Bab 11: Barisan dan Deret Tak Hingga

11.1 Barisan

1. Apa itu barisan?

Barisan adalah daftar bilangan yang ditulis dalam urutan tertentu:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

a_1 disebut suku pertama, a_2 suku kedua, dan secara umum a_n adalah suku ke-n. Kita hanya membahas barisan *tak hingga*: setiap suku a_n memiliki penerus a_{n+1}.

Karena untuk tiap bilangan bulat positif n ada tepat satu bilangan a_n, barisan sama saja dengan **fungsi** dengan daerah asal bilangan bulat positif; kita menulis a_n sebagai pengganti $f(n)$. Notasi barisan: $\{a_n\}$ atau $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Indeks tidak harus mulai dari 1; misalnya $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$.

CONTOH 1 — TIGA CARA MENYEBUT BARISAN

NOTASI	RUMUS SUKU KE-N	SUKU-SUKU
$\left\{\dfrac{N}{N+1}\right\}$	$A_N = \dfrac{N}{N+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
$\left\{\dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}\right\}$	$A_N = \dfrac{(-1)^N(N+1)}{3^N}$	$-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$
$\{\sqrt{N-3}\}_{N=3}^{\infty}$	$A_N = \sqrt{N-3}$	$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
$\{\mathrm{COS}\ \frac{N\Pi}{6}\}_{N=0}^{\infty}$	$A_N = \mathrm{COS}\ \frac{N\Pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots$

Mencari rumus dari pola

CONTOH 2

Cari rumus suku ke-n dari $\frac{3}{5},\ -\frac{4}{25},\ \frac{5}{125},\ -\frac{6}{625},\ \frac{7}{3125},\dots$

- Pembilang: 3, 4, 5, 6, 7, … naik 1 mulai dari 3, jadi $n+2$.
- Penyebut: pangkat 5, yaitu 5^n.
- Tanda: positif untuk $n=1$, lalu bergantian, sehingga faktor $(-1)^{n-1}$ (atau $-(-1)^n$).

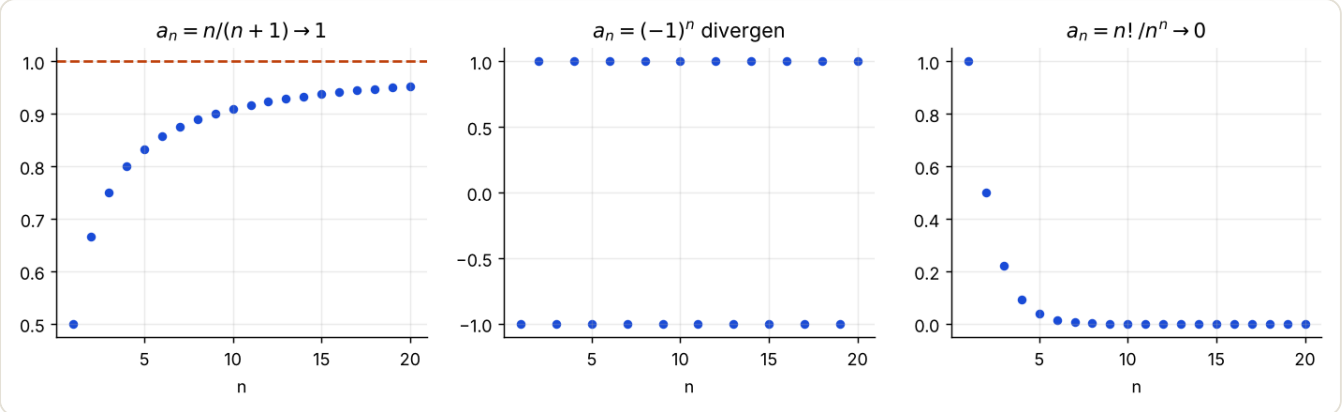
Jawab: $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{5^n}$.

Barisan yang tidak punya rumus sederhana

- p_n = populasi dunia pada 1 Januari tahun ke-n.
- a_n = angka desimal ke-n dari bilangan $e = 2.7182818\dots$; barisannya terdefinisi dengan baik: $7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \dots$
- **Barisan Fibonacci**, didefinisikan *rekursif*: $f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \geq 3)$, menghasilkan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$. Muncul dari soal pembiakan kelinci oleh Fibonacci (abad ke-13).

2. Menggambar barisan

Barisan dapat digambar pada garis bilangan (titik-titik $a_1, a_2, \dots$) atau pada bidang (grafik berupa titik-titik terpisah (n, a_n)). Pada gambar kanan di bawah, $a_n = n/(n+1)$ tampak mendekati 1.



Kiri: konvergen ke 1. Tengah: berosilasi (divergen). Kanan: $n!/n^n \to 0$.

3. Limit barisan

DEFINISI (INTUITIF)

Barisan $\{a_n\}$ memiliki limit L, ditulis $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ atau $a_n \to L$, bila suku a_n dapat dibuat sedekat yang kita mau ke L dengan mengambil n cukup besar. Bila limit ada, barisan **konvergen**; bila tidak, barisan **divergen**.

DEFINISI (PRESISI, E–N)

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan bulat N sehingga

$$n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Artinya: seberapa sempit pun interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, semua suku mulai dari a_{N+1} berada di dalamnya. ε yang lebih kecil umumnya menuntut N yang lebih besar.

JEMBATAN DENGAN LIMIT FUNGSI

Definisi ini hampir identik dengan limit fungsi di tak hingga; satu-satunya beda adalah n bilangan bulat. Karena itu:

Teorema 3. Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $f(n) = a_n$ untuk bilangan bulat n, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Ini memungkinkan penggunaan aturan l'Hôpital untuk barisan: terapkan pada fungsi $f(x)$ yang bersesuaian, lalu simpulkan untuk a_n. (Kebalikannya tidak benar: $\sin(n\pi) \to 0$ tetapi $\lim_{x\to\infty} \sin(\pi x)$ tidak ada.)

Hasil dasar: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^r} = 0$ untuk $r > 0$.

Limit tak hingga. $\lim a_n = \infty$ berarti untuk setiap M ada N sehingga $n > N \Rightarrow a_n > M$. Barisan itu divergen, tetapi dengan cara khusus ("divergen ke ∞").

