Bab 12: Vektor dan Geometri Ruang

Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.1 Sistem Koordinat Tiga Dimensi

Sampai Bab 11 kita bekerja di bidang (dua dimensi). Dunia nyata tiga dimensi: posisi satelit, aliran udara, permukaan gunung. Untuk membahas kalkulus di ruang kita perlu **sistem koordinat tiga dimensi**, yaitu satu sumbu tambahan, serta rumus jarak dan persamaan permukaan sederhana.

1. Sumbu dan bidang koordinat

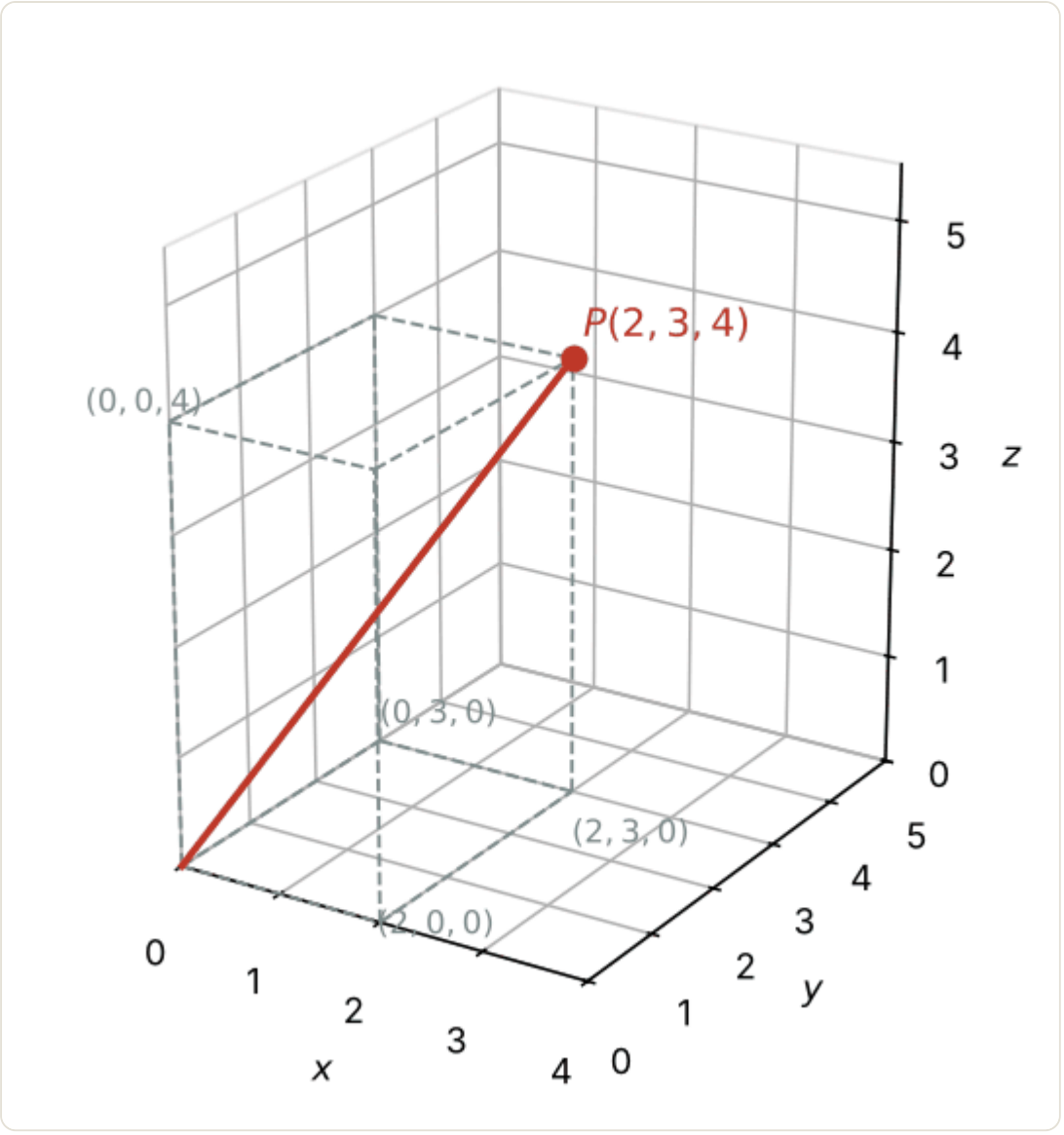
Untuk menentukan posisi titik di bidang diperlukan dua bilangan (x, y). Di ruang kita perlu tiga bilangan. Pilih titik asal O dan tiga garis berarah saling tegak lurus yang melalui O: **sumbu** x, **sumbu** y, dan **sumbu** z. Dengan konvensi **kaidah tangan kanan**: bila jari-jari tangan kanan melengkung dari sumbu x positif ke sumbu y positif, ibu jari menunjuk ke arah sumbu z positif.

Setiap pasang sumbu menentukan sebuah **bidang koordinat**:

- bidang xy (persamaan $z = 0$),
- bidang yz (persamaan $x = 0$),
- bidang xz (persamaan $y = 0$).

Ketiga bidang ini membagi ruang menjadi **delapan oktan**. Oktan pertama adalah oktan dengan $x, y, z > 0$.

Titik P memiliki koordinat (a, b, c): a adalah jarak berarah dari bidang yz, b dari bidang xz, dan c dari bidang xy. Kita menggambar P sebagai sudut dari balok persegi panjang dengan satu sudut di O.



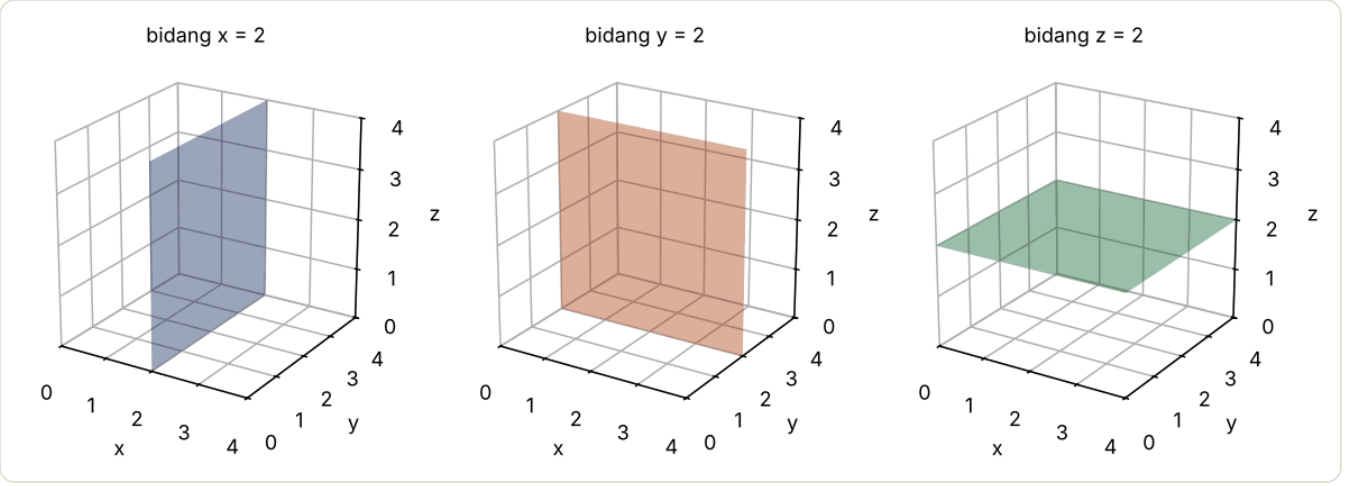
Titik $P(2, 3, 4)$: balok yang sudut-sudutnya O dan P, dengan proyeksi pada sumbu dan bidang koordinat.

PROYEKSI SEBUAH TITIK

Untuk $P(a, b, c)$: proyeksi pada bidang xy adalah $(a, b, 0)$, pada bidang yz adalah $(0, b, c)$, pada bidang xz adalah $(a, 0, c)$, dan pada sumbu x adalah $(a, 0, 0)$. Cerminan terhadap bidang xy: $(a, b, -c)$; terhadap sumbu z: $(-a, -b, c)$; terhadap titik asal: $(-a, -b, -c)$.

2. Persamaan sederhana di ruang

Di bidang, persamaan $x = 2$ adalah garis. Di ruang, $x = 2$ adalah himpunan semua titik $(2, y, z)$: sebuah **bidang** yang sejajar bidang yz, berjarak 2 darinya. Jadi arti persamaan bergantung pada dimensi ruangnya.



Bidang $x = 2$, $y = 2$, dan $z = 2$ di ruang.

CONTOH 1 — ARTI PERSAMAAN DI $\mathbb{R}^2$ DAN $\mathbb{R}^3$

- $x = 5$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis vertikal; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang sejajar bidang yz.
- $y = x$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang yang memuat sumbu z (semua (x, x, z)).
- $z = 0$: bidang xy.
- $\{x = 2,\ y = 3\}$: irisan dua bidang, yaitu garis sejajar sumbu z yang melalui $(2, 3, 0)$.

CONTOH 2 — HIMPUNAN TITIK DARI PERTIDAKSAMAAN

Himpunan $\{(x, y, z) :\ 0 \le z \le 1\}$ adalah daerah di antara bidang $z = 0$ dan $z = 1$ (lapisan tak hingga). Himpunan $\{(x, y, z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ adalah oktan pertama. Himpunan $\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}$ adalah cakram satuan di bidang xy.

3. Jarak antara dua titik

Di bidang, $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dari Teorema Pythagoras. Di ruang, kita memakai Pythagoras dua kali.

RUMUS JARAK

Jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Penurunan. Bangun balok dengan P_1 dan P_2 sebagai sudut berseberangan dan rusuk-rusuk sejajar sumbu. Misalkan $B(x_2, y_2, z_1)$, yaitu titik pada balok yang satu bidang datar dengan P_1 dan tepat di bawah (atau di atas) P_2. Segitiga P_1BP_2 siku-siku di B dengan $|P_1B| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (diagonal alas, Pythagoras pertama) dan $|BP_2| = |z_2 - z_1|$. Pythagoras memberi $|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 3 — JARAK DUA TITIK

Jarak antara $P_1(2, -1, 7)$ dan $P_2(1, -3, 5)$: $\sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$. Titik tengahnya $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2, 6\right)$.

CONTOH 4 — JENIS SEGITIGA

Titik $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$: $|PQ| = \sqrt{16+4+16} = 6$, $|PR| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|QR| = \sqrt{36+4+0} = \sqrt{40}$. Dua sisi sama panjang, jadi segitiga sama kaki. Sudut siku-siku? $6^2 + 6^2 = 72 \neq 40$, jadi bukan segitiga siku-siku.

CONTOH 5 — APAKAH TIGA TITIK SEGARIS?

Titik $A(1, 2, 3)$, $B(3, 6, 7)$, $C(2, 4, 5)$: $|AB| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|AC| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|BC| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Karena $|AC| + |CB| = |AB|$, ketiganya segaris dengan C di antara A dan B (dan memang C adalah titik tengah AB).

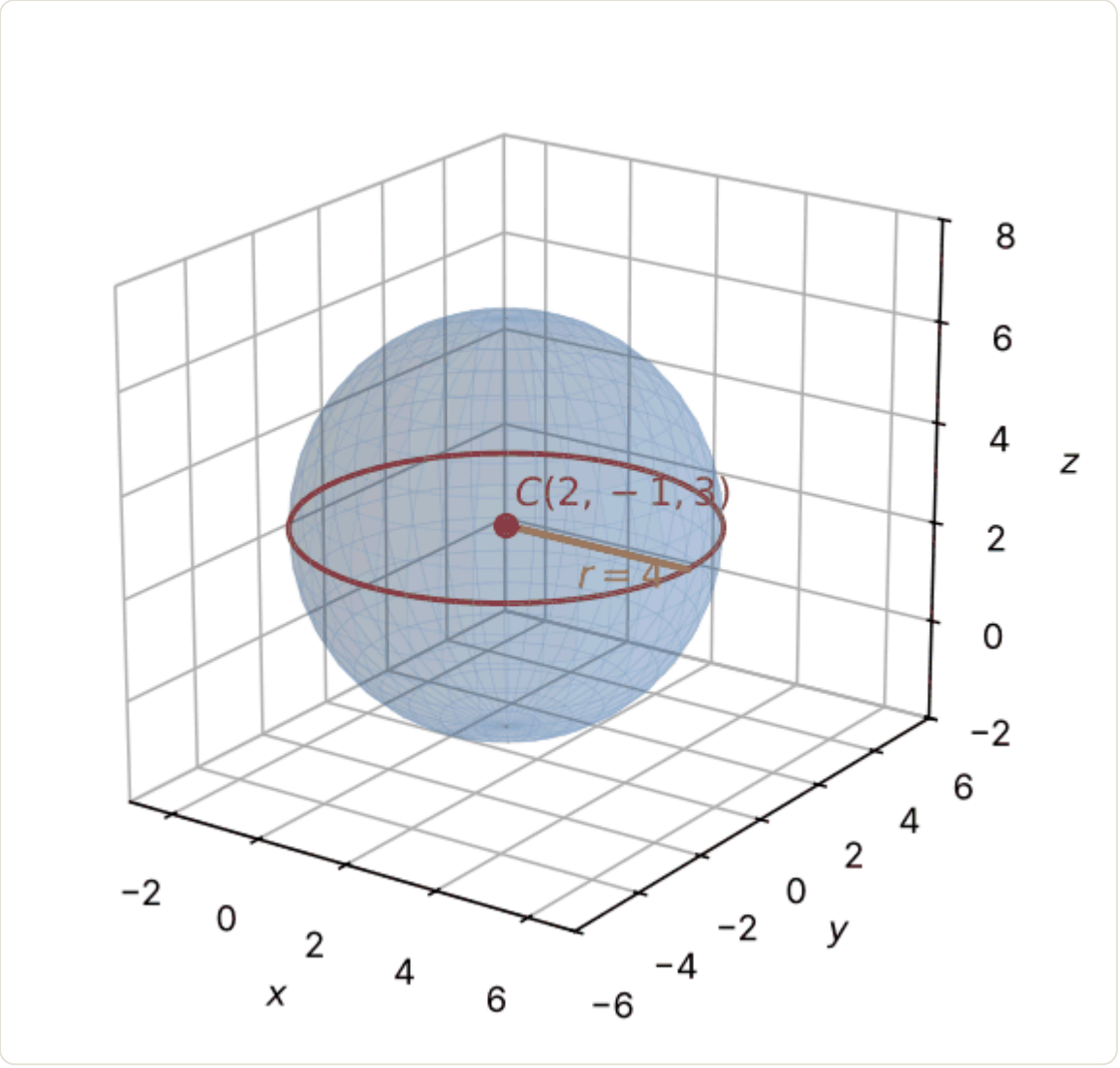
4. Persamaan bola

DEFINISI DAN PERSAMAAN

Bola dengan pusat $C(h, k, l)$ dan jari-jari r adalah himpunan semua titik $P(x, y, z)$ dengan $|PC| = r$. Mengkuadratkan rumus jarak,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

Khususnya bola berpusat di titik asal: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



Bola berpusat di C dengan jari-jari r; kurva merah adalah lingkaran besar pada bidang yang melalui pusat.

CONTOH 6 — DARI PERSAMAAN UMUM KE PUSAT DAN JARI-JARI

Tunjukkan $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$ adalah bola. Lengkapkan kuadrat: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 2z + 1) = 11 + 9 + 4 + 1$, yaitu

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25.$$

Pusat $(3, -2, 1)$, jari-jari 5.

