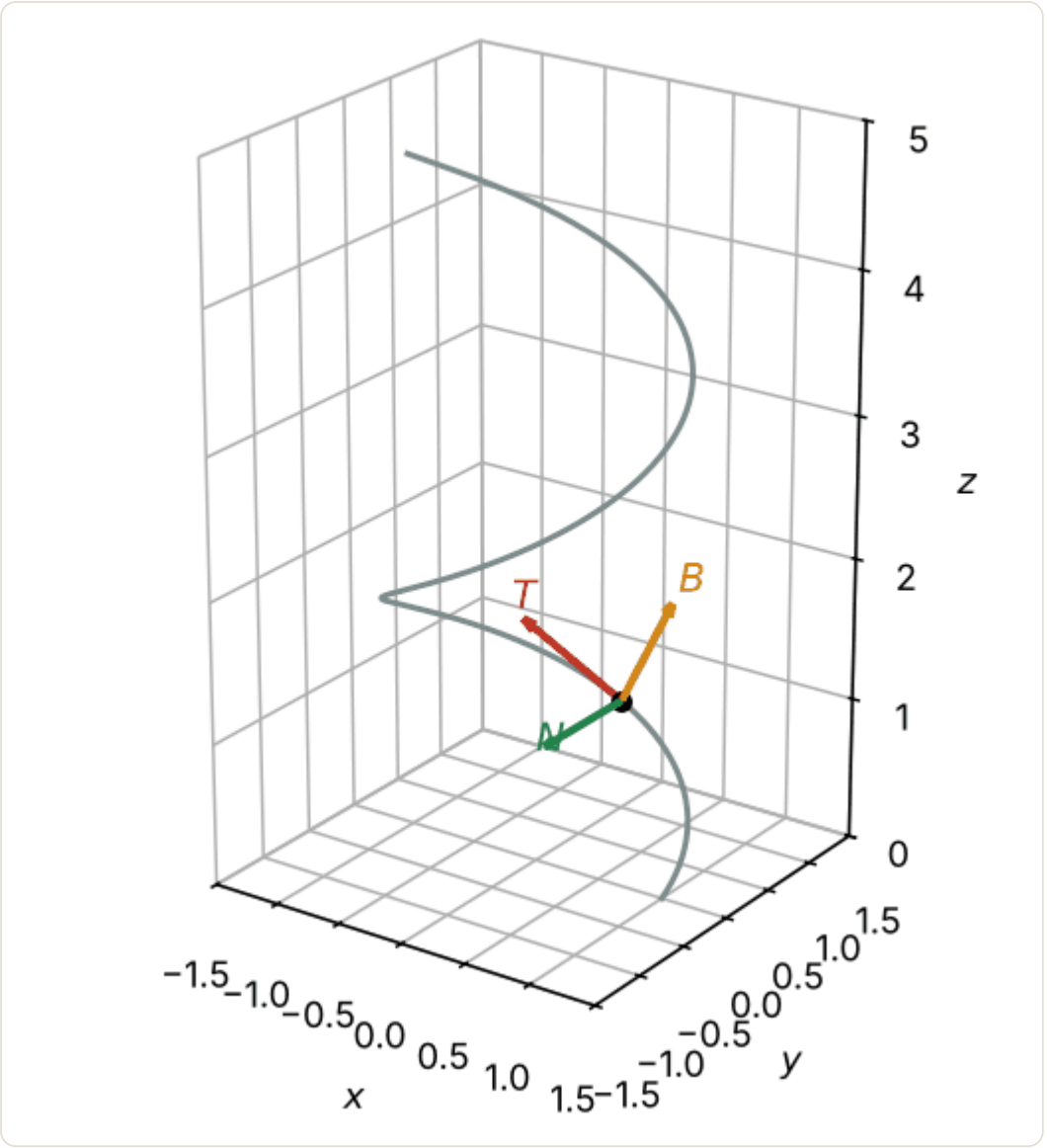
Untuk $y = e^x$: $\kappa = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$. Turunkan: maksimum ketika $1 + e^{2x} = 3e^{2x}$, yaitu $e^{2x} = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}\ln 2 \approx -0{,}347$. Nilainya $\kappa = \dfrac{1/\sqrt{2}}{(3/2)^{3/2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$.