4. Hukum limit untuk barisan

Bila $\{a_n\}, \{b_n\}$ konvergen dan c konstanta:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

- $\lim ca_n = c \lim a_n, \lim c = c$
- $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$ bila $\lim b_n \neq 0$
- $\lim a_n^p = (\lim a_n)^p$ bila $p > 0$ dan $a_n > 0$

TEOREMA APIT (SQUEEZE)

Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq n_0$ dan $\lim a_n = \lim c_n = L$, maka $\lim b_n = L$.

TEOREMA 6 (NILAI MUTLAK)

Jika $\lim |a_n| = 0$ maka $\lim a_n = 0$. (Karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, lalu apit.)

TEOREMA 7 (FUNGSI KONTINU)

Jika $\lim a_n = L$ dan f kontinu di L, maka $\lim f(a_n) = f(L)$.

5. Contoh-contoh perhitungan

CONTOH 3 — BAGI DENGAN PANGKAT TERTINGGI

$\lim \dfrac{n}{n+1} = \lim \dfrac{1}{1+1/n} = \dfrac{1}{1+0} = 1.$ Ini mengonfirmasi tebakan dari grafik.

$\lim \dfrac{3n^2 - n}{5n^2 + 4} = \lim \dfrac{3 - 1/n}{5 + 4/n^2} = \dfrac{3}{5}.$

CONTOH 4 — LIMIT TAK HINGGA

$a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$. Bagi dengan n: $\dfrac{1}{\sqrt{10/n^2 + 1/n}}$. Penyebut menuju 0 (positif), pembilang 1, jadi $a_n \to \infty$. Barisan divergen.

CONTOH 5 — MEMAKAI L'HÔPITAL

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Pakai fungsi $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$. Maka $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

CONTOH 6 — BARISAN YANG BEROSILASI

$a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ Suku bolak-balik antara -1 dan 1 tak hingga kali, tidak mendekati satu bilangan; **divergen**.

CONTOH 7 — LEWAT NILAI MUTLAK

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$. Dengan Teorema 6, $a_n \to 0$. Walaupun tanda berganti, magnitudonya mengecil.

CONTOH 8 — TEOREMA 7

$$\lim \sin \frac{\pi}{n} = \sin\left(\lim \frac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

CONTOH 9 — BARISAN FAKTORIAL

$a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Tulis

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n}\right).$$

Tanda kurung berisi faktor-faktor ≤ 1, jadi $0 < a_n \leq \dfrac{1}{n}$. Dari Teorema Apit ($\frac{1}{n} \to 0$): $a_n \to 0$.

PELAJARAN PENTING

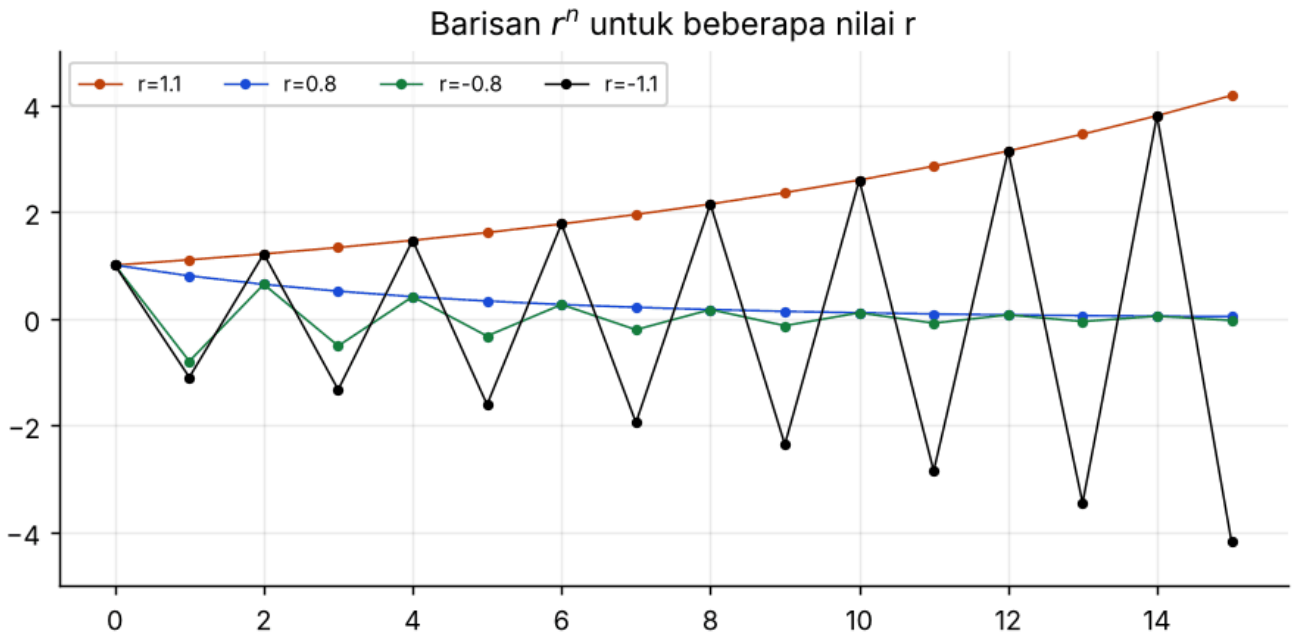
Pada tingkat n besar, n^n tumbuh jauh lebih cepat dibanding $n!$, dan $n!$ lebih cepat dibanding a^n untuk semua a, dan a^n lebih cepat dibanding pangkat n^p, yang lebih cepat dibanding $\ln n$. Hierarki: $\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

6. Barisan geometri r^n

CONTOH 10 — KAPAN $\{R^N\}$ KONVERGEN?

- $r > 1$: $r^n \to \infty$ (diverge).
- $r = 1$: $1, 1, 1, \cdots \to 1$.
- $0 < r < 1$: $r^n \to 0$ (karena $r^n = e^{n \ln r}$ dan $\ln r < 0$).
- $r = 0$: barisan nol, $\to 0$.
- $-1 < r < 0$: $|r|^n \to 0$, jadi $r^n \to 0$ (Teorema 6).
- $r = -1$: $-1, 1, -1, \ldots$ divergen.
- $r < -1$: $|r^n| \to \infty$ dengan tanda berganti; divergen.

Ringkasan: $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & -1 < r < 1 \\ 1 & r = 1 \end{cases}$, dan divergen untuk semua r lain. Maka $\{r^n\}$ konvergen **jika dan hanya jika** $-1 < r \leq 1$.