CONTOH 7 — BOLA DENGAN DIAMETER DIBERIKAN

Bola dengan diameter dari $A(1, 2, 3)$ ke $B(5, 2, -1)$: pusat adalah titik tengah $(3, 2, 1)$; jari-jari $= \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 16} = 2\sqrt{2}$. Persamaan $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

CONTOH 8 — IRISAN BOLA DENGAN BIDANG KOORDINAT

Bola $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ dipotong bidang $z=0$: $(x-3)^2+(y+2)^2+1=25$, yaitu $(x-3)^2+(y+2)^2=24$, lingkaran berjari-jari $2\sqrt{6}$ pusat $(3,-2)$. Dipotong bidang $y=3$: $(x-3)^2+25+(z-1)^2=25 \Rightarrow (x-3)^2+(z-1)^2=0$, satu titik saja $(3,3,1)$; bidang $y=3$ menyinggung bola (jarak 5 dari pusat sama dengan jari-jari).

CONTOH 9 — DAERAH DI ANTARA DUA BOLA

$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ adalah kulit bola tebal: semua titik yang berjarak antara 1 dan 2 dari titik asal. $x^2+y^2+z^2 < 0{,}25$ adalah bagian dalam bola berjari-jari $\frac{1}{2}$ (tanpa permukaannya). Himpunan $\{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$ adalah belahan atas bola padat berjari-jari 2.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x=2$ selalu garis. Di ruang 3D ia bidang.
- Lupa suku $(z_2-z_1)^2$ pada rumus jarak.
- Pada persamaan bola, lupa melengkapkan kuadrat untuk semua tiga peubah, atau salah tanda pusat: $(x+2)^2$ berarti pusat di $x=-2$.
- Menggambar sumbu z ke bawah (melanggar kaidah tangan kanan).

6. Ringkasan

- Titik di ruang: (x,y,z); tiga bidang koordinat, delapan oktan; kaidah tangan kanan.
- Jarak: $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$; titik tengah: rata-rata koordinat.
- Bola: $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$.
- Persamaan satu peubah (mis. $x=c$) berupa bidang di ruang.

Subbab berikutnya, 12.2, memperkenalkan vektor.

12.2 Vektor

Sebagian besar besaran fisika dapat diterangkan dengan satu bilangan: suhu, massa, panjang. Besaran seperti ini disebut **skalar**. Namun ada besaran yang memerlukan juga *arah*: perpindahan, kecepatan, gaya. Besaran itu dimodelkan oleh **vektor**.

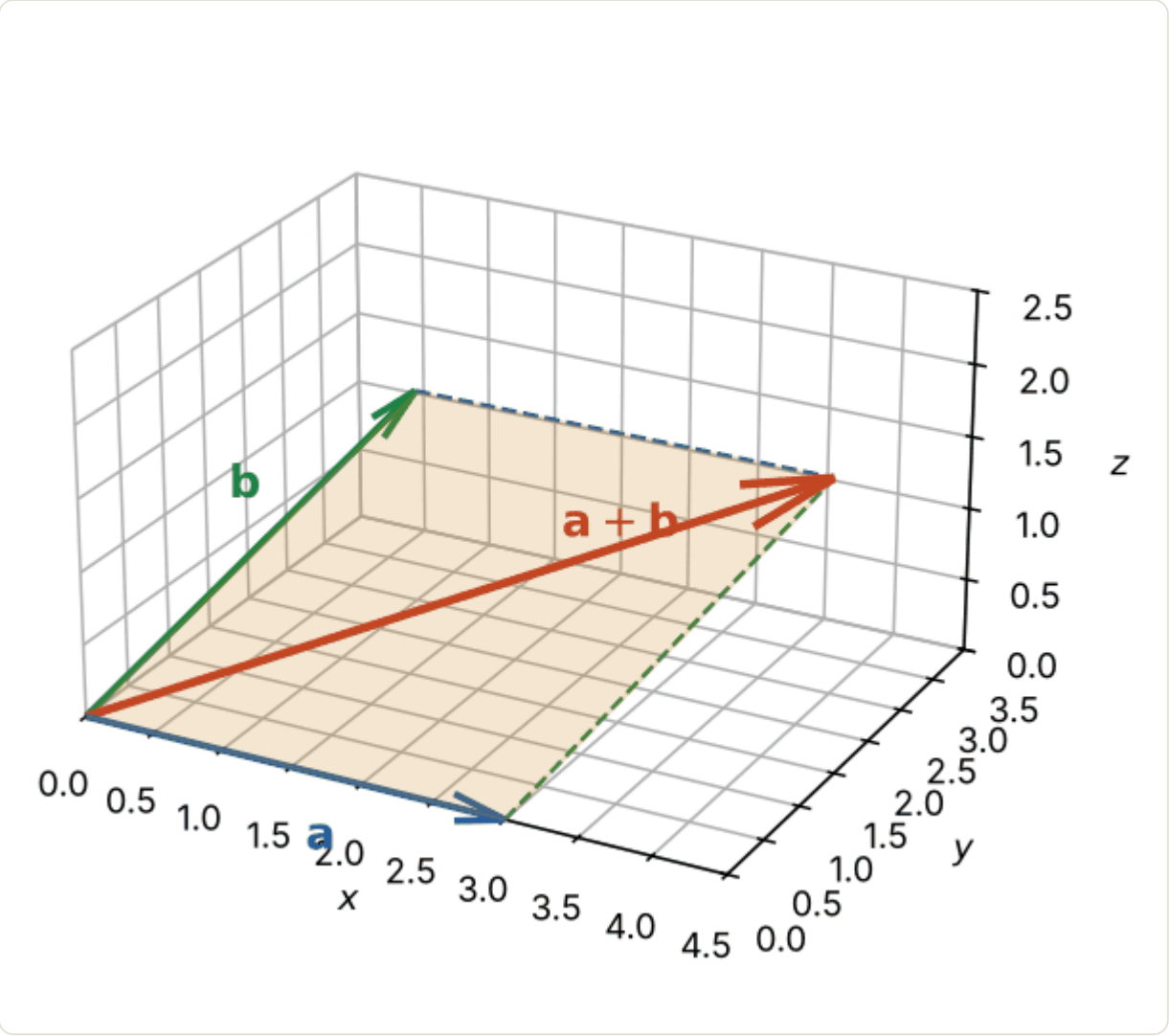
1. Vektor secara geometris

> **DEFINISI**
>
> **Vektor** adalah besaran yang mempunyai *besar* (panjang) dan *arah*. Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah (panah) dari **titik awal** A ke **titik akhir** B, ditulis $\overrightarrow{AB}$. Dua vektor **sama** bila besar dan arahnya sama, walaupun posisinya berbeda. Vektor nol $\mathbf{0}$ mempunyai panjang 0 dan tidak mempunyai arah tertentu.

Huruf tebal ($\mathbf{a}$) atau tanda panah ($\vec{a}$) dipakai untuk vektor; panjangnya ditulis $|\mathbf{a}|$.

Penjumlahan: aturan segitiga dan jajargenjang

Untuk menjumlahkan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$: letakkan titik awal $\mathbf{b}$ di titik akhir $\mathbf{a}$; vektor dari titik awal $\mathbf{a}$ ke titik akhir $\mathbf{b}$ adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Hasil yang sama diperoleh dengan membuat jajargenjang dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ yang titik awalnya berimpit: diagonalnya adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Jadi $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.



$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sebagai diagonal jajargenjang.

Perkalian dengan skalar

Untuk skalar c dan vektor $\mathbf{a}$: $c\mathbf{a}$ mempunyai panjang $|c||\mathbf{a}|$ dan searah $\mathbf{a}$ bila $c > 0$, berlawanan arah bila $c < 0$. Dua vektor tak nol **sejajar** bila yang satu kelipatan skalar yang lain. Pengurangan: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

2. Vektor dalam komponen

Letakkan titik awal vektor di titik asal. Titik akhirnya (a_1, a_2, a_3) menentukan vektor itu, yang ditulis

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle.$$

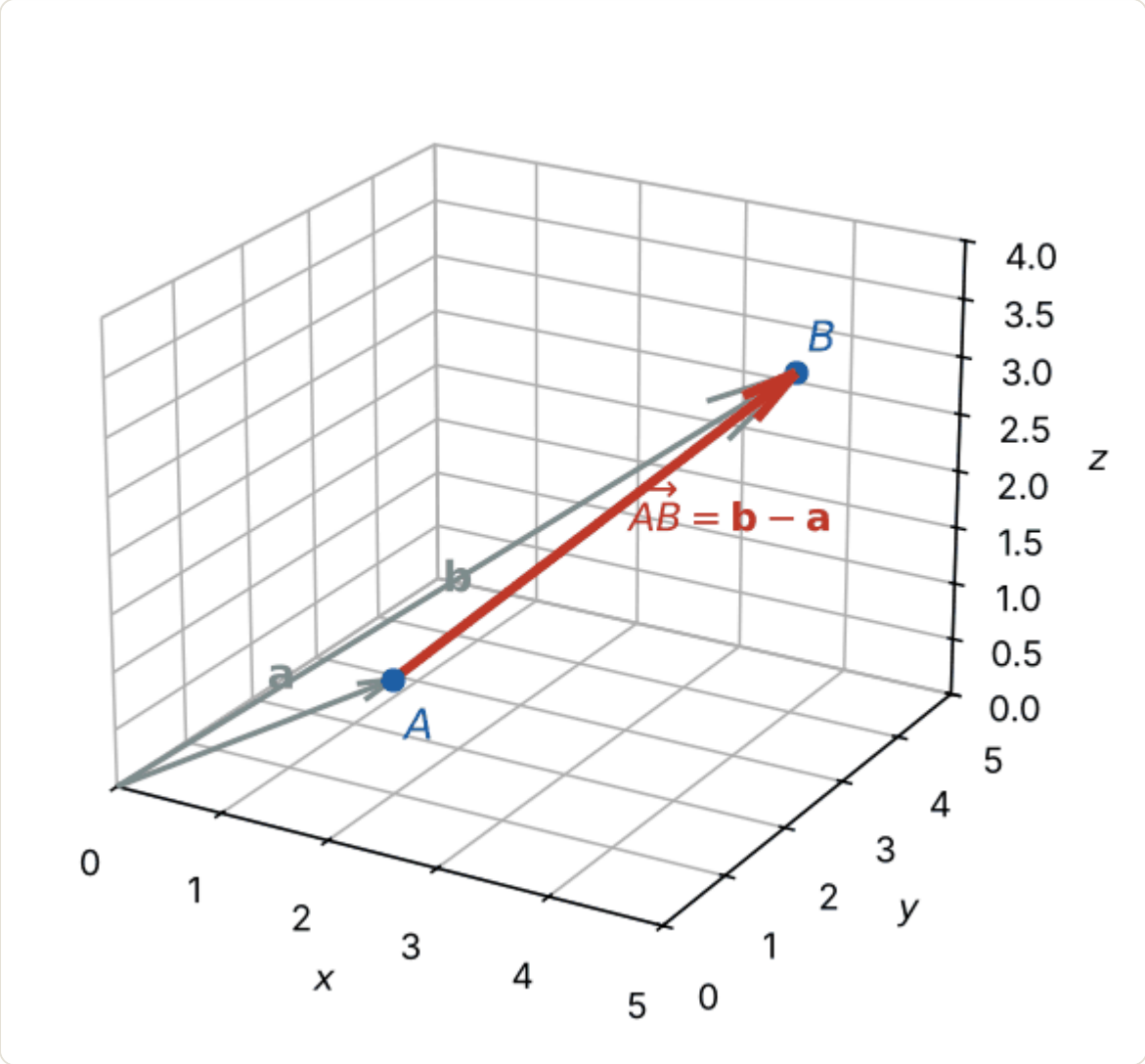
Bilangan a_1, a_2, a_3 adalah **komponen** $\mathbf{a}$. Vektor ini disebut **vektor posisi** titik (a_1, a_2, a_3).

VEKTOR ANTARA DUA TITIK

Untuk $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1 \rangle.$$

(Titik akhir dikurangi titik awal.) Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektor posisi A, B, maka $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Aljabar vektor

Dengan $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, c skalar:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle, \qquad c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle.$$

Panjang (besar) vektor, dari rumus jarak:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

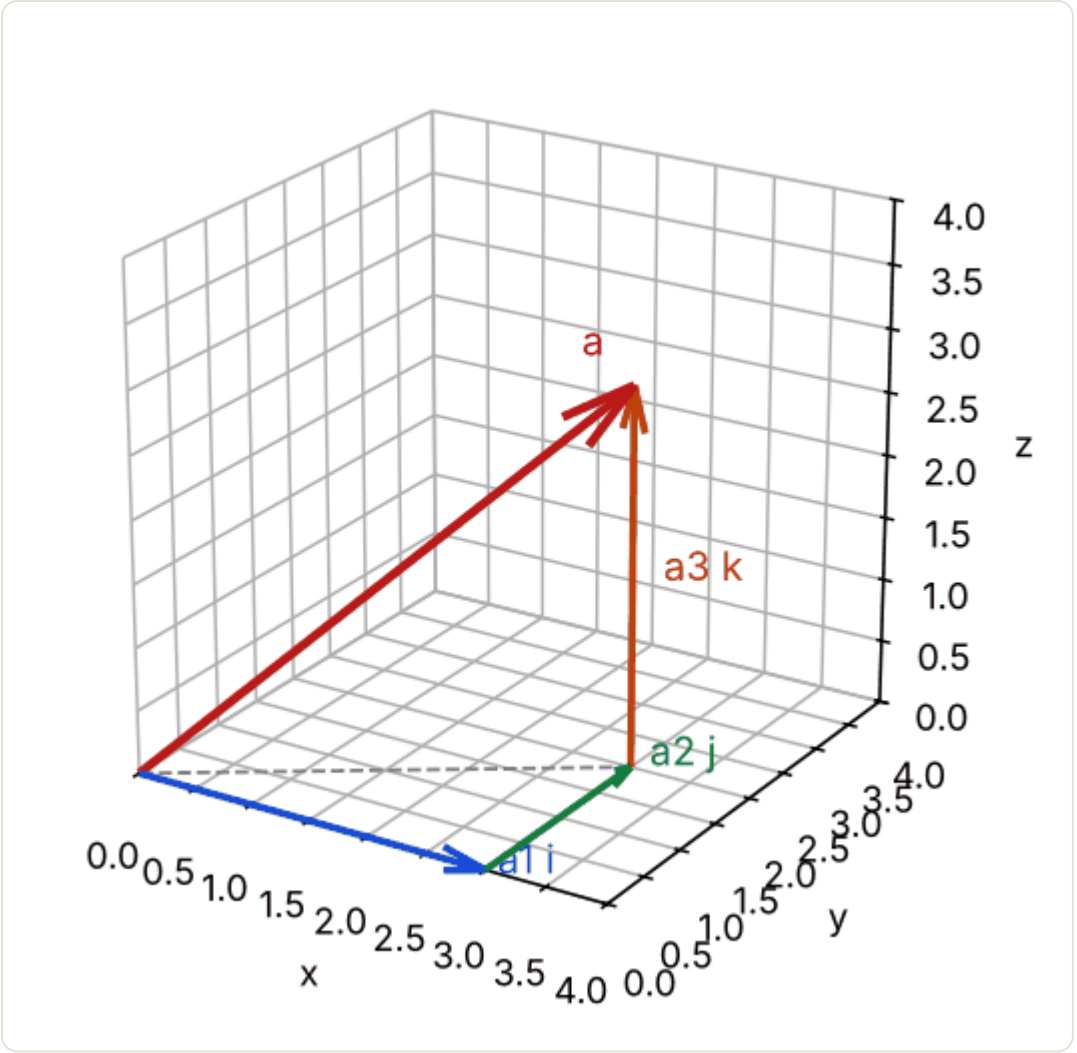
Sifat-sifat: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$, $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$, $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Semuanya mengikuti dari sifat bilangan real pada tiap komponen.

Vektor basis standar

Tiga vektor satuan sepanjang sumbu:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Setiap vektor ditulis tunggal sebagai kombinasi linear: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.



$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$: jumlah tiga vektor sepanjang sumbu.

Vektor satuan

Vektor satuan adalah vektor dengan panjang 1. Untuk $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ (mengalikan dengan $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ mengubah panjang menjadi 1 tanpa mengubah arah).