4. Vektor normal dan binormal; bidang oskulasi

KERANGKA TNB

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \ \text{(normal utama)}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \ \text{(binormal)}.$$

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ saling tegak lurus dan satuan; $\mathbf{N}$ menunjuk ke sisi cekung kurva. Bidang yang memuat $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{N}$ adalah **bidang oskulasi** (normalnya $\mathbf{B}$); bidang yang memuat $\mathbf{N}$ dan $\mathbf{B}$ adalah **bidang normal** (normalnya $\mathbf{T}$). **Lingkaran oskulasi** berada di bidang oskulasi, berpusat di sisi $\mathbf{N}$ pada jarak $\rho = 1/\kappa$, dan menyinggung kurva.



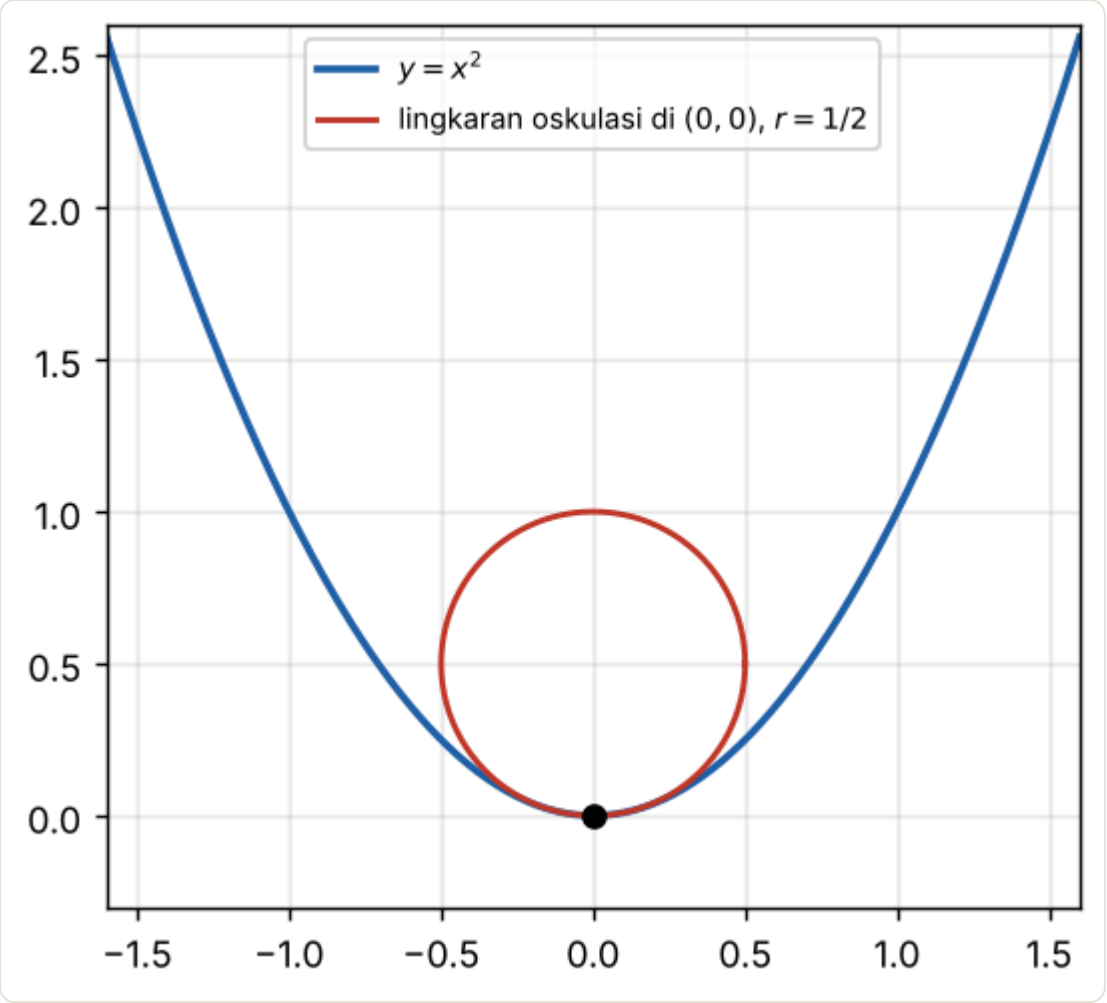
Vektor $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ pada heliks.