7. Barisan monoton dan terbatas

DEFINISI

- $\{a_n\}$ **naik** jika $a_n < a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$; **turun** jika $a_n > a_{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$. Naik atau turun disebut **monoton**.
- $\{a_n\}$ **terbatas di atas** jika ada M dengan $a_n \leq M$ untuk semua n; **terbatas di bawah** jika ada m dengan $m \leq a_n$; **terbatas** jika keduanya.

Contoh: $\{n\}$ terbatas di bawah (oleh 1) tetapi tidak di atas. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ terbatas karena $0 < a_n < 1$.

Membuktikan monoton

Dua cara: (i) bandingkan a_{n+1} dengan a_n lewat aljabar (selisih atau rasio); (ii) bentuk fungsi $f(x)$ dengan $f(n) = a_n$ lalu periksa f'.

CONTOH 11 — $\{\frac{3}{N+5}\}$ TURUN

Penyebut $n+6 > n+5$, jadi $\dfrac{3}{n+6} < \dfrac{3}{n+5}$: $a_{n+1} < a_n$.

CONTOH 12 — $A_N = \dfrac{N}{N^2+1}$ TURUN

Cara 1. Perlu $\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} < \dfrac{n}{n^2+1}$. Kalikan silang (semua penyebut positif): $(n+1)(n^2+1) < n\big((n+1)^2+1\big) \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 0 < n^2+n-1$, yang benar untuk $n \geq 1$.

Cara 2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ untuk $x > 1$; f turun pada $[1,\infty)$, jadi $f(n+1) < f(n)$.

8. Teorema Barisan Monoton

TEOREMA 12

Setiap barisan **monoton dan terbatas** adalah konvergen.

Bukti (untuk barisan naik)

Dasarnya adalah **Aksioma Kelengkapan** bilangan real: setiap himpunan tak kosong yang terbatas di atas punya *batas atas terkecil* (supremum). Aksioma ini menyatakan bahwa garis bilangan tidak berlubang.

Misalkan $\{a_n\}$ naik dan terbatas di atas. Himpunan $S = \{a_n : n \geq 1\}$ tak kosong dan terbatas di atas, jadi punya batas atas terkecil L. Untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ bukan batas atas S (karena L terkecil), sehingga ada N dengan $a_N > L - \varepsilon$. Karena barisan naik, untuk semua $n > N$ berlaku $a_n \geq a_N > L - \varepsilon$. Di sisi lain $a_n \leq L$. Jadi $|a_n - L| < \varepsilon$ untuk $n > N$, artinya $\lim a_n = L$. Untuk barisan turun terbatas di bawah, argumen serupa dengan batas bawah terbesar. ■

CATATAN

- Terbatas tidak cukup: $\{(-1)^n\}$ terbatas tetapi divergen.
- Monoton tidak cukup: $\{n\}$ monoton tetapi divergen.
- Teorema ini memberi *keberadaan* limit, bukan nilainya. Pada bab-bab berikut ia dipakai berulang kali untuk deret.

CONTOH 13 — BARISAN REKURSIF

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ (metode Newton untuk $\sqrt{2}$). Suku-sukunya:
$1,\ 1.5,\ 1.41\overline{6},\ 1.414215\ldots$

- **Terbatas di bawah.** Untuk $a > 0$, $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{2}{a}} = \sqrt{2}$ (AM–GM). Jadi $a_n \geq \sqrt{2}$ untuk semua $n \geq 2$.
- **Turun mulai $n = 2$.** Bila $a_n \geq \sqrt{2}$, maka $\frac{2}{a_n} \leq a_n$, sehingga $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leq a_n$.

Menurut Teorema 12 (berlaku juga bila monoton baru mulai dari suku kedua), barisan konvergen. Bila limitnya L, dari rekursi $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$ (positif karena $a_n \geq \sqrt{2}$).

Untuk mengamati konvergensi numerik dari barisan dengan rumus eksplisit, coba mode "Suku-suku barisan" pada kalkulator Python, misalnya $a(n) = n/(n+1)$ dengan n dari 1 sampai 12.

9. Ringkasan

- Barisan = fungsi dari bilangan bulat positif; limit berarti a_n mendekati L untuk n besar.
- Hukum limit, Teorema Apit, dan kekontinuan fungsi bekerja seperti pada limit fungsi.
- Untuk $\lim$ yang melibatkan $\frac{\infty}{\infty}$, pakai l'Hôpital pada fungsi padanannya.

- $\{r^n\}$ konvergen $\iff -1 < r \leq 1$.
- Monoton + terbatas $\Rightarrow$ konvergen (Teorema 12).

Materi 11.2 dst. (deret, uji konvergensi, deret pangkat, Taylor) belum ada di berkas yang Anda unggah.

11.2 Deret

Pada subbab sebelumnya kita mempelajari barisan: daftar bilangan yang tak berujung. Sekarang kita bertanya sesuatu yang lebih berani: apa artinya *menjumlahkan* semua anggota daftar itu? Menjumlahkan tak hingga banyak bilangan terdengar mustahil, tetapi justru dari pertanyaan inilah lahir deret pangkat, deret Taylor, dan banyak sekali metode hampiran dalam sains. Kuncinya sederhana: kita tidak pernah benar-benar menjumlahkan tak hingga suku; kita menjumlahkan sebanyak-banyaknya suku pertama, lalu melihat *ke mana jumlah itu menuju*.