3. Contoh

CONTOH 1 — OPERASI DASAR

$\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4, -2\rangle$. Maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = \langle 6 - 3,\ -2 - 12,\ 4 + 6\rangle = \langle 3, -14, 10\rangle$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{21}$.

CONTOH 2 — VEKTOR SATUAN

Vektor satuan searah $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$: $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle \approx \langle 0{,}802, -0{,}267, 0{,}535\rangle$. Vektor dengan panjang 6 searah $\mathbf{a}$: $\dfrac{6}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle$.

CONTOH 3 — VEKTOR DARI DUA TITIK

$A(1, 2, -1)$, $B(4, 0, 3)$: $\overrightarrow{AB} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $|AB| = \sqrt{29}$. Titik yang membagi AB dengan perbandingan $1 : 2$ dari A: $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(2,\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

CONTOH 4 — APAKAH SEJAJAR?

$\langle 2, -4, 6\rangle$ dan $\langle -1, 2, -3\rangle$: yang pertama $= -2\cdot$yang kedua, jadi sejajar (berlawanan arah). $\langle 1, 2, 3\rangle$ dan $\langle 2, 4, 7\rangle$: perbandingan komponen $2, 2, \frac{7}{3}$ tidak sama, tidak sejajar.

CONTOH 5 — PUSAT SEGITIGA (TITIK BERAT)

Titik berat segitiga ABC dengan vektor posisi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ adalah $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Untuk $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$: $\mathbf{g} = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\rangle$.

4. Penerapan: gaya dalam keseimbangan

Gaya adalah vektor; gaya total pada benda adalah jumlah vektor semua gaya. Benda dalam keseimbangan bila jumlah gayanya nol.

CONTOH 6 — DUA KABEL MENAHAN BEBAN

Beban 100 N digantung pada dua kabel yang membentuk sudut 50° dan 32° terhadap garis datar (kabel pertama ke kiri, kedua ke kanan). Misalkan tegangan T_1 dan T_2. Keseimbangan komponen:

$$\text{horizontal: } -T_1\cos 50^\circ + T_2\cos 32^\circ = 0, \qquad \text{vertikal: } T_1\sin 50^\circ + T_2\sin 32^\circ =$$

Dari persamaan pertama $T_2 = T_1\dfrac{\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}$. Substitusi: $T_1\left(\sin 50^\circ + \cos 50^\circ \tan 32^\circ\right) = 100$, sehingga $T_1 \approx 85{,}6$ N dan $T_2 \approx 64{,}9$ N. Kabel yang lebih curam menanggung gaya lebih besar.

CONTOH 7 — KECEPATAN PESAWAT DAN ANGIN

Pesawat terbang dengan kecepatan udara $\langle 0, 200\rangle$ km/jam (ke utara) dan angin $\langle 60, 0\rangle$ (ke timur). Kecepatan terhadap tanah adalah jumlahnya, $\langle 60, 200\rangle$, dengan laju $\sqrt{3600 + 40000} = 208{,}8$ km/jam, arah menyimpang $\arctan\frac{60}{200} \approx 16{,}7^\circ$ ke timur dari utara.

5. Kesalahan umum

- Menulis $\overrightarrow{AB} = A - B$. Yang benar: titik akhir dikurangi titik awal.
- Mengira $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Yang benar hanya $\le$ (ketaksamaan segitiga), sama bila searah.
- Menyamakan titik (a, b, c) dengan vektor $\langle a, b, c\rangle$: berhubungan tetapi berbeda (titik vs perpindahan).
- Lupa mengubah arah/sudut ke komponen saat bekerja dengan gaya.

6. Ringkasan

- Vektor: besar dan arah; komponen $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$; $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- Penjumlahan dan perkalian skalar bekerja per komponen; $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ basis standar; vektor satuan $= \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.
- Keseimbangan gaya: jumlah komponen sama dengan nol.

Berikutnya 12.3 Hasil Kali Titik.

12.3 Hasil Kali Titik

Sampai di sini kita sudah bisa menjumlahkan vektor dan mengalikannya dengan skalar. Bagaimana dengan *mengalikan dua vektor*? Ada dua cara yang bermakna: hasil kali titik (hasilnya skalar), dibahas di sini, dan hasil kali silang (hasilnya vektor), dibahas di 12.4.

1. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali titik** (*dot product*, atau hasil kali skalar) adalah bilangan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

(Di dua dimensi: $a_1 b_1 + a_2 b_2$.)

CONTOH 1

$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 6 - 4 = 2$. $\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \rangle = -6 + 14 - 2 = 6$. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0 + 4 + 3 = 7$.

Sifat-sifat

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Semuanya terbukti dengan menjabarkan menjadi komponen.

2. Sudut antara dua vektor

Hasil kali titik sangat berguna karena memiliki tafsiran geometris. **Sudut antara** dua vektor tak nol $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah sudut θ ($0 \le \theta \le \pi$) di antara keduanya bila titik awalnya berimpit.

TEOREMA

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta.$$

Akibatnya $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

Bukti

Bentuk segitiga dengan sisi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Hukum kosinus: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. Di sisi lain, dengan sifat 1 sampai 3,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

Samakan kedua ungkapan: $-2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. $\blacksquare$

CONTOH 2 — SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

$\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 - 6 - 2 = 2$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{38}$. $\cos\theta = \dfrac{2}{3\sqrt{38}} \approx 0{,}108$, $\theta \approx 83{,}8^\circ$.

CONTOH 3 — SUDUT DALAM SEGITIGA

Titik $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Sudut di A: $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 1, 0\rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle -1, 0, 1\rangle$, dot $= 1$, panjang masing-masing $\sqrt{2}$: $\cos A = \tfrac{1}{2}$, $A = 60^\circ$. Segitiga sama sisi, jadi semua sudutnya 60°.

Tegak lurus dan sejajar

Karena $\cos\theta = 0 \iff \theta = \tfrac{\pi}{2}$:

AKIBAT

Dua vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **ortogonal** (tegak lurus) bila dan hanya bila $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. (Vektor nol dianggap ortogonal ke semua vektor.) Sejajar searah: $\cos\theta = 1$; berlawanan arah: $\cos\theta = -1$.

CONTOH 4 — UJI ORTOGONAL

$\langle 2,2,-1\rangle \cdot \langle 5,-4,2\rangle = 10-8-2 = 0$: tegak lurus. Cari t supaya $\langle t,2,-1\rangle \perp \langle 3,t,4\rangle$: $3t+2t-4=0 \Rightarrow t = \frac{4}{5}$.

TANDA DOT PRODUCT MEMBERI JENIS SUDUT

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$: sudut lancip; $= 0$: siku-siku; < 0: sudut tumpul.

3. Sudut dan kosinus arah

Sudut yang dibentuk $\mathbf{a}$ dengan sumbu x, y, z positif adalah **sudut arah** α, β, γ. Dari $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = a_1$ diperoleh

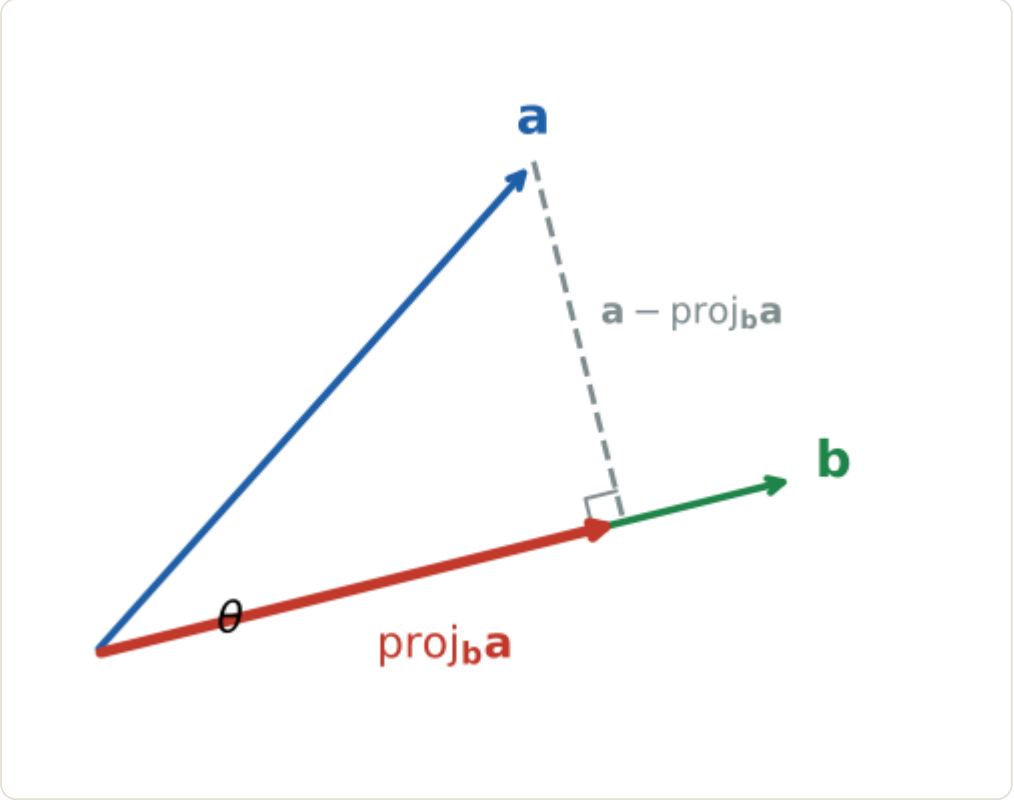
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$.

CONTOH 5

$\mathbf{a} = \langle 1,2,3\rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 74{,}5^\circ$, $\beta \approx 57{,}7^\circ$, $\gamma \approx 36{,}7^\circ$. Cek: $\frac{1+4+9}{14} = 1$ ✓.

4. Proyeksi



Proyeksi skalar dan vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$; $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Jatuhkan garis tegak lurus dari ujung $\mathbf{a}$ ke garis yang memuat $\mathbf{b}$. Panjang bayangan $\mathbf{a}$ pada arah $\mathbf{b}$ adalah $|\mathbf{a}|\cos\theta$.

DEFINISI

Untuk $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:

$$\text{proyeksi skalar (komponen)}\ \ \text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \qquad \text{proyeksi vektor}\ \ \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot}{|\mathbf{b}}$$

Vektor $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Pemeriksaan ortogonalitas: $\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. ✓

CONTOH 6 — PROYEKSI

$\mathbf{a} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 2\rangle$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15$, $|\mathbf{b}|^2 = 30$. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{\sqrt{30}} \approx 2{,}739$. $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{30}\mathbf{b} = \langle 2{,}5, -0{,}5, 1\rangle$. Komponen tegak lurus: $\mathbf{a} - \text{proj} = \langle -0{,}5, 3{,}5, 3\rangle$, dan dot dengan $\mathbf{b}$: $-2{,}5 - 3{,}5 + 6 = 0$ ✓.

CONTOH 7 — JARAK TITIK KE GARIS (DI BIDANG)

Jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $ax + by + c = 0$ adalah $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Turunan: vektor $\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$ tegak lurus garis. Ambil sembarang titik $P_0(x_0, y_0)$ pada garis; jaraknya $= |\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_0P}| = \dfrac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, dan $ax_0 + by_0 = -c$. Contoh: titik $(3, 4)$ ke garis $3x - 4y + 5 = 0$: $\frac{|9 - 16 + 5|}{5} = \frac{2}{5}$.

CONTOH 8 — KETAKSAMAAN CAUCHY–SCHWARZ

Karena $|\cos\theta| \le 1$, selalu berlaku $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Akibatnya ketaksamaan segitiga $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$.

5. Kerja (usaha) oleh gaya

Bila gaya konstan $\mathbf{F}$ memindahkan benda sepanjang perpindahan $\mathbf{D}$, kerja yang dilakukan adalah komponen gaya sepanjang perpindahan dikali jarak:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta.$$

CONTOH 9 — MENARIK KERETA

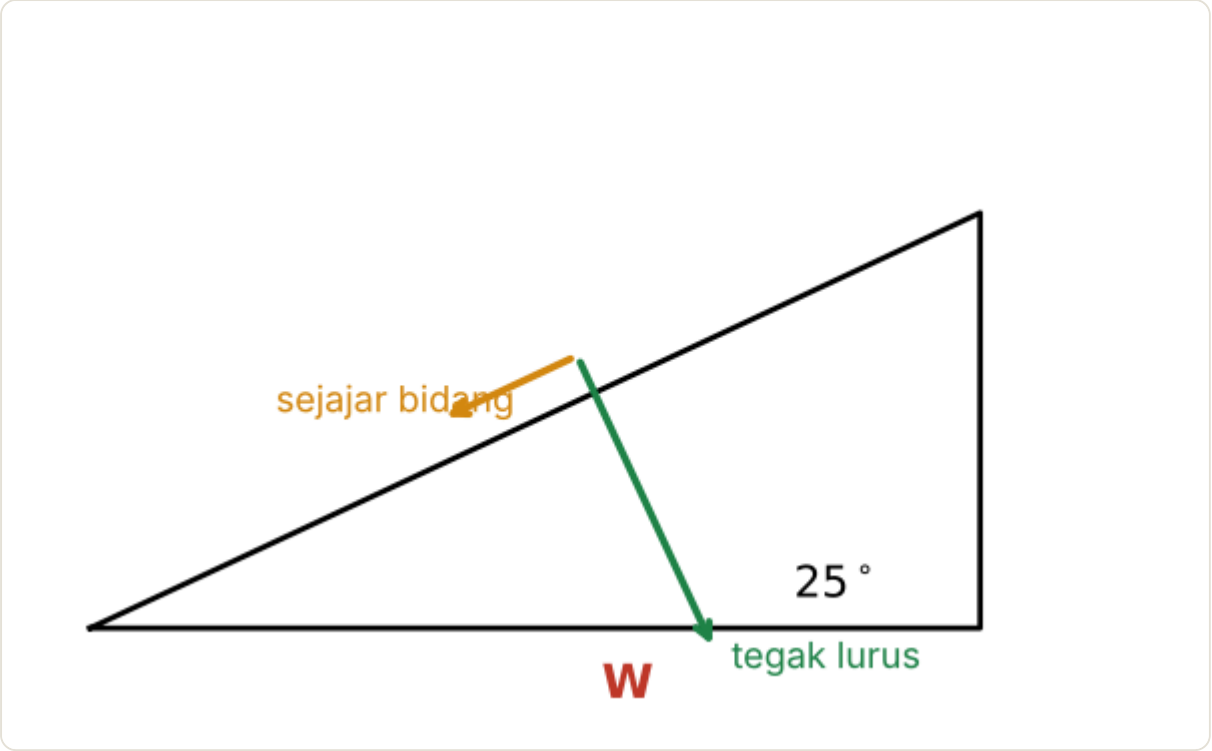
Gaya 200 N pada tali yang membentuk 30° dengan horizontal menarik kereta sejauh 100 m. $W = 200 \cdot 100\cos 30^\circ \approx 17\,321$ J.

CONTOH 10 — BALOK PADA BIDANG MIRING

Balok berbobot 50 N pada bidang miring 25°. Uraikan berat $\mathbf{W}$ menjadi komponen sejajar bidang (menggeser balok) dan tegak lurus bidang (menekan bidang):

$$W_{\parallel} = 50\sin 25^\circ \approx 21{,}1\ \text{N}, \qquad W_{\perp} = 50\cos 25^\circ \approx 45{,}3\ \text{N}.$$

Keduanya dari proyeksi $\mathbf{W}$ pada vektor sejajar dan tegak lurus bidang.



6. Kesalahan umum

- Hasil dot adalah *skalar*, bukan vektor.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ tidak bermakna (skalar dot vektor tak terdefinisi).
- Hasil dot nol tidak berarti salah satu vektor nol; bisa saja tegak lurus.
- Memakai derajat/radian yang tidak cocok saat menghitung $\theta = \arccos(\cdot)$.
- Mengira $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$: proyeksi tidak simetris.

7. Ringkasan

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$.
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; tanda dot menentukan lancip/tumpul.
- $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.
- Kerja $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$.