CONTOH 11 — TNB HELIKS

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$, $\mathbf{N} = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$ (mengarah ke sumbu silinder). $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \sin t, -\cos t, 1\rangle$. Di $t = 0$: titik $(1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle$; bidang oskulasi: $-y + z = 0$, yaitu $z = y$. Bidang normal (normal $\mathbf{T}(0) \propto \langle 0, 1, 1\rangle$): $y + z = 0$.

CONTOH 12 — LINGKARAN OSKULASI PARABOLA

Di titik puncak parabola $y = x^2$: $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$, $\mathbf{N}$ menunjuk ke atas. Lingkaran oskulasinya berpusat di $(0, \frac{1}{2})$ dengan persamaan $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Lingkaran ini menempel erat pada parabola: keduanya bersinggungan dengan kelengkungan yang sama.



Lingkaran oskulasi parabola $y = x^2$ di titik asal.

5. Torsi (pilihan)

Kelengkungan mengukur pembengkokan kurva dalam bidang oskulasi. **Torsi** τ mengukur seberapa cepat bidang oskulasi itu sendiri berputar (kurva keluar dari bidangnya):

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}.$$

Kurva bidang mempunyai $\tau = 0$. Untuk heliks $\mathbf{r}''' = \langle \sin t, -\cos t, 0 \rangle$ dan $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle$: pembilang $= 1$, penyebut $= 2$, $\tau = \frac{1}{2}$. Untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, $\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

6. Kesalahan umum

- Menyamakan $|\mathbf{r}'|$ dengan 1. Itu hanya benar untuk parametrisasi panjang busur.

- Memakai $|\mathbf{T}'|$ sebagai kelengkungan tanpa membagi dengan $|\mathbf{r}'|$ bila parameter bukan s.
- Mengira κ konstan berarti lingkaran. Heliks juga mempunyai κ konstan.
- Salah memilih arah $\mathbf{N}$: ia selalu menuju sisi cekung, tegak lurus $\mathbf{T}$.

7. Ringkasan

- $L = \int_a^b |\mathbf{r}'|\,dt$; $ds/dt = |\mathbf{r}'|$.
- $\kappa = |\mathbf{T}'|/|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$; untuk $y = f(x)$: $|f''|/(1+f'^2)^{3/2}$.
- $\mathbf{T}, \mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|, \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; bidang oskulasi dan lingkaran oskulasi.
- Torsi mengukur keluarnya kurva dari bidang oskulasi.

Berikutnya 13.4: gerak dalam ruang.

13.4 Gerak dalam Ruang: Kecepatan dan Percepatan

Inilah tujuan fungsi vektor: menggambarkan gerak. Bila $\mathbf{r}(t)$ adalah posisi partikel pada waktu t, maka turunan pertama dan kedua adalah kecepatan dan percepatan.

1. Kecepatan, laju, percepatan

DEFINISI

Untuk partikel dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \ \text{(kecepatan)}, \qquad |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt} \ \text{(laju)}, \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \ \text{(per}$$

Kecepatan adalah vektor singgung ke lintasan, searah gerak; laju adalah skalar ≥ 0. Hukum II Newton: gaya $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

CONTOH 1 — KUBIK TERPILIN SEBAGAI GERAK

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6t \rangle$, laju $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Di $t = 1$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, laju $\sqrt{14} \approx 3{,}742$; $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6 \rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{40} \approx 6{,}325$.

CONTOH 2 — GERAK MELINGKAR BERATURAN

$\mathbf{r}(t) = \langle R\cos\omega t,\ R\sin\omega t \rangle$. $\mathbf{v} = \omega R\langle -\sin\omega t, \cos\omega t \rangle$, laju ωR konstan. $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$: percepatan menuju pusat (sentripetal) dengan besar $\omega^2 R = v^2/R$. Mobil melaju 20 m/s pada tikungan berjari-jari 50 m: $a = 400/50 = 8$ m/s². Meskipun lajunya konstan, percepatan tidak nol karena arah kecepatan berubah.

CONTOH 3 — DARI PERCEPATAN KE POSISI

Percepatan $\mathbf{a}(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, $\mathbf{v}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$ (13.2, Contoh 9) memberi $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ dan $\mathbf{r} = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$. Setelah $t = 2$: posisi $(2, 5, 10)$, kecepatan $\langle 1, 4, 12 \rangle$, laju $\sqrt{161} \approx 12{,}69$.

CONTOH 4 — KAPAN LAJU MINIMUM?