1. Deret dan jumlah parsial

Diberikan barisan $\{a_n\}$. Ekspresi formal

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

disebut **deret tak hingga** (singkatnya deret). Bilangan a_n disebut suku ke-n. Karena tak mungkin menjumlahkan semuanya sekaligus, kita membentuk barisan baru dari jumlah suku-suku awal:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \ldots, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

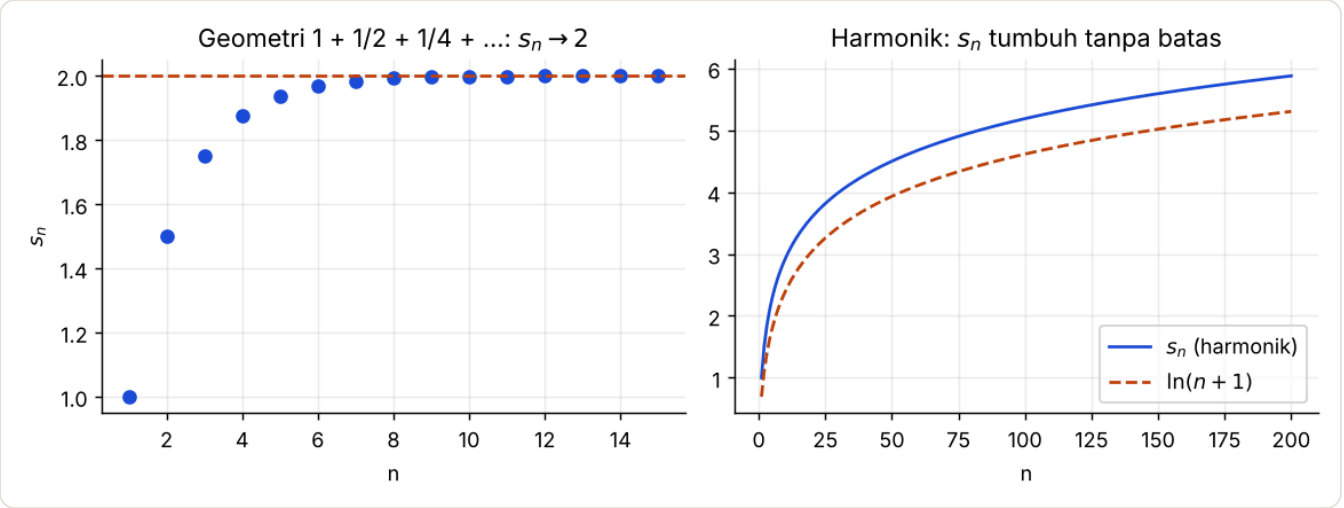
Bilangan s_n disebut **jumlah parsial ke-n**.

DEFINISI — KEKONVERGENAN DERET

Deret $\sum a_n$ disebut **konvergen** bila barisan jumlah parsial $\{s_n\}$ konvergen, yaitu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ada sebagai bilangan real. Bilangan s disebut **jumlah** deret dan kita tulis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Bila $\{s_n\}$ divergen, deretnya **divergen** dan tidak punya jumlah.

Jadi "jumlah tak hingga" adalah *limit* dari jumlah hingga. Seluruh teori deret pada dasarnya adalah teori barisan $\{s_n\}$. Perhatikan perbedaan peran: $\{a_n\}$ adalah barisan suku, $\{s_n\}$ adalah barisan jumlah parsial; keduanya sering dikacaukan.

Indeks awal tidak harus 1. Deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ atau $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ diperlakukan sama. Mengubah (atau membuang) sejumlah *berhingga* suku di awal tidak mengubah apakah deret konvergen atau tidak (hanya mengubah nilai jumlahnya); ini sangat berguna pada uji-uji di subbab berikutnya.



Kiri: jumlah parsial deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ mendekati 2 dan tidak pernah melampauinya. Kanan: jumlah parsial deret harmonik terus naik, mengikuti $\ln(n+1)$, sehingga tidak terbatas.

2. Deret geometri

Deret yang setiap suku diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan konstanta r (rasio) disebut deret geometri:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} \qquad (a \neq 0).$$

Penurunan jumlah. Untuk $r \neq 1$, kalikan $s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ dengan r:

$$r s_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

Kurangkan kedua persamaan: semua suku tengah saling meniadakan, tersisa $s_n - r s_n = a - ar^n$, sehingga

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Bila $|r| < 1$, maka $r^n \to 0$ dan $s_n \to \dfrac{a}{1-r}$. Bila $|r| > 1$, r^n tak terbatas sehingga s_n divergen. Bila $r = 1$, $s_n = na \to \pm\infty$; bila $r = -1$, s_n berayun antara a dan 0: divergen.

TEOREMA — DERET GEOMETRI

Deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ **konvergen jika** $|r| < 1$ dengan jumlah

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{\,n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\text{suku pertama}}{1-\text{rasio}},$$

dan **divergen jika** $|r| \geq 1$.

Rumus "suku pertama dibagi satu kurang rasio" adalah salah satu rumus yang paling sering dipakai dalam seluruh bab ini. Perhatikan bahwa "suku pertama" harus benar-benar suku yang pertama kali muncul pada indeks awal yang digunakan.

CONTOH 1 — GEOMETRI DENGAN RASIO NEGATIF

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\tfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

Suku pertama $a = 3$, rasio $r = -\frac{2}{5}$ dengan $|r| = \frac{2}{5} < 1$, jadi konvergen:

$$\sum = \frac{3}{1-(-2/5)} = \frac{3}{7/5} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1429.$$

Jumlah parsial berayun di sekitar $15/7$: $s_1 = 3,\ s_2 = 1{,}8,\ s_3 = 2{,}28,\ s_4 = 2{,}088, \ldots$

CONTOH 2 — MENGUBAH DESIMAL BERULANG MENJADI PECAHAN

Nyatakan $0{,}4272727\ldots = 0{,}4\overline{27}$ sebagai pecahan.

Pisahkan bagian yang tidak berulang: $0{,}4 + 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \cdots$. Mulai dari suku kedua, ini deret geometri dengan $a = 0{,}027$ dan $r = 0{,}01$:

$$0{,}027 + 0{,}00027 + \cdots = \frac{0{,}027}{1-0{,}01} = \frac{0{,}027}{0{,}99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Maka $0{,}4\overline{27} = \frac{4}{10} + \frac{3}{110} = \frac{44+3}{110} = \frac{47}{110}$. Cek: $47/110 = 0{,}427272\ldots$

CONTOH 3 — BOLA MEMANTUL

Bola dijatuhkan dari ketinggian 10 m. Setiap kali menumbuk lantai, bola memantul setinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian sebelumnya. Berapa total jarak yang ditempuh bola sampai berhenti (secara idealisasi)?

Jarak awal turun: 10 m. Setelah itu, setiap pantulan ke-k mencapai tinggi $10(3/4)^k$ dan jarak naik-turunnya adalah dua kalinya. Jadi

$$D = 10 + 2\sum_{k=1}^{\infty} 10\left(\tfrac{3}{4}\right)^{k} = 10 + 2\cdot\frac{10\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 10 + 2\cdot 30 = 70 \text{ m}.$$

Suku pertama deret di dalam adalah $10\cdot\frac{3}{4} = 7{,}5$, bukan 10: itu sebabnya kita harus teliti menetapkan "suku pertama".