Berikutnya 12.4 Hasil Kali Silang.

12.4 Hasil Kali Silang

Hasil kali titik menghasilkan skalar. Banyak masalah geometri dan fisika di ruang membutuhkan vektor yang *tegak lurus terhadap dua vektor lain*: normal sebuah bidang, sumbu putar, arah gaya magnet. Operasi yang menghasilkannya adalah **hasil kali silang**, yang hanya ada di ruang tiga dimensi.

1. Determinan sebagai alat bantu

Determinan 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Determinan 3×3 dihitung dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

(Perhatikan tanda berganti $+, -, +$.)

2. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali silang** (*cross product*) adalah vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle.$$

Bentuk yang mudah diingat memakai determinan simbolik:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

CONTOH 1

$\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\,(3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7) - \mathbf{j}\,(1 \cdot (-5) - 4 \cdot 2) + \mathbf{k}\,(1 \cdot 7 - 3 \cdot 2) = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} +$

Cek tegak lurus: $\langle -43, 13, 1 \rangle \cdot \langle 1, 3, 4 \rangle = -43 + 39 + 4 = 0$ dan $\cdot \langle 2, 7, -5 \rangle = -86 + 91 - 5 = 0$ ✓.

CONTOH 2 — PERKALIAN BASIS STANDAR

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, sedangkan $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, dan $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Pola siklus $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$ menghasilkan tanda positif.

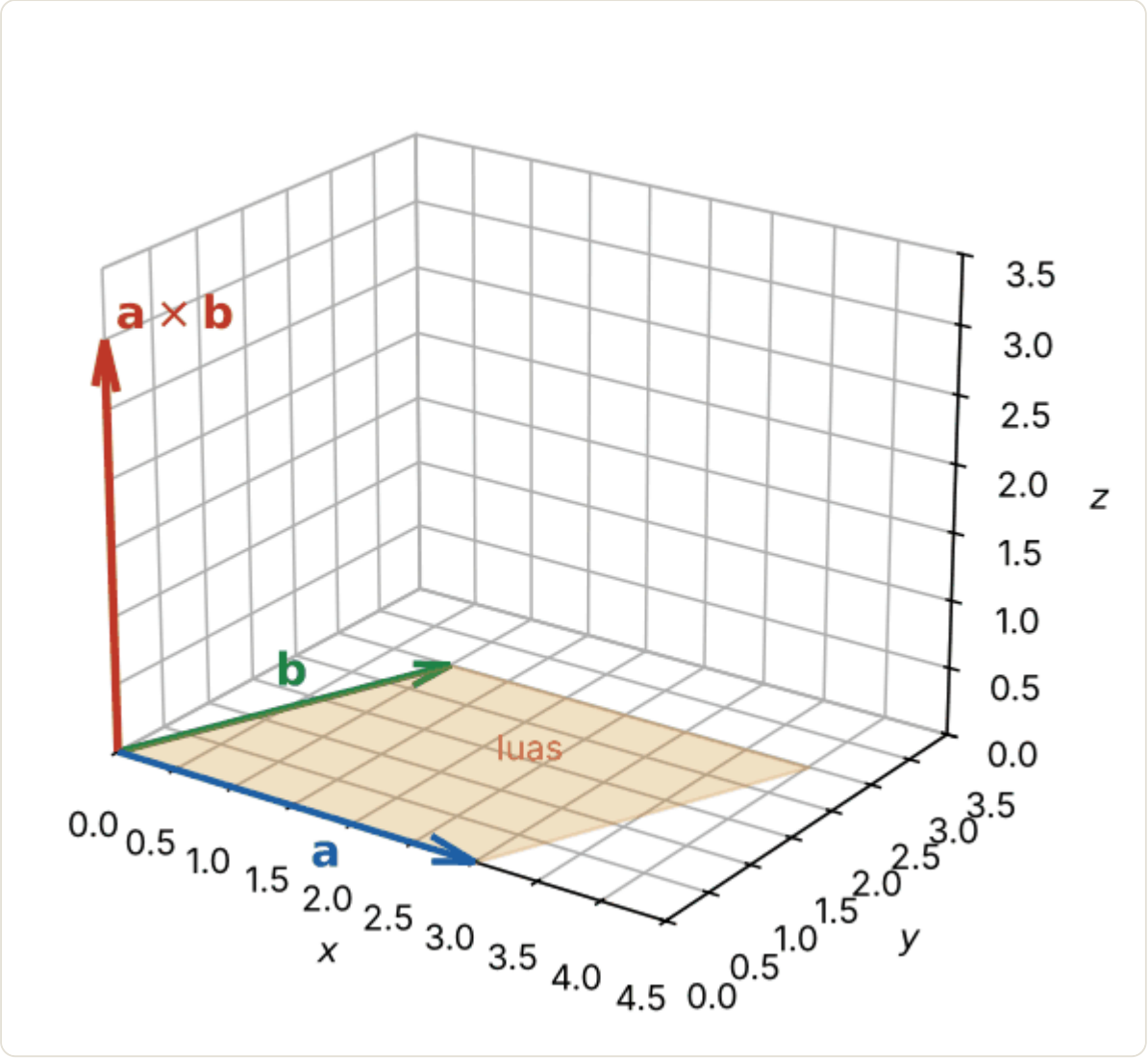
3. Arah dan besar

TEOREMA

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **tegak lurus** terhadap $\mathbf{a}$ maupun $\mathbf{b}$.

Bukti. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ (semua suku saling menghapus). Serupa untuk $\mathbf{b}$. ■

Arah ditentukan oleh *kaidah tangan kanan*: bila jari tangan kanan melengkung dari $\mathbf{a}$ ke $\mathbf{b}$ (melalui sudut $\theta < \pi$), ibu jari menunjuk arah $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus bidang yang memuat $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$; panjangnya sama dengan luas jajargenjang.

TEOREMA (BESAR)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

dengan θ sudut antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$.

Bukti. Identitas Lagrange (periksa dengan menjabarkan komponen): $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Karena $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta$. Karena $\sin\theta \ge 0$ pada $[0, \pi]$, akarnya $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$. ■

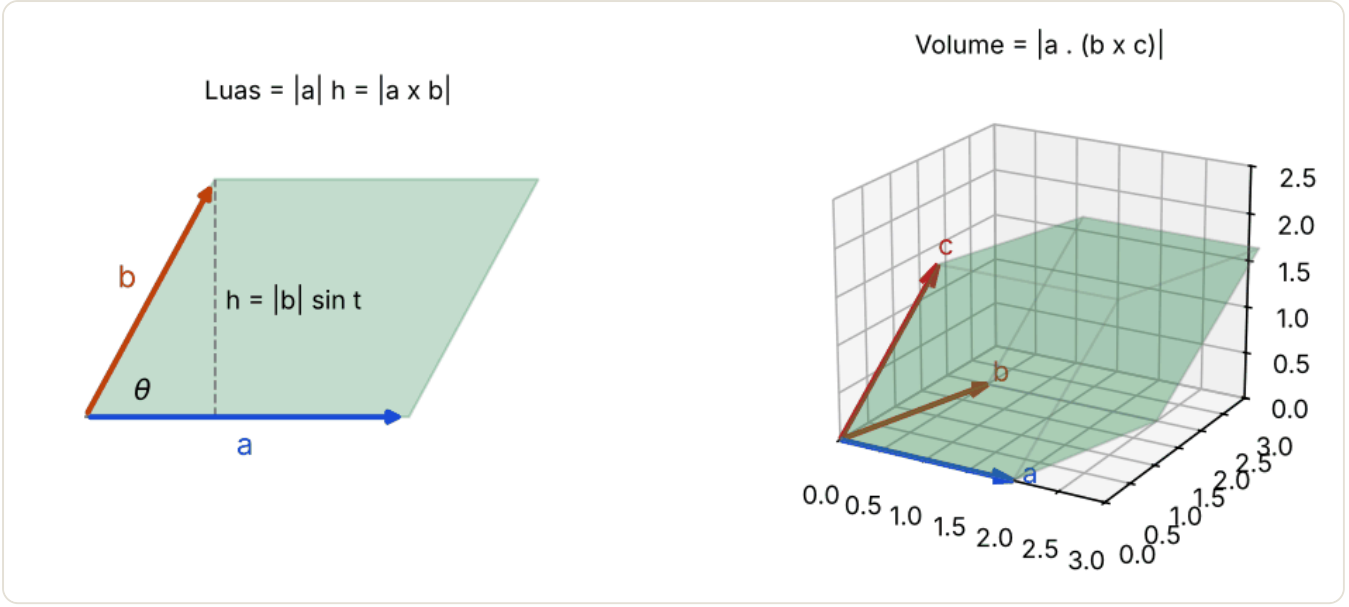
AKIBAT

Dua vektor tak nol $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **sejajar** bila dan hanya bila $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

4. Luas dan volume

Jajargenjang dengan sisi $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ memiliki alas $|\mathbf{a}|$ dan tinggi $|\mathbf{b}|\sin\theta$. Jadi

$$\text{Luas jajargenjang} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|, \qquad \text{Luas segitiga} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$



Kiri: luas $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$. Kanan: volume $= |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

CONTOH 3 — LUAS SEGITIGA DI RUANG

$P(1,4,6), Q(-2,5,-1), R(1,-1,1)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle -3,1,-7\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 0,-5,-5\rangle$.

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \langle 1\cdot(-5)-(-7)(-5),\ (-7)\cdot 0-(-3)(-5),\ (-3)(-5)-1\cdot 0\rangle = \langle$-

$|\cdot| = \sqrt{1600+225+225} = \sqrt{2050} \approx 45{,}28$. Luas segitiga $= \tfrac{1}{2}\sqrt{2050} \approx 22{,}64$.
Vektor $\langle -40,-15,15\rangle$, atau $\langle 8,3,-3\rangle$ (dibagi -5), adalah normal bidang PQR.

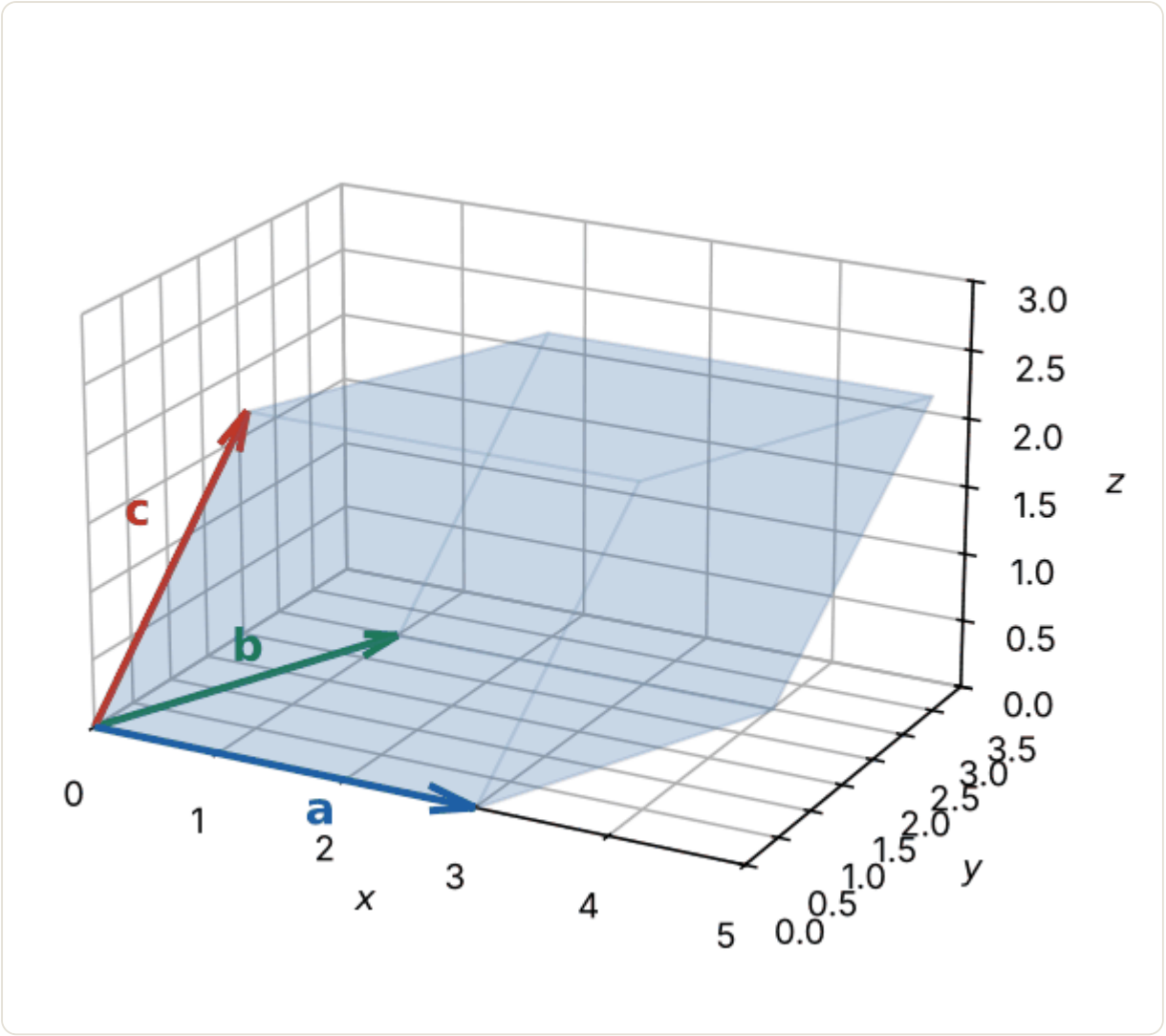
Hasil kali tripel skalar

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ disebut **hasil kali tripel skalar**, dihitung sebagai determinan:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Paralelepipedum (balok miring) dengan rusuk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ mempunyai alas jajargenjang $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ dengan luas $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ dan tinggi $|\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}|$; jadi

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$



CONTOH 4 — VOLUME

$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle -1, 1, 2 \rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -1, 1 \rangle$. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1),\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1,\ (-1)(-1) - 1 \cdot 2 \rangle = \langle 3, 5, -1 \rangle$. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3 + 10 - 3 = 10$. Volume $= 10$.

CONTOH 5 — UJI SEBIDANG (KOPLANAR)

Tiga vektor sebidang bila volume paralelepipedumnya nol. $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$: $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle -1\cdot 18 - 4\cdot(-9),\ 4\cdot 0 - 2\cdot 18,\ 2\cdot(-9) - 0\rangle = \langle 18, -36, -18\rangle$, dan $\mathbf{a}$·itu $= 18 - 144 + 126 = 0$. Jadi sebidang.

5. Sifat-sifat aljabar

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (anti-komutatif)
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributif)
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ (hasil kali tripel vektor)

PERINGATAN

Hasil kali silang **tidak komutatif** dan **tidak asosiatif**: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, sedangkan $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

6. Torsi (momen gaya)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja di titik dengan vektor posisi $\mathbf{r}$ relatif terhadap sumbu putar, **torsi** adalah $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, dengan besar $|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$: gaya yang tegak lurus lengan memberi torsi terbesar.

CONTOH 6 — MENGENCANGKAN BAUT

Kunci pas sepanjang 0,4 m searah sumbu x mengencangkan baut di titik asal; gaya 60 N diberikan ke bawah (arah $-z$). $\mathbf{r} = \langle 0{,}4, 0, 0\rangle$, $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -60\rangle$. $\boldsymbol{\tau} = \langle 0\cdot(-60) - 0,\ 0 - 0{,}4\cdot(-60),\ 0\rangle = \langle 0, 24, 0\rangle$ N·m. Besarnya 24 N·m, searah sumbu y (sumbu putar). Bila gaya miring 30° dari arah tegak lurus, torsinya turun menjadi $24\cos 30^\circ \approx 20{,}8$ N·m.