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ t^2 - 4t,\ 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2t,\ 2t - 4,\ 0\rangle$. $|\mathbf{v}|^2 = 4t^2 + (2t-4)^2 = 8t^2 - 16t + 16$. Minimum di $t = 1$: $|\mathbf{v}|^2 = 8$, laju $2\sqrt{2}$. Pada saat itu $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 0\rangle$.

2. Gerak proyektil

Benda dilempar dari titik asal dengan laju awal v_0 dan sudut elevasi α. Satu-satunya percepatan adalah gravitasi: $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ ($g \approx 9{,}8$ m/s²). Integrasi dua kali:

$$\mathbf{v}(t) = \langle v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha - gt\rangle, \qquad \mathbf{r}(t) = \left\langle (v_0\cos\alpha)\,t,\ (v_0\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2\right\rangle.$$

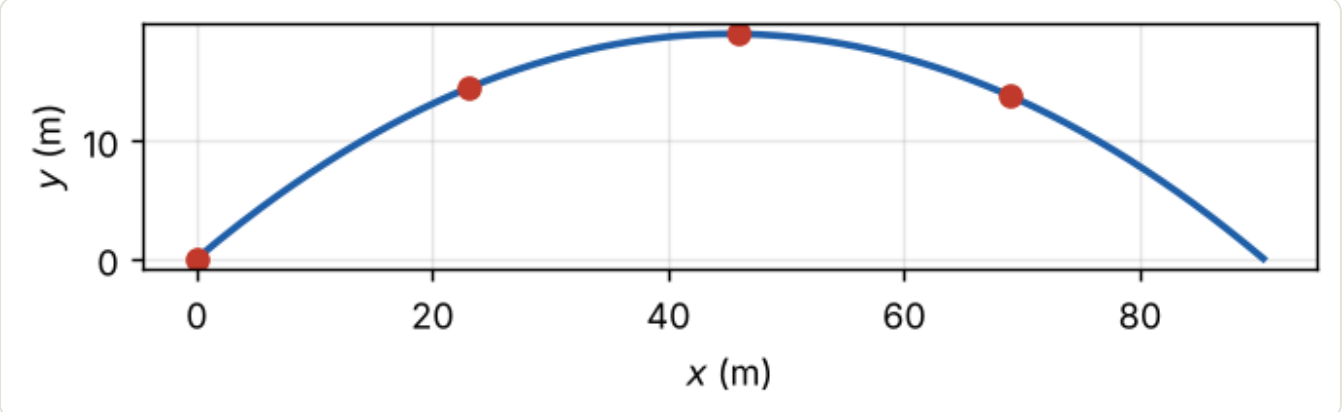
Gerak horizontal beraturan, gerak vertikal berubah beraturan: keduanya bebas satu sama lain.

RUMUS PROYEKTIL (TANAH DATAR)

- Waktu terbang: $T = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.
- Jangkauan: $R = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ (maksimum di $\alpha = 45^\circ$).
- Tinggi maksimum: $H = \dfrac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}$.

CONTOH 5 — BOLA DILEMPAR

$v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$. Komponen awal: $v_0\cos\alpha \approx 22{,}98$, $v_0\sin\alpha \approx 19{,}28$. Waktu terbang $T = 2(19{,}28)/9{,}8 \approx 3{,}94$ s; jangkauan $R = 900\sin 80^\circ/9{,}8 \approx 90{,}4$ m; tinggi maksimum $H = 19{,}28^2/19{,}6 \approx 18{,}97$ m. Laju saat mendarat sama dengan laju awal (30 m/s) karena energi kekal.



Lintasan bola $v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$; titik merah menandai $t = 0, 1, 2, 3$ s.

CONTOH 6 — DUA SUDUT, SATU JANGKAUAN

Dengan $v_0 = 30$ m/s, sudut α dan $90^\circ - \alpha$ memberi jangkauan yang sama ($\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$). Misalnya $\alpha = 20^\circ$ dan 70° keduanya memberi $900 \sin 40^\circ / 9{,}8 \approx 59{,}0$ m, tetapi lintasan 70° jauh lebih tinggi dan lebih lama.

CONTOH 7 — PELUNCURAN DARI KETINGGIAN

Benda dilempar horizontal dari tebing tinggi 45 m dengan laju 12 m/s. Posisi: $\mathbf{r} = \langle 12t,\ 45 - 4{,}9t^2 \rangle$. Menyentuh tanah ketika $45 = 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 3{,}03$ s, jatuh di $x \approx 36{,}4$ m. Kecepatan saat mendarat: $\langle 12, -29{,}7 \rangle$, laju $\approx 32{,}0$ m/s.