CONTOH 4 — GEOMETRI BERGANTUNG X

Untuk x apa saja deret $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}$ konvergen, dan berapa jumlahnya?

Deretnya $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n$: geometri dengan $a=1$, $r=\dfrac{x-2}{3}$. Konvergen bila $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 1$, yaitu $|x-2|<3$ atau $-1<x<5$, dengan jumlah

$$\frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{3}{5-x}.$$

Untuk x di luar selang itu (termasuk ujung $x=-1$ dan $x=5$ karena $|r|=1$), deret divergen. Ini cuplikan pertama dari *deret pangkat* yang kita pelajari di subbab 11.8.

3. Deret teleskop

Tidak semua deret konvergen bersifat geometri. Kadang suku-suku jumlah parsial saling menghapus secara beruntun ("melipat" seperti teleskop). Triknya biasanya pecahan parsial.

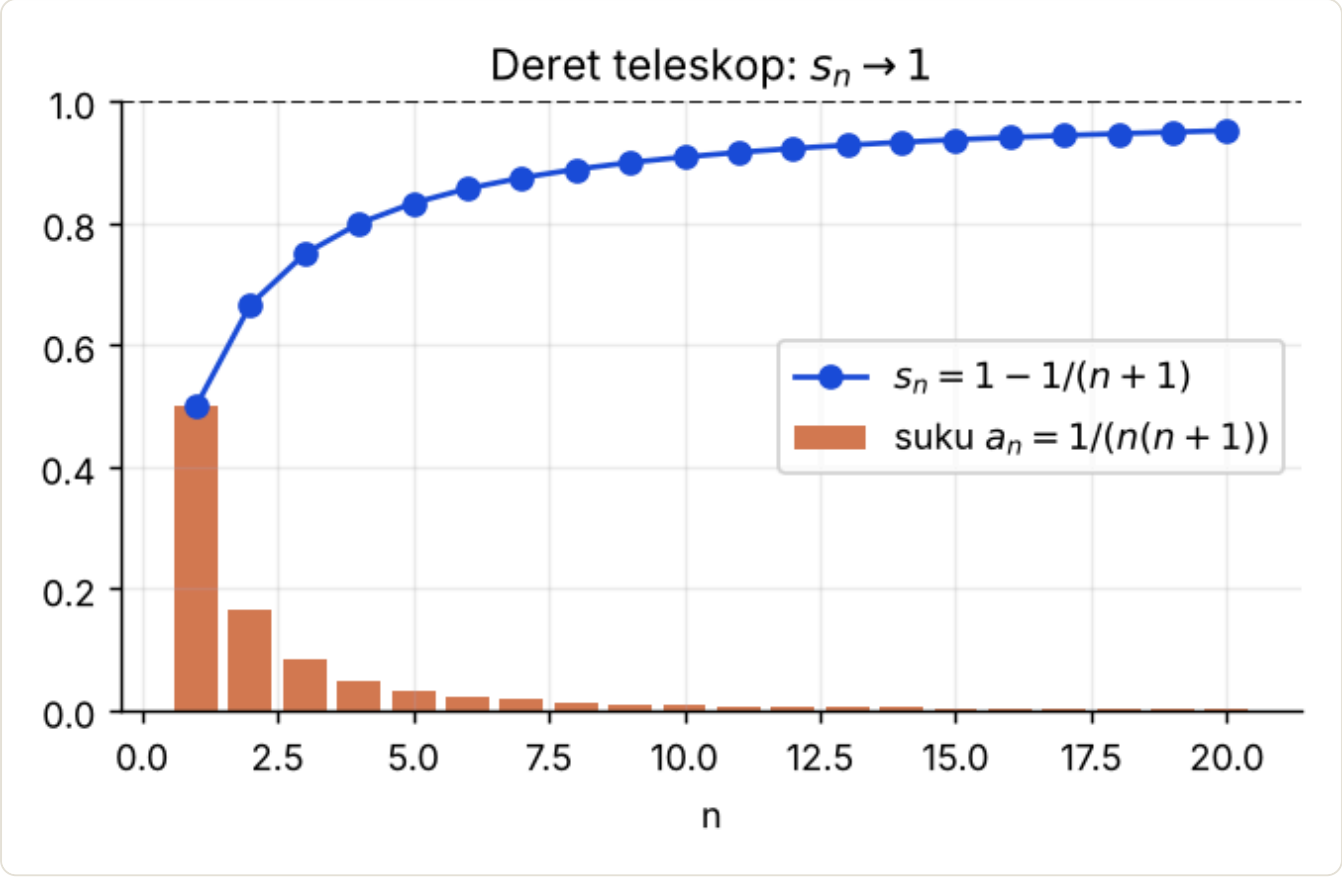
CONTOH 5 — TELESKOP DENGAN PECAHAN PARSIAL

Tentukan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Uraikan $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Maka

$$s_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Karena $s_n \to 1$, deretnya konvergen dengan jumlah 1.



Batang: suku $a_n = 1/(n(n+1))$. Titik: jumlah parsial $1 - 1/(n+1)$ yang mendekati 1.

CONTOH 6 — TELESKOP DENGAN SELISIH DUA LANGKAH

Hitung $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Faktorkan $n^2-1=(n-1)(n+1)$ dan uraikan $\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.
Sekarang suku yang saling hapus berjarak dua langkah:

$$s_N=\frac{1}{2}\left[\left(1-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N-1}-\tfrac{1}{N+1}\right)\right].$$

Yang bertahan hanyalah 1 dan $\frac{1}{2}$ di depan, serta $-\frac{1}{N}$ dan $-\frac{1}{N+1}$ di belakang:

$$s_N=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

CONTOH 7 — TELESKOP YANG DIVERGEN

Selidiki $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\!\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Tulis $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$. Maka $s_n=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty$. Deretnya *divergen*, meskipun sukunya $\ln(1+1/n)\to 0$. Contoh ini akan kita pakai untuk menunjukkan bahwa suku menuju nol tidak cukup untuk kekonvergenan.

4. Deret harmonik: suku menuju nol, tetapi deret divergen

Deret harmonik $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ adalah contoh paling terkenal. Sukunya mengecil menuju nol, tetapi jumlahnya tidak terbatas.