7. Kesalahan umum

- Menukar urutan: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ berlawanan arah.
- Kesalahan tanda pada komponen $\mathbf{j}$ saat ekspansi determinan.
- Memakai hasil kali silang di $\mathbb{R}^2$ (tidak ada; embed ke $\mathbb{R}^3$ dengan $z = 0$).
- Mengira $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ berarti salah satunya nol (bisa saja sejajar).

8. Ringkasan

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$: vektor tegak lurus keduanya, arah kaidah tangan kanan, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$.
- Luas jajargenjang $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; volume paralelepipedum $= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.
- Sejajar $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$; sebidang $\iff$ tripel skalar nol.
- Torsi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

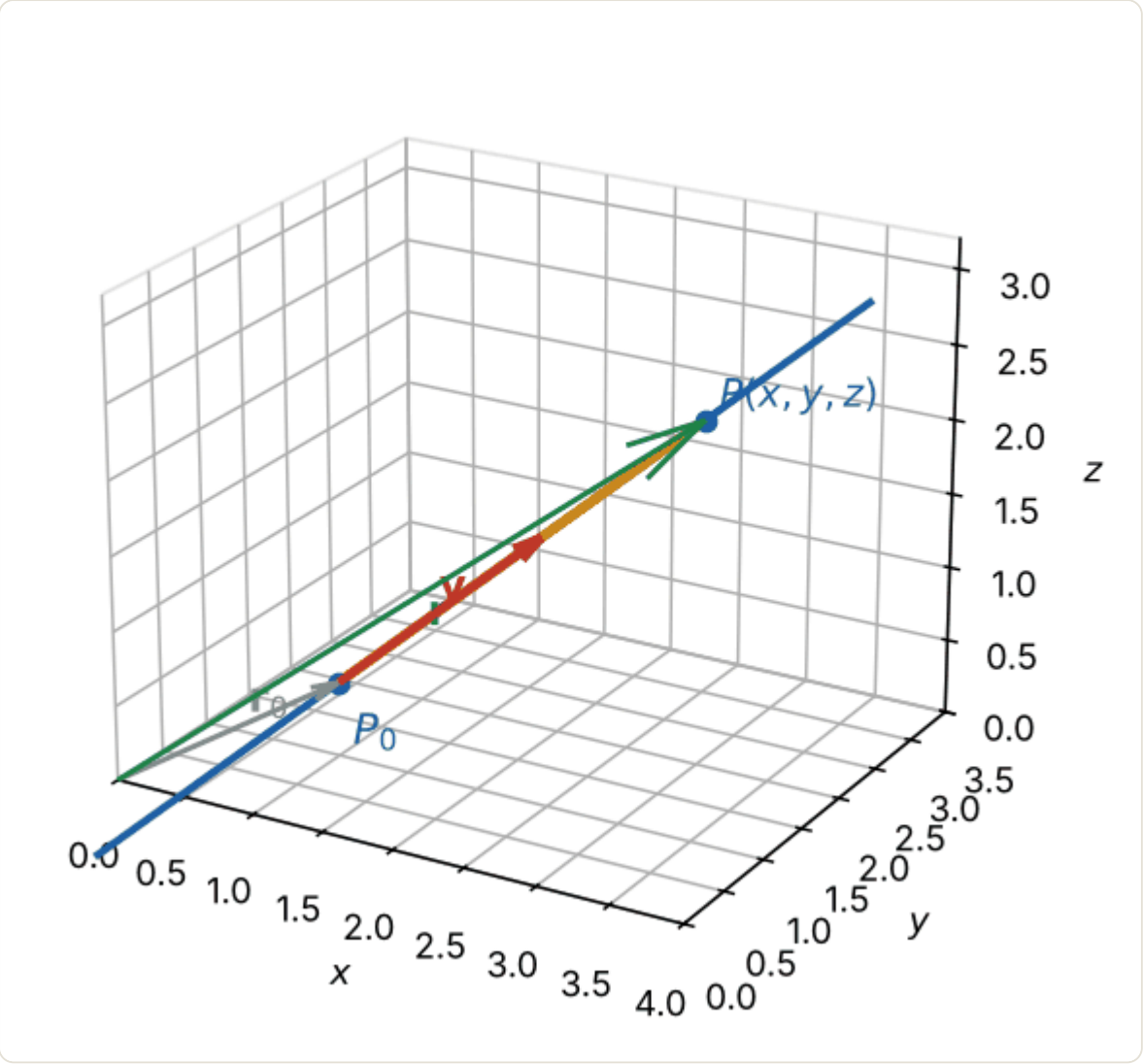
Dengan dua operasi ini kita bisa menuliskan garis dan bidang di 12.5.

12.5 Persamaan Garis dan Bidang

Di bidang, sebuah garis ditentukan oleh sebuah titik dan kemiringan. Di ruang, *kemiringan* diganti dengan **vektor arah**. Bidang di ruang ditentukan oleh sebuah titik dan sebuah **vektor normal**. Subbab ini memakai vektor untuk menuliskan garis dan bidang, mencari jarak dan sudut, serta perpotongan.

1. Persamaan garis

Misalkan L adalah garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor posisi $\mathbf{r}_0$, sejajar vektor tak nol $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ (**vektor arah**). Titik $P(x, y, z)$ berada di L bila $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar $\mathbf{v}$, yaitu $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ untuk suatu skalar t.



Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; $P = P_0 + t\mathbf{v}$.

PERSAMAAN GARIS

- **Vektor:** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Parametrik:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$
- **Simetrik** (bila $a, b, c \neq 0$): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Bilangan a, b, c disebut **bilangan arah** garis.

CONTOH 1 — GARIS DARI TITIK DAN ARAH

Garis melalui $(5, 1, 3)$ sejajar $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$: $x = 5 + t,\ y = 1 + 4t,\ z = 3 - 2t$. Dua titik lain: $t = 1 \Rightarrow (6, 5, 1)$; $t = -1 \Rightarrow (4, -3, 5)$.

CONTOH 2 — GARIS MELALUI DUA TITIK

$A(2, 4, -3)$, $B(3, -1, 1)$. Arah $\overrightarrow{AB} = \langle 1, -5, 4 \rangle$. Garis: $x = 2 + t,\ y = 4 - 5t,\ z = -3 + 4t$. Persamaan simetrik: $x - 2 = \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{z + 3}{4}$. Titik potong dengan bidang xy ($z = 0$): $t = \frac{3}{4}$, titik $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

CONTOH 3 — RUAS GARIS

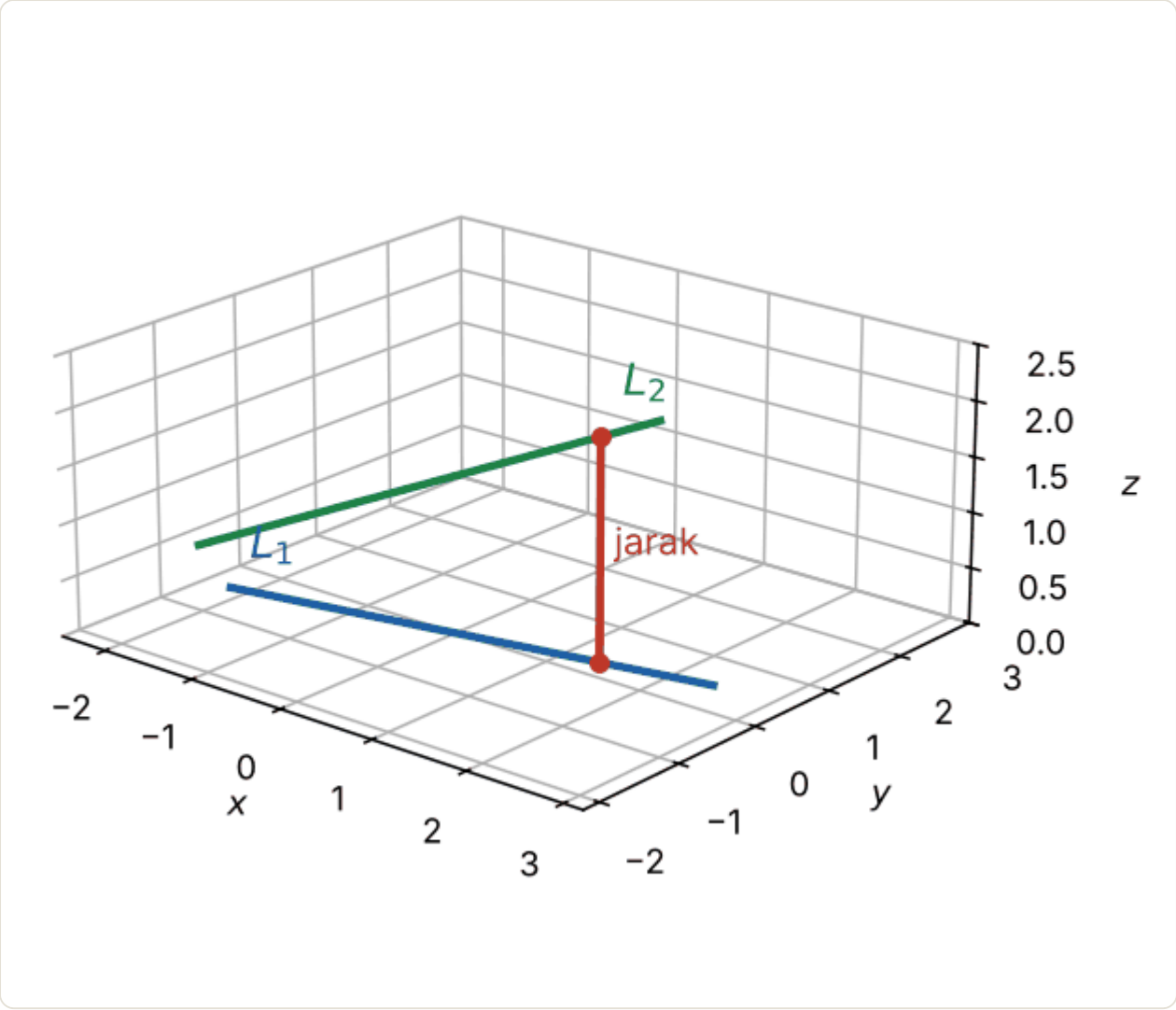
Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, $0 \leq t \leq 1$. Titik tengahnya $t = \frac{1}{2}$.

Hubungan dua garis

Dua garis di ruang dapat: **sejajar** (arah sebanding), **berpotongan**, atau **bersilangan** (*skew*: tidak sejajar dan tidak berpotongan, tidak sebidang).

CONTOH 4 — APAKAH BERSILANGAN?

$L_1:\ x = 1 + t,\ y = -2 + 3t,\ z = 4 - t$ dan $L_2:\ x = 2s,\ y = 3 + s,\ z = -3 + 4s$. Arahnya $\langle 1, 3, -1 \rangle$ dan $\langle 2, 1, 4 \rangle$ tidak sebanding, jadi tidak sejajar. Cari potongan: $1 + t = 2s$, $-2 + 3t = 3 + s$, $4 - t = -3 + 4s$. Dari yang pertama $t = 2s - 1$; ke yang kedua: $-2 + 6s - 3 = 3 + s \Rightarrow s = \frac{8}{5}, t = \frac{11}{5}$. Cek yang ketiga: $4 - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$, sedangkan $-3 + \frac{32}{5} = \frac{17}{5}$. Tidak sama, jadi tidak berpotongan: garis **bersilangan**.

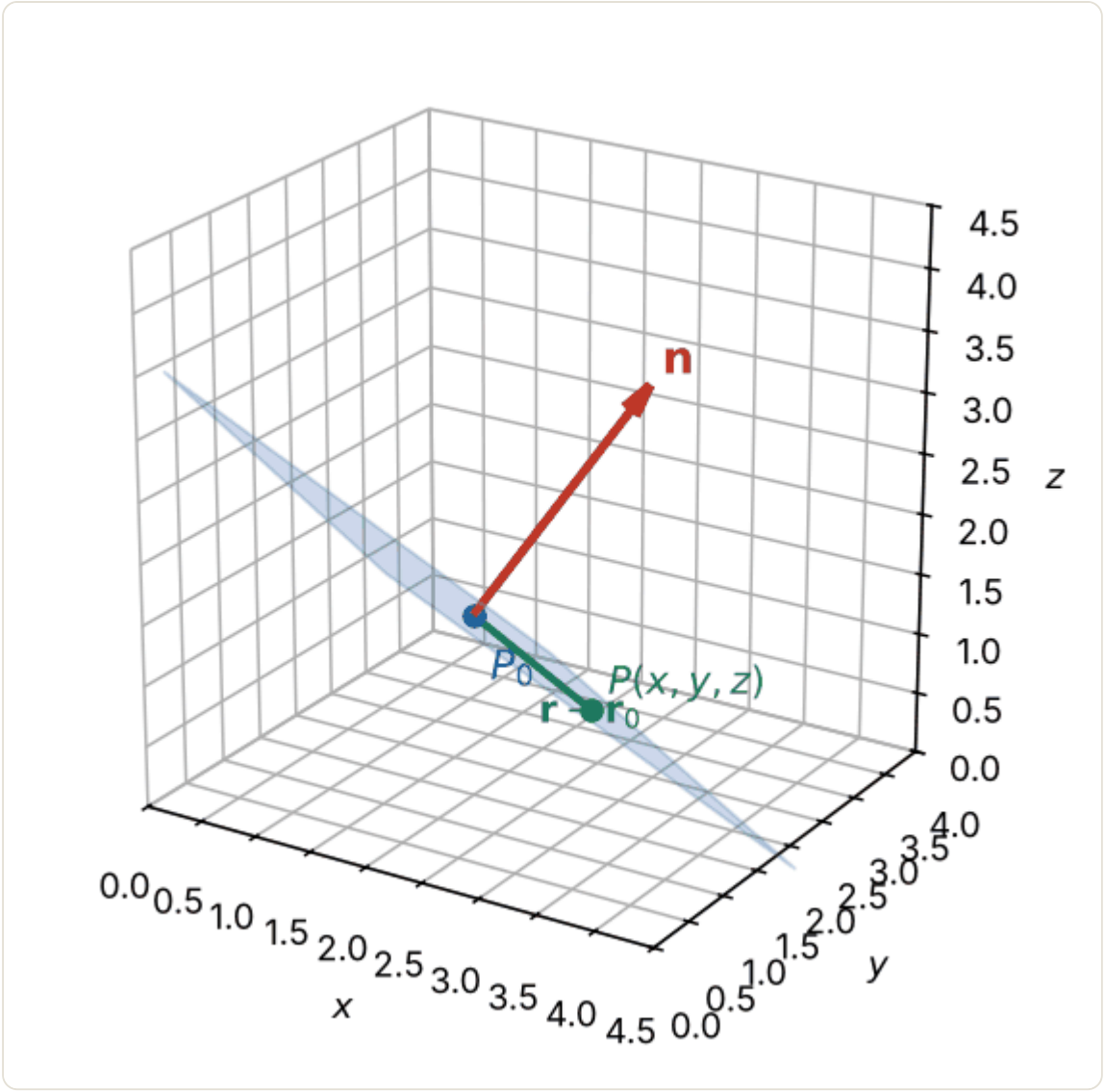


Garis bersilangan dan ruas terpendek yang menghubungkannya (merah).

2. Persamaan bidang

Sebuah bidang ditentukan oleh titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ padanya dan **vektor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ yang tegak lurus bidang. Titik $P(x, y, z)$ ada di bidang bila $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$



Bidang melalui P_0 dengan normal $\mathbf{n}$.

PERSAMAAN BIDANG

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad ax+by+cz+d=0, \quad d=-(a$$

Vektor $\langle a,b,c\rangle$ adalah normal bidang $ax+by+cz+d=0$.

CONTOH 5 — BIDANG DARI TITIK DAN NORMAL

Titik $(2,4,-1)$, normal $\langle 2,3,4\rangle$: $2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0 \Rightarrow 2x+3y+4z=12$. Titik potong sumbu: $x=6$, $y=4$, $z=3$.