3. Komponen tangensial dan normal percepatan

Dari $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ (dengan $v = |\mathbf{v}|$), turunkan: $\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Karena $\mathbf{T}' = \kappa v \mathbf{N}$ (dari definisi $\kappa = |\mathbf{T}'|/v$),

$$\boxed{\mathbf{a} = a_T\,\mathbf{T} + a_N\,\mathbf{N}, \qquad a_T = v' = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}}$$

a_T mengubah *laju* (searah gerak); a_N membelokkan *arah* (menuju sisi cekung). Selalu $a_T^2 + a_N^2 = |\mathbf{a}|^2$. Percepatan berada di bidang oskulasi, tidak punya komponen $\mathbf{B}$.

CONTOH 8 — HELIKS

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 0 = 0$, jadi $a_T = 0$ (laju konstan $\sqrt{2}$). $a_N = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1 = \kappa v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2$. Percepatan $= \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle = \mathbf{N}$, menuju sumbu silinder.

CONTOH 9 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$

$\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6 \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 + 4 + 18 = 22$; $a_T = 22/\sqrt{14} \approx 5{,}880$. $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{76}$, $a_N = \sqrt{76}/\sqrt{14} \approx 2{,}330$. Pemeriksaan: $a_T^2 + a_N^2 \approx 34{,}57 + 5{,}43 = 40 = |\mathbf{a}|^2$.

CONTOH 10 — PROYEKTIL DI TITIK TERTINGGI

Di puncak lintasan, $\mathbf{v} = \langle v_0 \cos\alpha, 0\rangle$ horizontal dan $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ vertikal, sehingga $a_T = 0$ dan $a_N = g$. Kelengkungan di puncak: $\kappa = a_N / v^2 = g/(v_0\cos\alpha)^2$. Untuk Contoh 5: $9{,}8/22{,}98^2 \approx 0{,}01856\ \text{m}^{-1}$; jari-jari kelengkungan $\approx 53{,}9$ m.

4. Hukum-hukum Kepler (gambaran)

Kepler merumuskan tiga hukum gerak planet; Newton menurunkannya dari hukum gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$. Intinya: (1) planet bergerak pada elips dengan Matahari di salah satu fokus; (2) vektor posisi dari Matahari menyapu luas sama dalam waktu sama; (3) kuadrat periode sebanding pangkat tiga setengah sumbu panjang.

Hukum kedua adalah akibat langsung kalkulus vektor. Gaya sentral $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ memberi $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Karena $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$, vektor momentum sudut per massa, $\mathbf{h} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}$, konstan. Maka $\mathbf{r}$ dan $\mathbf{v}$ selalu terletak pada satu bidang tetap (gerak planar), dan luas yang disapu per waktu, $\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$, konstan.

CONTOH 11 — HUKUM KETIGA KEPLER PADA SATELIT

Bila periode T dan setengah sumbu panjang a maka T^2/a^3 sama untuk semua benda yang mengorbit pusat yang sama. Satelit yang jari-jari orbitnya dua kali orbit satelit lain mempunyai periode $2^{3/2} \approx 2{,}83$ kali lebih besar.

5. Kesalahan umum

- Mengira laju konstan berarti percepatan nol. Pada gerak melingkar $a_N \neq 0$.
- Menyamakan $|\mathbf{a}|$ dengan dv/dt: $dv/dt = a_T$, bukan $|\mathbf{a}|$.
- Pada proyektil, menaruh g di komponen x atau lupa tanda negatif pada $\frac{1}{2}gt^2$.
- Memakai sudut dalam derajat pada kalkulator berbasis radian, atau sebaliknya.

6. Ringkasan

- $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$, laju $= |\mathbf{v}|$, $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$; integrasi dari percepatan memakai kondisi awal.
- Proyektil: $\mathbf{r} = \langle v_0\cos\alpha\, t,\ v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2\rangle$; T, R, H seperti di atas.

- $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ dengan $a_T = v'$, $a_N = \kappa v^2$.
- Gaya sentral $\Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ konstan (hukum luas Kepler).

Bab 13 selesai. Bab berikutnya, 14.1, memperluas kalkulus ke fungsi dua peubah atau lebih.