TEOREMA — DERET HARMONIK DIVERGEN

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergen.

Bukti (pengelompokan ala Oresme). Perhatikan jumlah parsial dengan banyak suku pangkat dua:

$$s_2=1+\tfrac{1}{2},\qquad s_4=1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)>1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)=1+\tfrac{2}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) > s_4 + 4 \cdot \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{3}{2}.$$

Secara umum, kelompok $\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}$ memiliki 2^{k-1} suku, masing-masing paling sedikit $\frac{1}{2^k}$, sehingga jumlah kelompok itu $\geq \frac{1}{2}$. Dengan induksi, $s_{2^k} \geq 1 + \dfrac{k}{2}$. Barisan $\{s_{2^k}\}$ tak terbatas, maka $\{s_n\}$ (yang naik) tak terbatas dan divergen. $\blacksquare$

Divergensinya sangat lambat: untuk melampaui 100 dibutuhkan lebih dari $e^{100} \approx 2{,}7 \times 10^{43}$ suku. Inilah alasan mengapa pengamatan numerik saja tidak boleh dipercaya untuk memutuskan kekonvergenan.

5. Uji divergensi (uji suku ke-n)

Bila deret $\sum a_n$ konvergen, jumlah parsialnya mendekati s, sehingga s_n dan s_{n-1} keduanya mendekati s. Suku $a_n = s_n - s_{n-1}$ pun harus mendekati $s - s = 0$.

TEOREMA

Jika $\sum a_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kontraposisinya adalah alat praktis:

UJI DIVERGENSI

Jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada atau tidak sama dengan 0, maka $\sum a_n$ **divergen**.

JEBAKAN YANG PALING SERING

Kebalikannya **salah**: $a_n \to 0$ *tidak* menjamin $\sum a_n$ konvergen. Deret harmonik $\sum 1/n$ dan deret $\sum \ln(1 + 1/n)$ pada Contoh 7 adalah dua contoh tandingnya. Uji divergensi hanya bisa membuktikan divergen; bila $a_n \to 0$, ia tidak berkata apa-apa dan kita harus memakai uji lain.

CONTOH 8 — MEMAKAI UJI DIVERGENSI

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$: $a_n \to \tfrac{1}{2} \neq 0$, divergen.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$: $a_n \to e \neq 0$, divergen.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}$: a_n berayun antara -1 dan 1, limitnya tidak ada, divergen.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2-3n+7}$: $a_n \to 1 \neq 0$, divergen.

6. Sifat aljabar deret

TEOREMA — KELINEARAN

Bila $\sum a_n = A$ dan $\sum b_n = B$ konvergen dan c konstanta, maka $\sum ca_n = cA$, $\sum(a_n \pm b_n) = A \pm B$.

Buktinya langsung: jumlah parsial deret gabungan adalah gabungan jumlah parsial, lalu gunakan sifat limit barisan. Dua konsekuensi yang perlu diingat: (i) konvergen $\pm$ konvergen adalah konvergen; (ii) konvergen $\pm$ divergen adalah *divergen* (bila tidak, selisihnya akan konvergen, kontradiksi). Namun divergen $\pm$ divergen tidak dapat ditebak: $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = \sum 0$ konvergen.

CONTOH 9 — MEMECAH MENJADI DUA GEOMETRI

Hitung $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$.

Pisahkan menjadi $\sum\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \sum\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$. Mulai dari $n=1$:

$$\frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

CONTOH 10 — BILA SATU BAGIAN DIVERGEN

Apakah $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$ konvergen?

Bagian pertama konvergen (geometri, jumlah 1), bagian kedua divergen (harmonik). Jumlah konvergen dan divergen adalah divergen, jadi deret itu divergen.

7. Ringkasan

- $\sum a_n$ konvergen $\iff$ barisan jumlah parsial s_n konvergen; jumlah deret adalah $\lim s_n$.
- Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen untuk $|r|<1$ dengan jumlah $\frac{a}{1-r}$; divergen untuk $|r|\geq 1$.
- Teleskop: uraikan suku menjadi selisih, tuliskan s_n, lihat apa yang bertahan.
- Harmonik $\sum 1/n$ divergen walaupun $a_n \to 0$.
- Uji divergensi: $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ divergen. Tidak dapat dipakai untuk membuktikan kekonvergenan.
- Kelinearan hanya berlaku bila kedua deret konvergen.

Pada subbab berikutnya kita mulai memutuskan kekonvergenan deret yang jumlah parsialnya tidak punya rumus tertutup, dimulai dengan Uji Integral.

11.3 Uji Integral dan Taksiran Jumlah

Pada 11.2 kita hanya bisa memutuskan kekonvergenan deret bila jumlah parsial s_n punya rumus tertutup (deret geometri, teleskop). Sebagian besar deret tidak sebaik itu. Misalnya, tidak ada rumus sederhana untuk $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, padahal kita ingin tahu apakah deretnya konvergen. Subbab ini memakai **integral** sebagai alat bantu: bila suku deret berasal dari fungsi positif yang menurun, luas di bawah kurva "terjepit" oleh jumlah deret.

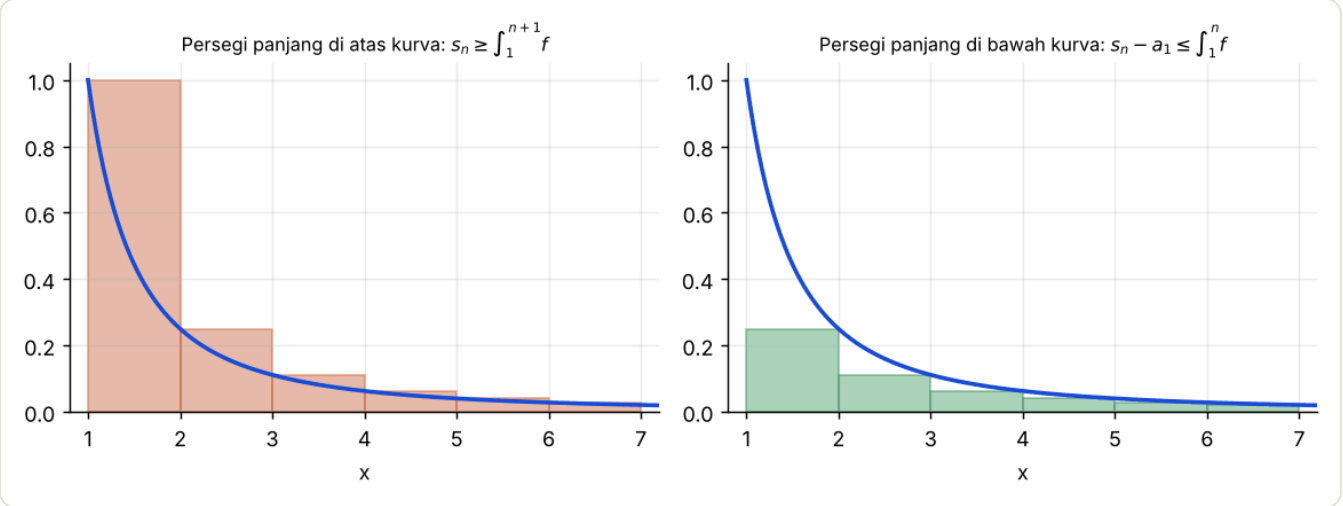
1. Gagasan: membandingkan deret dengan luas