CONTOH 6 — BIDANG MELALUI TIGA TITIK

$P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,0)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle 2,-4,4\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 4,-1,-2\rangle$. Normal $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle (-4)(-2) - 4(-1),\ 4\cdot 4 - 2\cdot(-2),\ 2(-1) - (-4)4\rangle = \langle 12, 20, 14\rangle$, atau disederhanakan $\langle 6, 10, 7\rangle$. Bidang: $6x + 10y + 7z = 6 + 30 + 14 = 50$. Cek Q: $18 - 10 + 42 = 50$ ✓; R: $30 + 20 + 0 = 50$ ✓.

CONTOH 7 — BIDANG MEMUAT GARIS DAN TITIK

Bidang yang memuat titik $A(3,-1,-2)$ dan garis $x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = -4 + t$? Titik pada garis: $B(0,1,-4)$ ($t = 0$), arah $\mathbf{v} = \langle 2,1,1\rangle$. $\overrightarrow{BA} = \langle 3,-2,2\rangle$. Normal $= \mathbf{v} \times \overrightarrow{BA} = \langle 1\cdot 2 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 3 - 2\cdot 2,\ 2(-2) - 1\cdot 3\rangle = \langle 4,-1,-7\rangle$. Bidang: $4x - (y-1) - 7(z+4) = 0 \Rightarrow 4x - y - 7z = 27$. Cek A: $12 + 1 + 14 = 27$ ✓.

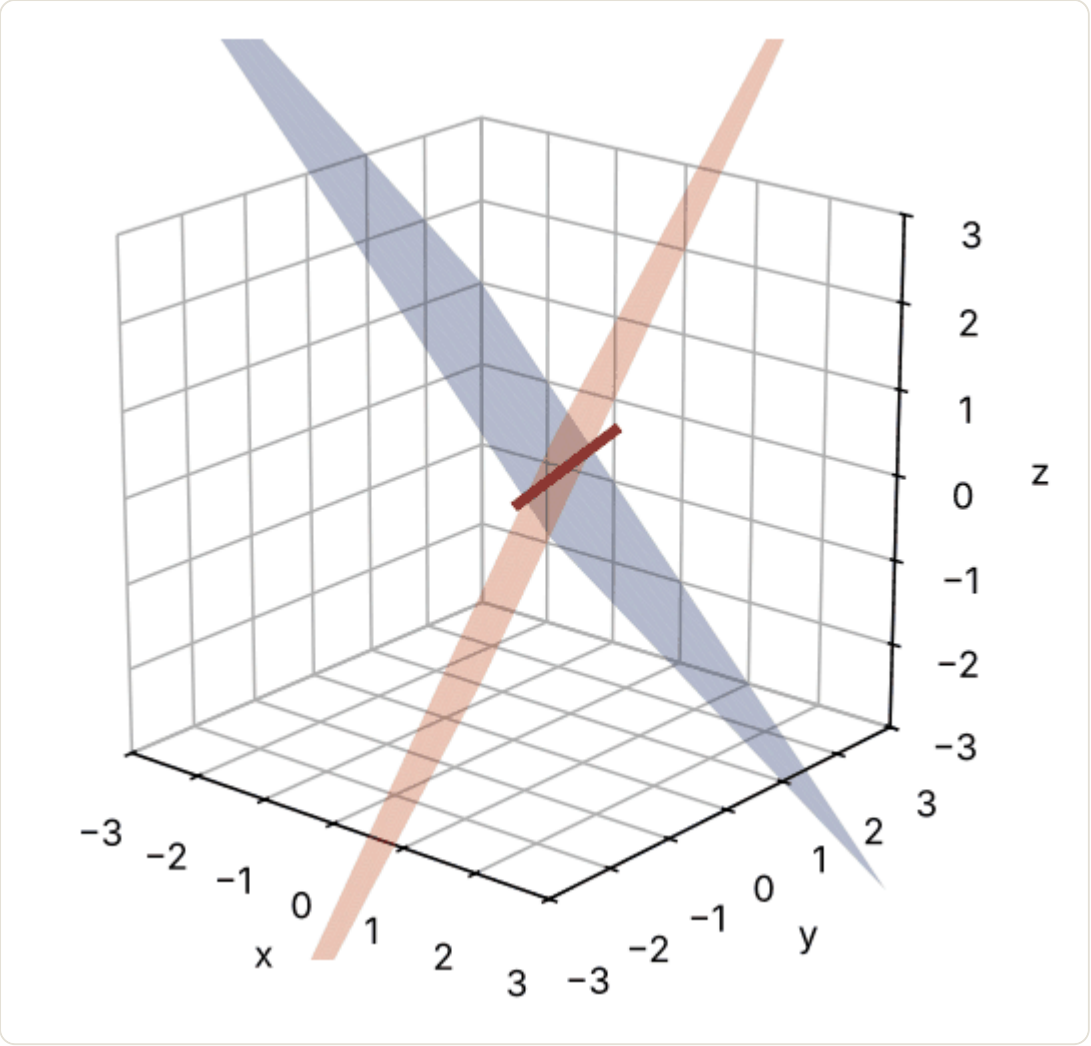
3. Sudut, kesejajaran, dan perpotongan bidang

Dua bidang **sejajar** bila normalnya sejajar. Bila tidak sejajar, mereka berpotongan pada sebuah garis, dan **sudut antara bidang** adalah sudut antara normalnya (yang lancip):

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}.$$

CONTOH 8 — SUDUT DAN GARIS POTONG DUA BIDANG

Bidang $x + y + z = 1$ dan $x - 2y + 3z = 1$. Normal $\langle 1,1,1\rangle$ dan $\langle 1,-2,3\rangle$; dot $= 2$; $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 72{,}0^\circ$. Arah garis potong $= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \langle 1\cdot 3 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3,\ 1\cdot(-2) - 1\cdot 1\rangle = \langle 5,-2,-3\rangle$. Titik pada garis: pilih $z = 0$: $x + y = 1$, $x - 2y = 1 \Rightarrow y = 0, x = 1$. Garis: $x = 1 + 5t,\ y = -2t,\ z = -3t$.



Dua bidang berpotongan pada sebuah garis (merah).

CONTOH 9 — SUDUT BIDANG LAIN

Untuk $x + y + z = 1$ dan $x + 2y + 3z = 1$: $\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 22{,}2°$. Arah garis potong $\langle 1,1,1\rangle \times \langle 1,2,3\rangle = \langle 1,-2,1\rangle$; titik $(1,0,0)$ pada keduanya: $x = 1+t,\ y = -2t,\ z = t$.

4. Garis dan bidang

CONTOH 10 — TITIK TEMBUS GARIS PADA BIDANG

Garis $x = 1+2t,\ y = -t,\ z = 3+t$ dan bidang $x + 2y - z = 4$. Substitusi: $(1+2t) + 2(-t) - (3+t) = 4 \Rightarrow -2 - t = 4 \Rightarrow t = -6$. Titik tembus $(-11, 6, -3)$. Bila koefisien t hilang dan sisi konstan tidak cocok, garis sejajar bidang (tidak berpotongan); bila cocok, garis terletak pada bidang.

5. Jarak

JARAK TITIK KE BIDANG

Jarak titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $ax + by + cz + d = 0$:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Penurunan. Ambil P_0 pada bidang. Jarak $= |\text{comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_0P_1}| = \dfrac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{n}|}$, dengan $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$. ■

CONTOH 11

Jarak $(4, -2, 3)$ ke bidang $2x - y + 2z = 5$: $\dfrac{|8 + 2 + 6 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{11}{3} \approx 3{,}67$. Jarak antara bidang sejajar $2x - y + 2z = 5$ dan $2x - y + 2z = -4$: ambil titik $(0, 0, -2)$ pada yang kedua (cek: -4) dan hitung jaraknya ke yang pertama: $\frac{|-4-5|}{3} = 3$.

JARAK TITIK KE GARIS

Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; jarak dari P: $D = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$ (tinggi jajargenjang).

JARAK ANTARA DUA GARIS BERSILANGAN

Untuk garis dengan titik P_1, P_2 dan arah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: $D = \dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$ (tinggi paralelepipedum).

CONTOH 12 — JARAK GARIS BERSILANGAN (DARI CONTOH 4)

$P_1(1, -2, 4)$, $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$; $P_2(0, 3, -3)$, $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \langle 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1,\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 4,\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2\rangle = \langle 13, -6, -5\rangle$, $|\cdot| = \sqrt{230}$. $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1, 5, -7\rangle$; dot $= -13 - 30 + 35 = -8$. Jarak $= \dfrac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}528$.

6. Kesalahan umum

- Memakai titik sebagai vektor arah atau sebaliknya.
- Menganggap garis di ruang punya persamaan tunggal $ax + by + cz = d$ (itu bidang; garis memerlukan dua persamaan bidang atau bentuk parametrik).
- Menyimpulkan garis berpotongan hanya karena tidak sejajar (bisa bersilangan).
- Lupa nilai mutlak pada rumus jarak.

7. Ringkasan

- Garis: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$; bidang: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
- Normal bidang dari tiga titik: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$; garis potong dua bidang: arah $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.
- Jarak titik–bidang $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; jarak garis bersilangan lewat tripel skalar.

Berikutnya 12.6: permukaan yang lebih rumit dari bidang dan bola.

12.6 Silinder dan Permukaan Kuadrik

Pada 12.5 kita mempelajari permukaan paling sederhana: bidang. Subbab ini membahas permukaan lengkung yang persamaannya berderajat dua: **silinder** dan **permukaan kuadrik**. Permukaan ini akan sering muncul sebagai grafik fungsi dua peubah (Bab 14) dan sebagai batas daerah integral rangkap tiga (Bab 15).

1. Jejak (trace)

Permukaan di ruang sulit digambar langsung. Cara yang andal: potong permukaan dengan bidang-bidang sejajar bidang koordinat, lalu amati kurva irisannya.

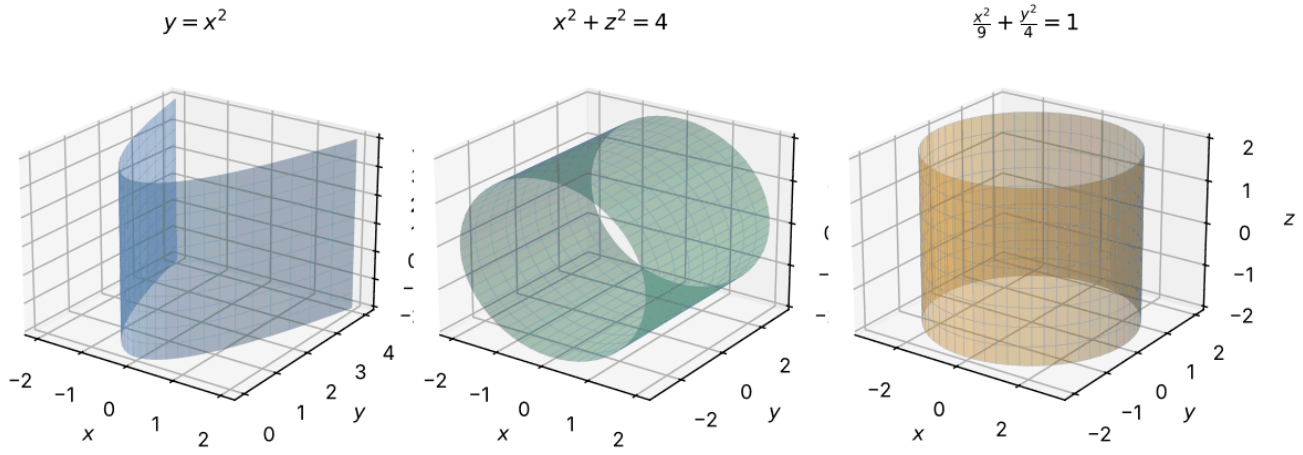
> **DEFINISI — JEJAK**
>
> **Jejak** suatu permukaan S adalah kurva perpotongan S dengan sebuah bidang. Bidang $x = k$ memberi jejak di bidang yz-sejajar, bidang $y = k$ memberi jejak xz-sejajar, dan bidang $z = k$ memberi jejak xy-sejajar (sering disebut *kurva ketinggian* atau *irisan horizontal*).

Dengan menggabungkan beberapa jejak, bentuk permukaan terbayang seperti tumpukan irisan roti.

2. Silinder

> **DEFINISI — SILINDER**
>
> **Silinder** adalah permukaan yang dibentuk oleh semua garis (disebut *garis pelukis*) yang sejajar suatu garis tertentu dan memotong suatu kurva bidang yang diberikan.

Kuncinya: *persamaan yang tidak memuat satu peubah* menggambarkan silinder yang garis pelukisnya sejajar sumbu peubah yang hilang. Persamaan di $\mathbb{R}^3$ yang hanya memuat x dan y adalah kurva di bidang xy yang "ditarik" sepanjang sumbu z.



Contoh silinder: kurva bidang yang digeser sepanjang sumbu yang peubahnya tidak muncul dalam persamaan.

CONTOH 1 — SILINDER PARABOLIK

$z = x^2$ tidak memuat y. Untuk setiap y, irisan $y = k$ adalah parabola $z = x^2$ yang sama. Jadi permukaannya adalah **silinder parabolik** dengan garis pelukis sejajar sumbu y.

CONTOH 2 — SILINDER LINGKARAN

$x^2 + y^2 = 1$ di $\mathbb{R}^3$: setiap bidang $z = k$ memotongnya di lingkaran satuan. Hasilnya pipa tak hingga berjari-jari 1 dengan sumbu z sebagai sumbu simetri. Sebaliknya $x^2 + z^2 = 4$ adalah silinder berjari-jari 2 sepanjang sumbu y.

CONTOH 3 — SILINDER HIPERBOLIK DAN ELIPTIK

$y^2 - z^2 = 1$ (tanpa x): silinder hiperbolik sepanjang sumbu x. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$: silinder eliptik sepanjang sumbu y.

HATI-HATI

Di bidang, $x^2 + y^2 = 1$ adalah lingkaran; di ruang ia silinder. Selalu periksa ruang tempat persamaan dibaca. Untuk membatasi silinder menjadi lingkaran saja, tambahkan persamaan kedua, mis. $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.