Tinjau deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, sehingga $f(n) = \frac{1}{n^2}$. Gambarkan persegi panjang dengan alas 1 dan tinggi $f(n)$, mulai dari $x = n$ ke kanan. Karena f menurun, tiap persegi panjang berada di atas kurva, sehingga jumlah luasnya (yaitu s_n) lebih besar dari luas di bawah kurva:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \;\geq\; \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx.$$

Sebaliknya, bila persegi panjang digeser agar mulai dari $x = k - 1$ (ujung kanannya menyentuh kurva), mereka berada di bawah kurva:

$$s_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leq\; \int_{1}^{n} f(x)\,dx.$$



Kiri: persegi panjang di atas kurva, $s_n \geq \int_1^{n+1} f$. Kanan: persegi panjang di bawah kurva, $s_n - a_1 \leq \int_1^{n} f$.

Jadi jika integral $\int_1^{\infty} f$ berhingga, jumlah parsial terbatas di atas dan deret konvergen; bila integralnya tak hingga, $s_n \to \infty$ dan deret divergen. Itu isi uji berikut.

2. Uji integral

TEOREMA (UJI INTEGRAL)

Misalkan f kontinu, positif, dan menurun pada $[1, \infty)$, dan $a_n = f(n)$. Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergen} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergen.}$$

Dengan kata lain, deret dan integral tak wajar itu *sama-sama konvergen atau sama-sama divergen*.

Bukti

(Integral konvergen $\Rightarrow$ deret konvergen). Dari ketaksamaan kedua di atas, $s_n \le a_1 + \int_1^n f \le a_1 + \int_1^{\infty} f =: M$. Karena $a_n > 0$, barisan $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas oleh M, jadi konvergen menurut Teorema Barisan Monoton (11.1).

(Integral divergen $\Rightarrow$ deret divergen). Dari ketaksamaan pertama, $s_n \ge \int_1^{n+1} f \to \infty$, maka $s_n \to \infty$. $\blacksquare$

CATATAN PENTING

- Fungsi tidak perlu menurun mulai dari $x = 1$; cukup menurun pada $[N, \infty)$ untuk suatu N, sebab membuang berhingga banyak suku tidak mengubah kekonvergenan.
- Uji ini hanya menyatakan **kekonvergenan**, *bukan nilai* jumlah deret. $\int_1^{\infty} f$ umumnya berbeda dari $\sum a_n$.
- Batas bawah integral boleh disesuaikan dengan indeks awal deret.
- Syarat "positif" dan "menurun" harus diperiksa, misalnya dengan $f'(x) < 0$.

3. Deret-p

TEOREMA

Deret-p $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \le 1$.

Bukti. Bila $p \le 0$, suku $\frac{1}{n^p} \not\to 0$, jadi divergen menurut uji divergensi. Bila $p > 0$, $f(x) = x^{-p}$ positif, kontinu, dan menurun pada $[1, \infty)$. Untuk $p \neq 1$,

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p<1, \end{cases}$$

dan untuk $p=1$, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim \ln t = \infty$. Uji integral menyelesaikan bukti. ■

Kasus khusus yang perlu dihafal: $p=1$ (harmonik, divergen), $p=2$ ($\sum 1/n^2$, konvergen), $p=\frac{1}{2}$ ($\sum 1/\sqrt{n}$, divergen), $p=1{,}001$ (konvergen, walaupun sangat lambat).

4. Contoh uji integral

CONTOH 1 — $\sum \frac{1}{N^2+1}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ positif, kontinu, menurun ($f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}<0$). Maka

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{t\to\infty}\arctan t - \arctan 1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Integral konvergen, sehingga deret konvergen. (Nilai integral $\pi/4\approx 0{,}785$ berbeda dari jumlah deret $\approx 1{,}0767$, sesuai catatan di atas.)

CONTOH 2 — $\sum \frac{\mathrm{LN}\,N}{N^2}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. Turunannya $f'(x)=\dfrac{x^2\cdot\frac{1}{x}-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$, negatif bila $\ln x>\frac{1}{2}$, yaitu $x>\sqrt{e}\approx 1{,}65$. Jadi f menurun untuk $x\geq 2$; gunakan batas bawah 2 (atau 1, hasilnya sama konvergen). Dengan integral parsial ($u=\ln x,\ dv=x^{-2}dx$):

$$\int_1^{t}\frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^{t} = 1-\frac{\ln t+1}{t}\ \xrightarrow[t\to\infty]{}\ 1.$$

Integral konvergen, maka deret konvergen.

CONTOH 3 — $\sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N \ln N}$ (DIVERGEN SANGAT LAMBAT)

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ positif dan menurun pada $[2, \infty)$. Dengan substitusi $u = \ln x$:

$$\int_2^t \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \;\to\; \infty.$$

Deret divergen. Walaupun suku-sukunya menuju nol lebih cepat dari $1/n$, $\ln(\ln n)$ tumbuh sangat lambat: karena $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n} \approx \ln(\ln N) + 0{,}79$, untuk mencapai jumlah 10 dibutuhkan N sekitar 10^{4300} suku.