3. Permukaan kuadrik

DEFINISI — KUADRIK

Permukaan kuadrik adalah grafik persamaan derajat dua dalam tiga peubah:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Dengan translasi dan rotasi, persamaan ini dapat disederhanakan menjadi salah satu dari dua bentuk baku: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ atau $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

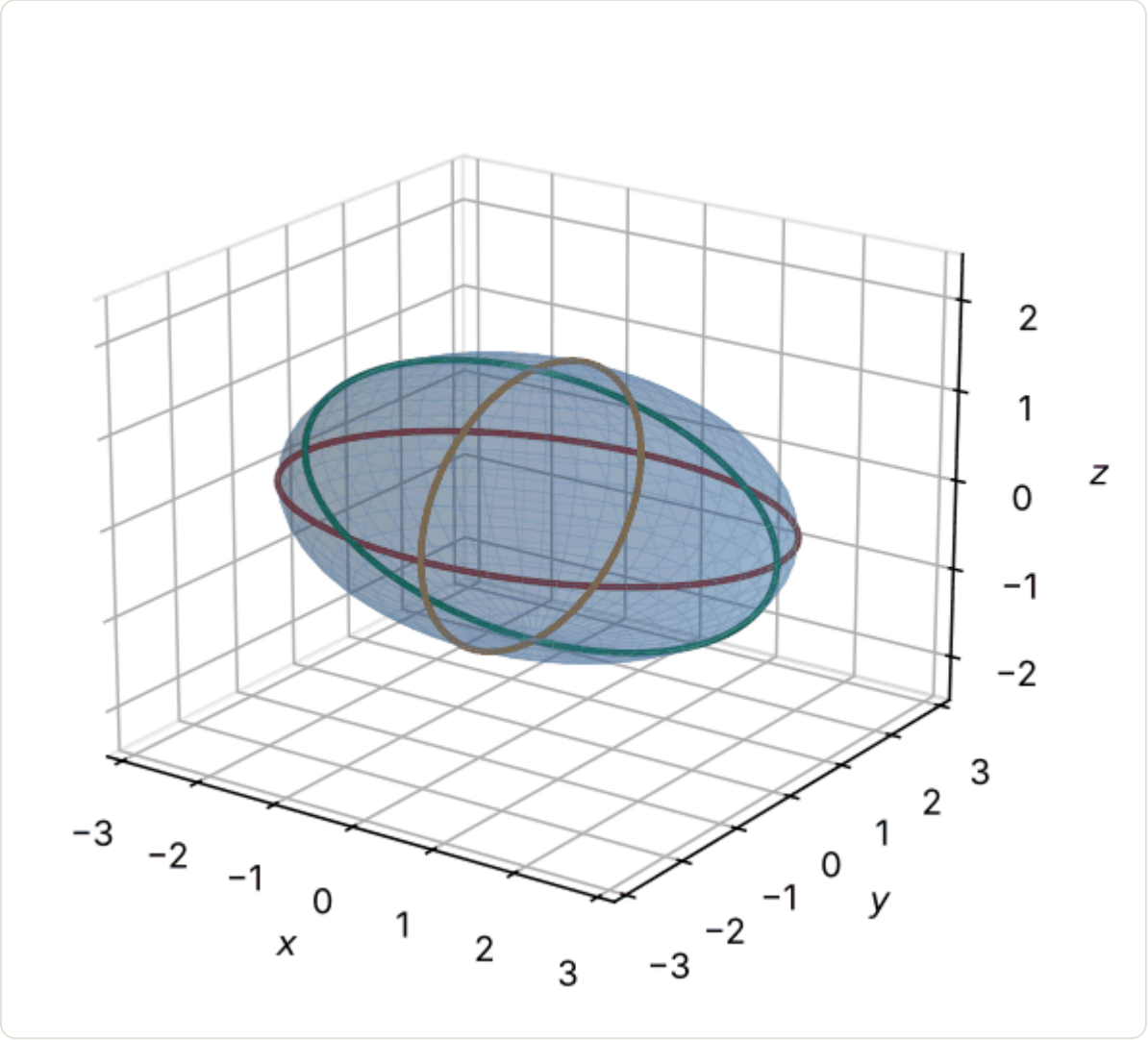
Berikut enam jenis utama (konstanta $a, b, c > 0$). Untuk tiap jenis kita lihat jejaknya.

3.1 Elipsoid

ELIPSOID

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak di $z = k$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$, elips untuk $|k| < c$, satu titik untuk $|k| = c$, kosong untuk $|k| > c$. Jejak di bidang lain juga elips. Titik potong sumbu: $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Jika $a = b = c$, elipsoid menjadi bola.



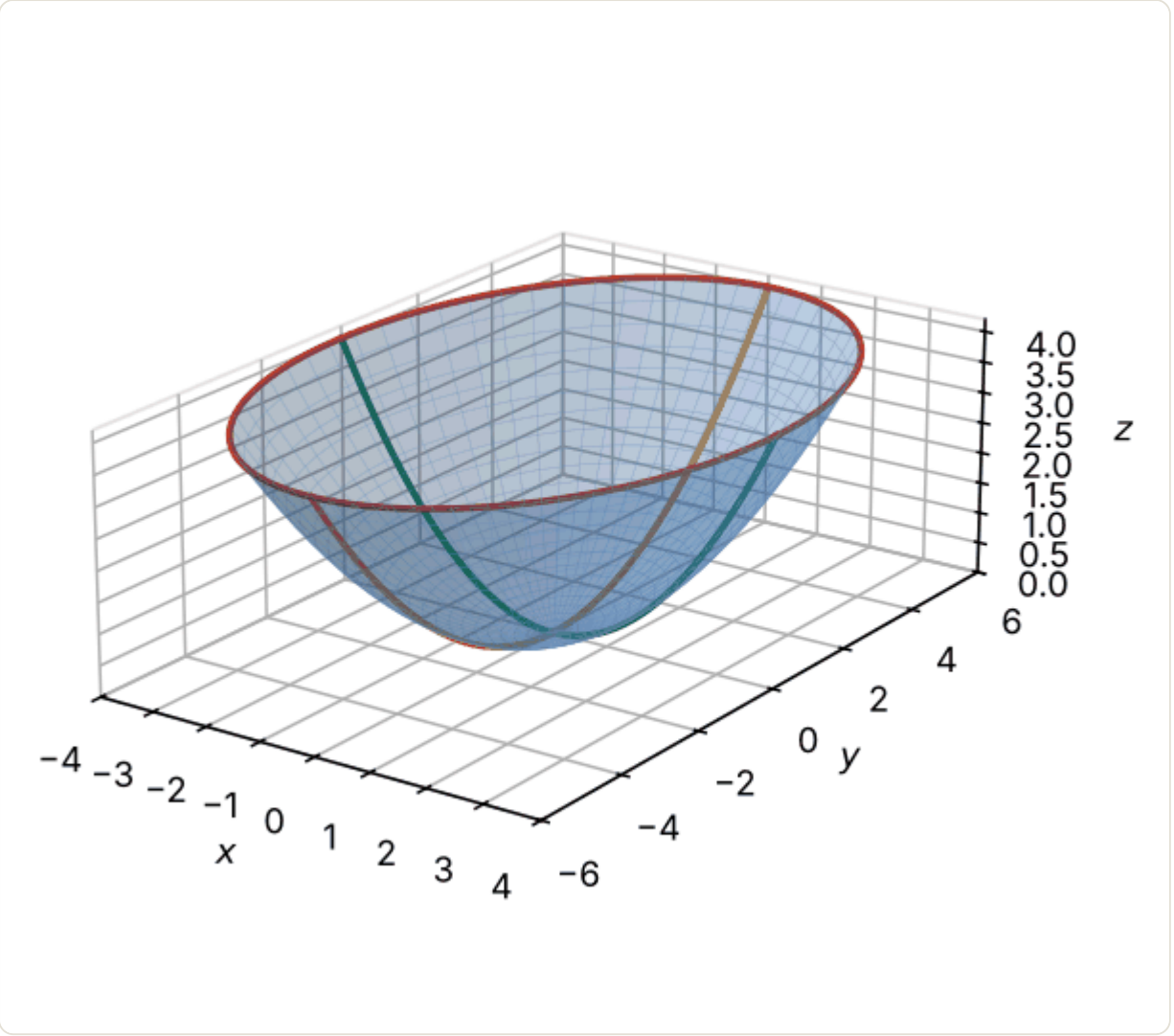
Elipsoid; semua jejaknya elips.

3.2 Paraboloid eliptik

PARABOLOID ELIPTIK

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips untuk $k > 0$, titik asal untuk $k = 0$, kosong untuk $k < 0$. Jejak $x = k$ dan $y = k$: parabola. Bentuk seperti mangkuk atau antena parabola yang membuka ke atas. Untuk $a = b$ disebut paraboloid putar.



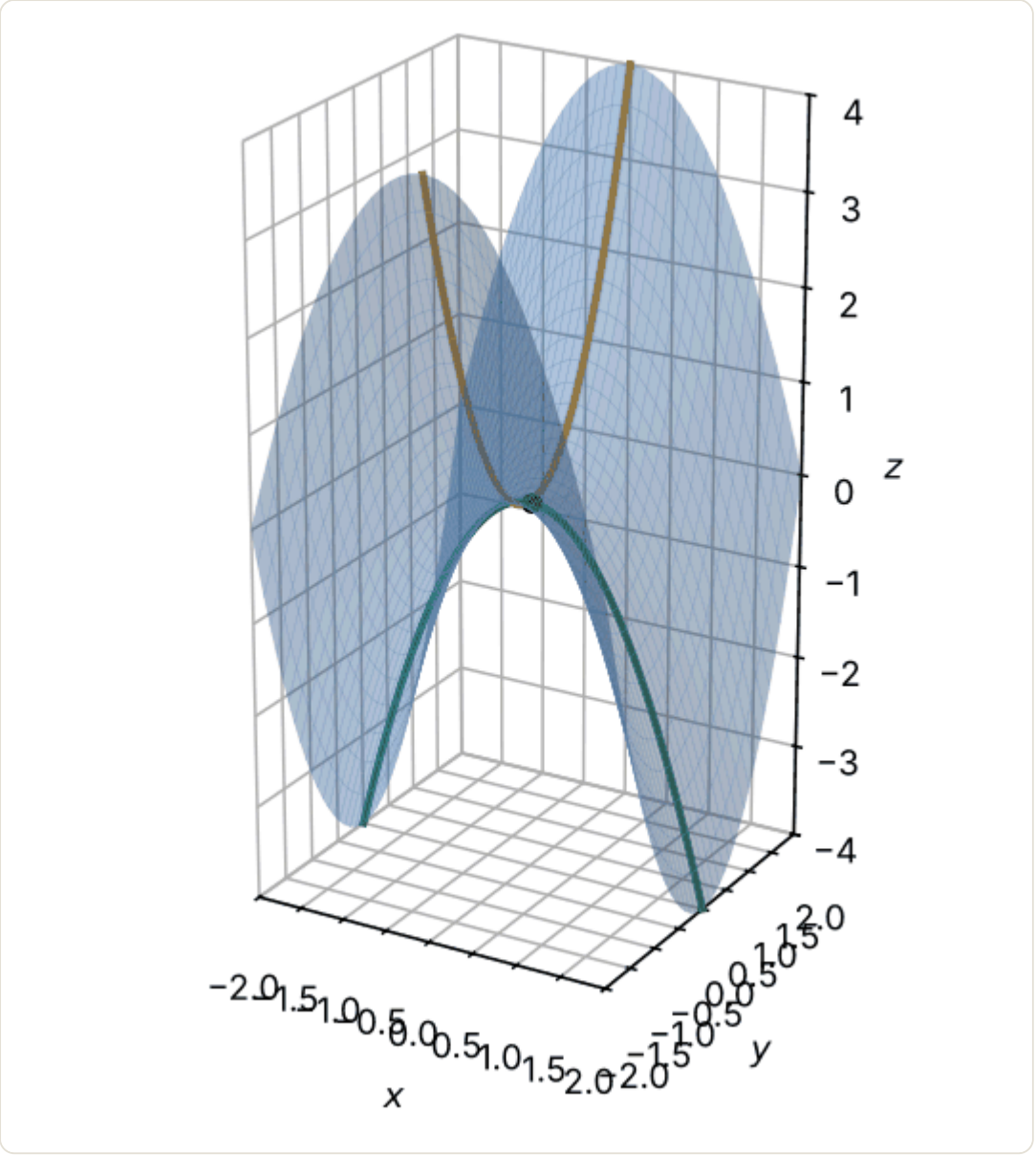
Paraboloid eliptik $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.

3.3 Paraboloid hiperbolik

PARABOLOID HIPERBOLIK (PELANA)

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Jejak $z = k$: hiperbola (untuk $k \neq 0$), dua garis berpotongan $y = \pm\frac{b}{a}x$ untuk $k = 0$. Jejak $x = k$: parabola membuka ke atas; jejak $y = k$: parabola membuka ke bawah. Titik asal adalah *titik pelana*: minimum sepanjang sumbu y tetapi maksimum sepanjang sumbu x.



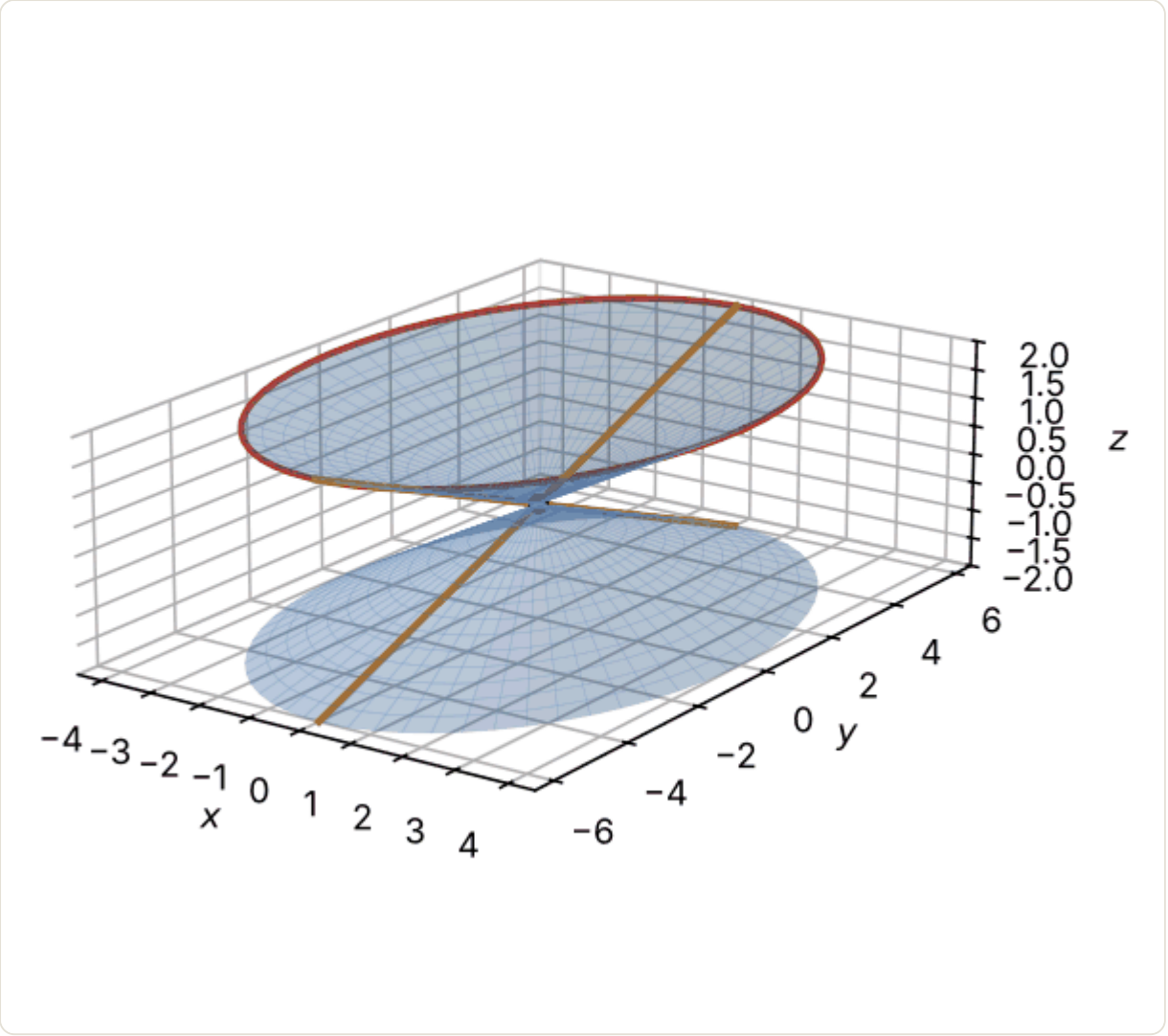
Paraboloid hiperbolik (pelana).

3.4 Kerucut eliptik

KERUCUT ELIPTIK

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ yang membesar dengan $|k|$ (satu titik di $k = 0$). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola (dan dua garis berpotongan di $k = 0$). Permukaan terdiri dari dua "lembar" yang bertemu di titik asal.



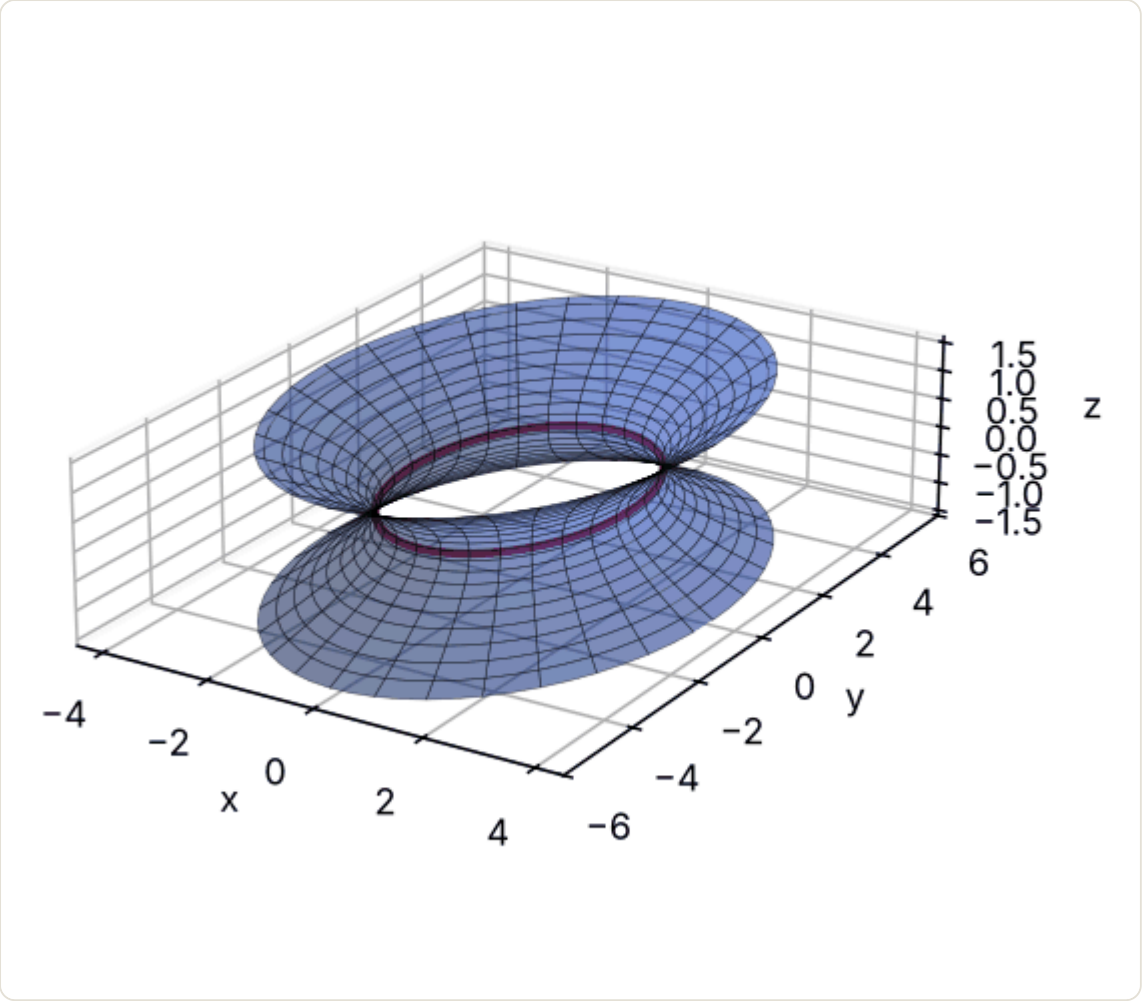
Kerucut eliptik.

3.5 Hiperboloid satu lembar

HIPERBOLOID SATU LEMBAR

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ untuk semua k, paling kecil di $k = 0$ ("pinggang"). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola. Satu permukaan yang tersambung, seperti menara pendingin.



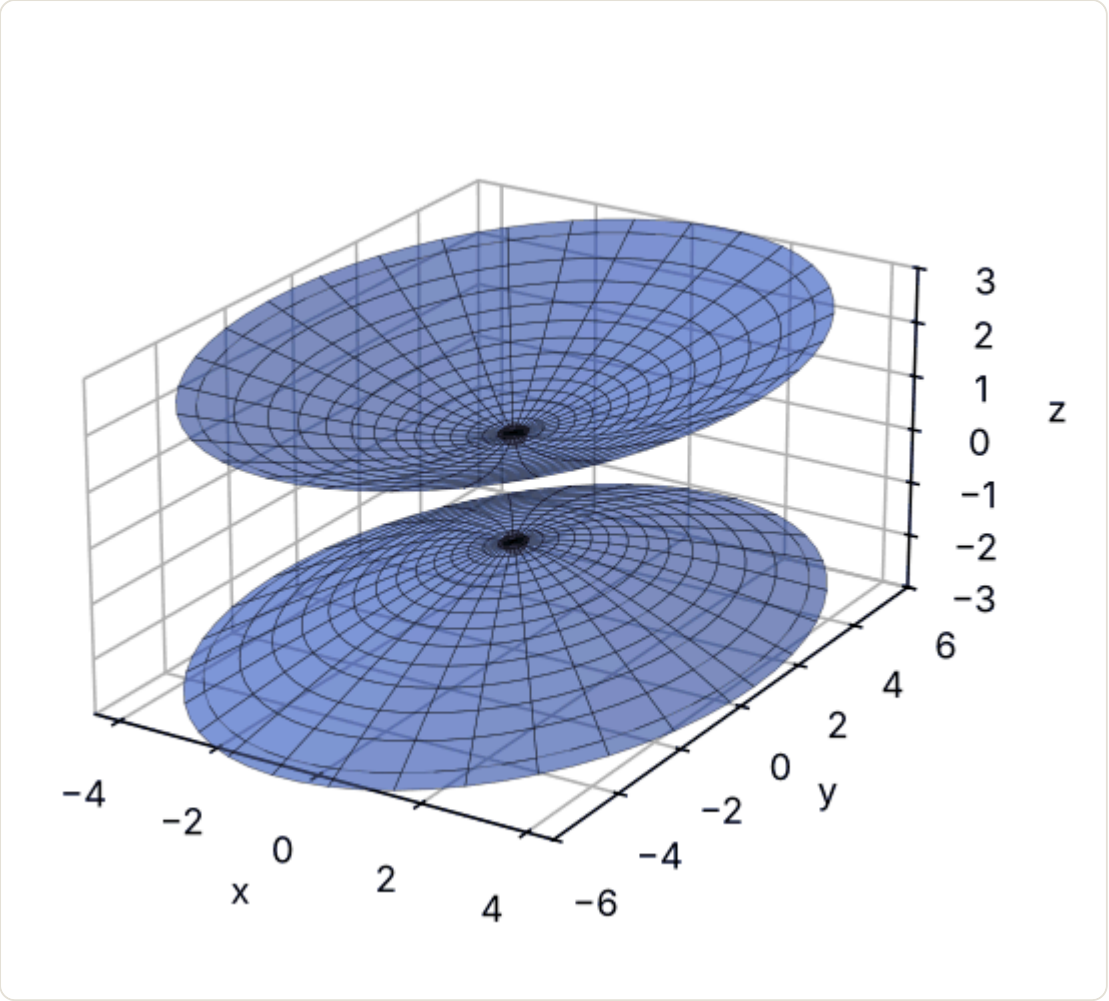
Hiperboloid satu lembar.

3.6 Hiperboloid dua lembar

HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Jejak $z=k$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$, kosong untuk $|k|<c$, titik untuk $|k|=c$, elips untuk $|k|>c$. Jejak $x=k$, $y=k$: hiperbola. Permukaannya terdiri dari *dua bagian terpisah* ($z\geq c$ dan $z\leq -c$).



Hiperboloid dua lembar.

Tabel ringkasan

Permukaan	Persamaan baku	Jejak $z = k$	Jejak vertikal
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert < c$)	elips
Paraboloid eliptik	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips ($k > 0$)	parabola
Paraboloid hiperbolik	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	hiperbola	parabola
Kerucut eliptik	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips	hiperbola
Hiperboloid satu lembar	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips (semua k)	hiperbola
Hiperboloid dua lembar	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert > c$)	hiperbola

CARA CEPAT MENGENALI

- Semua peubah berpangkat dua, ruas kanan 1: ada tanda minus? Tidak ada → elipsoid; satu minus → hiperboloid satu lembar; dua minus → hiperboloid dua lembar.
- Ruas kanan 0 dengan semua pangkat dua → kerucut.
- Satu peubah berpangkat satu, dua lainnya kuadrat → paraboloid (elips jika tanda sama, hiperbolik jika berbeda).

4. Contoh

CONTOH 4 — MENGENALI PERMUKAAN

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$. Lengkapkan kuadrat x: $(x-3)^2 + 2z^2 = y - 1$, yaitu $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$. Ini paraboloid eliptik dengan sumbu sejajar sumbu y dan titik puncak $(3, 1, 0)$, membuka ke arah y positif.

CONTOH 5 — KUADRIK DENGAN PERGESERAN

$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 1$. Lengkapkan kuadrat: $(x-1)^2 - (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$. Persamaannya $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{2} + \dfrac{(z-1)^2}{2} = 1$: hiperboloid satu lembar dengan pusat $(1, 1, 1)$ dan sumbu sejajar sumbu y (peubah yang bertanda minus).

CONTOH 6 — ELIPSOID DARI PERSAMAAN UMUM

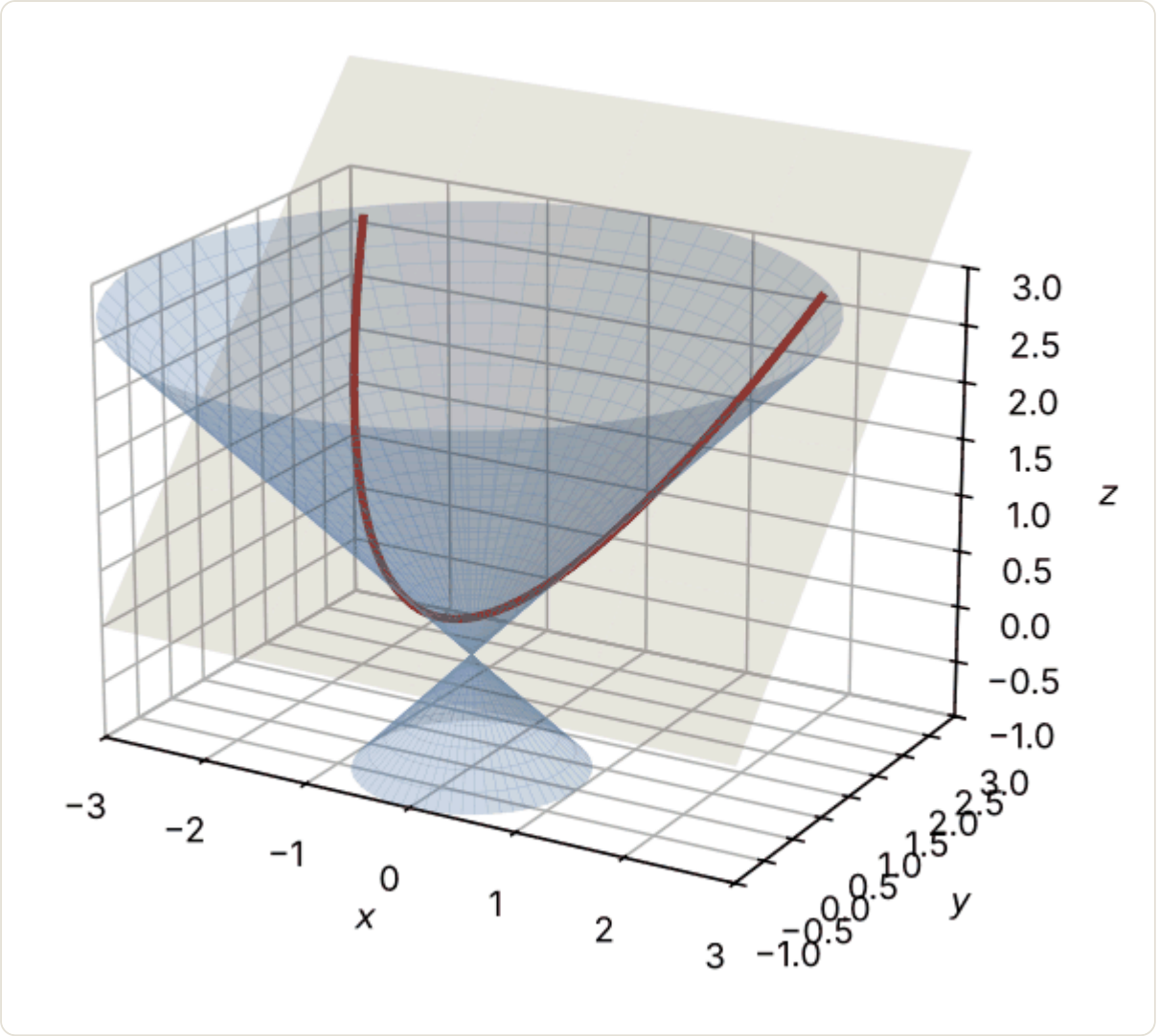
$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 8x + 2y - 36z + 13 = 0 \to 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + 9(z-2)^2 = -13 + 4 + 1 + 36 = 28$. Bagi 28: $\dfrac{(x-1)^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{28} + \dfrac{(z-2)^2}{28/9} = 1$. Elipsoid dengan pusat $(1, -1, 2)$, setengah sumbu $\sqrt{7},\ \sqrt{28},\ \sqrt{28}/3$.

CONTOH 7 — HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$z^2 - x^2 - y^2 = 4$ adalah hiperboloid dua lembar: jejak $z = k$ adalah $x^2 + y^2 = k^2 - 4$, kosong untuk $|k| < 2$, titik di $k = \pm 2$ (titik puncak $(0, 0, \pm 2)$). Sedangkan $z^2 - x^2 - y^2 = -4$ (ruas kanan negatif) berarti $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, hiperboloid satu lembar. Perubahan tanda di ruas kanan mengubah jenis permukaan.

CONTOH 8 — IRISAN DUA PERMUKAAN

Kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ dipotong bidang $z = 1 + y$: substitusi, $(1+y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 2y$, yaitu $y = \frac{x^2 - 1}{2}$. Proyeksi irisan pada bidang xy adalah parabola, dan kurva irisannya sendiri adalah parabola di bidang miring itu. Inilah salah satu *irisan kerucut*: elips, parabola, atau hiperbola, tergantung kemiringan bidang potong.



Kerucut yang dipotong bidang menghasilkan kurva irisan.

CONTOH 9 — BENDA PADAT YANG DIBATASI PERMUKAAN

Daerah di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan di bawah bidang $z = 4$: jejak $z = 4$ adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Untuk tiap $z \in [0, 4]$ irisannya cakram berjari-jari $\sqrt{z}$. Volumnya (dengan irisan) $\displaystyle\int_0^4 \pi z \, dz = 8\pi$.

CONTOH 10 — SATELIT ANTENA

Antena parabola dengan lebar 2 m dan kedalaman 0,25 m dimodelkan $z = kr^2$, $r^2 = x^2 + y^2$: di $r = 1$, $z = 0{,}25$, jadi $k = 0{,}25$; persamaan $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Paraboloid putar ini fokus pada $z = \frac{1}{4k} = 1$ m: semua sinar sejajar sumbu terpantul menuju titik tersebut.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x^2 + y^2 = 1$ di ruang adalah lingkaran. Ia silinder (peubah z bebas).
- Menyamakan paraboloid dan kerucut: kerucut $z^2 = \ldots$ (kuadrat), paraboloid $z = \ldots$ (linear).
- Mengabaikan tanda: satu minus (satu lembar) vs dua minus (dua lembar).
- Menggambar permukaan dari satu jejak saja. Gabungkan beberapa jejak.
- Lupa melengkapkan kuadrat sehingga pusat/puncak salah.

6. Ringkasan

- Jejak: irisan permukaan dengan bidang $x = k$, $y = k$, atau $z = k$.
- Silinder: persamaan tanpa satu peubah; garis pelukis sejajar sumbu peubah itu.
- Enam kuadrik: elipsoid, paraboloid eliptik/hiperbolik, kerucut, hiperboloid satu/dua lembar.
- Untuk mengenali: lengkapkan kuadrat, bawa ke bentuk baku, lihat tanda dan pangkat.

Bab 12 berakhir di sini. Bab berikutnya, 13.1, memakai vektor untuk menggambarkan kurva dan gerak di ruang.