CONTOH 4 — $\sum N E^{-N^2}$

$f(x) = x e^{-x^2}$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} < 0$ untuk $x \geq 1$. $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_1^{\infty} = \dfrac{1}{2e}$, konvergen. Maka deret konvergen. Lebih jauh, $\sum \leq a_1 + \int_1^{\infty} f = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \approx 0{,}552$; nilai sebenarnya $\approx 0{,}4049$.

CONTOH 5 — KAPAN UJI INTEGRAL TIDAK COCOK

Untuk $\sum \dfrac{\cos^2 n}{1 + n^2}$, fungsi $\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$ tidak menurun (ia berosilasi), jadi uji integral tidak berlaku. Deret ini ditangani dengan uji perbandingan: $0 \leq \frac{\cos^2 n}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$, dan deret terakhir konvergen (Contoh 1). Lihat 11.4.

5. Menaksir jumlah deret

Seandainya kita tahu sebuah deret konvergen ke s, berapa jauh jumlah parsial s_n dari s? Galat (sisa) adalah

$$R_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Dengan gambar persegi panjang yang sama, tetapi mulai dari $x = n$ (bukan dari 1), kita peroleh jepitan untuk sisa:

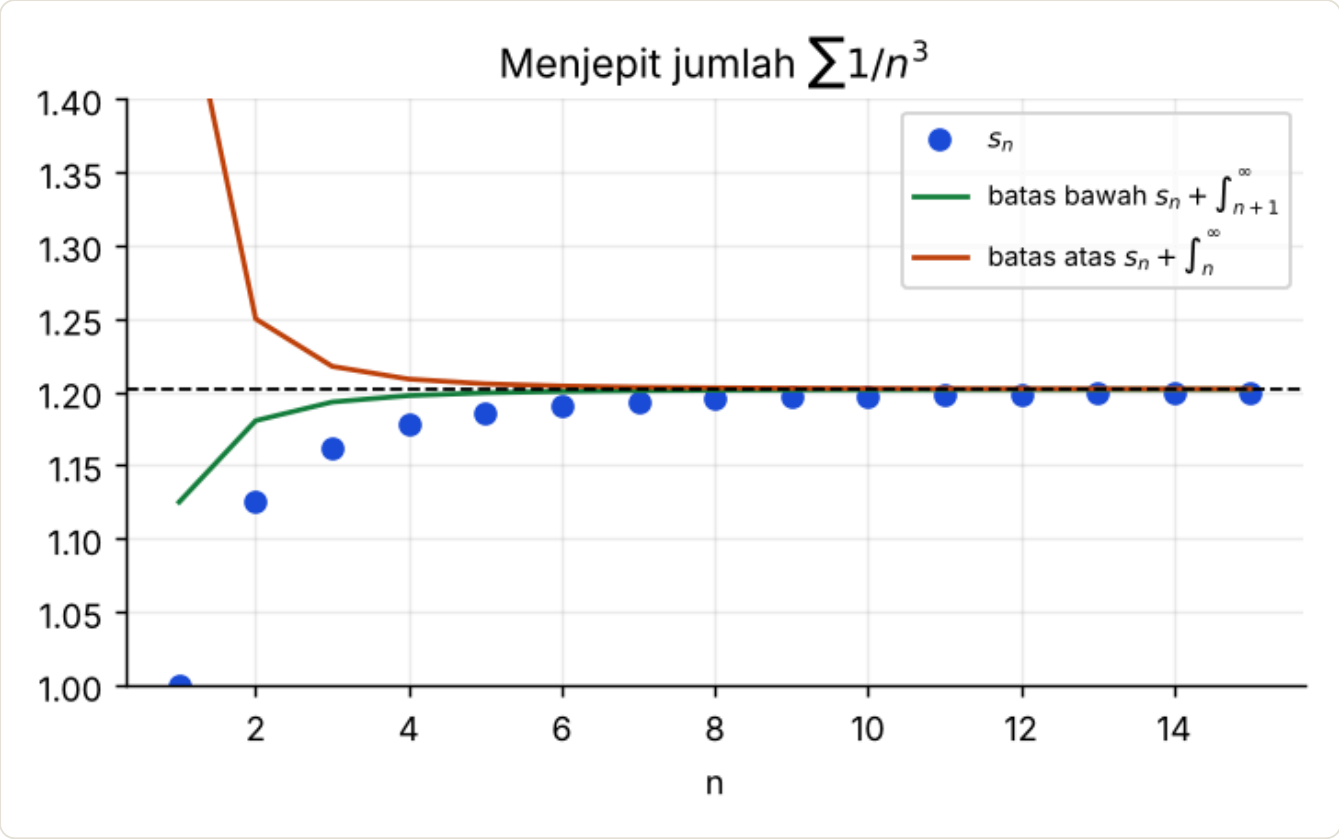
TAKSIRAN SISA (UJI INTEGRAL)

Jika f kontinu, positif, menurun pada $[n, \infty)$, dan $\sum a_k$ konvergen, maka

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; R_n \;\le\; \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Akibatnya, menambahkan batas-batas ini ke s_n menjepit jumlah sebenarnya:

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; s \;\le\; s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$



Batas bawah dan atas yang menjepit jumlah $\sum 1/n^3$ makin rapat ketika n bertambah.

CONTOH 6 — MENAKSIR $\sum \frac{1}{N^3}$ DENGAN $N = 10$

Jumlah parsial: $s_{10} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{1000} \approx 1{,}197532$. Karena $\int_n^{\infty} x^{-3}dx = \dfrac{1}{2n^2}$:

$$\text{batas atas: } \frac{1}{2\cdot 10^2} = 0{,}005, \qquad \text{batas bawah: } \frac{1}{2\cdot 11^2} \approx 0{,}004132.$$

Jadi $1{,}197532 + 0{,}004132 \le s \le 1{,}197532 + 0{,}005$, yaitu $1{,}201664 \le s \le 1{,}202532$. Kita bisa memakai titik tengah $s \approx 1{,}2021$ dengan galat maksimum $< 0{,}0005$. (Nilai sebenarnya $1{,}2020569\ldots$)

CONTOH 7 — BERAPA SUKU YANG DIBUTUHKAN?

Berapa suku $\sum \frac{1}{n^4}$ perlu dijumlahkan agar galat $< 10^{-5}$? Dari $R_n \le \int_n^\infty x^{-4}dx = \dfrac{1}{3n^3}$, kita perlu $\dfrac{1}{3n^3} < 10^{-5} \iff n^3 > 33\,333{,}3 \iff n \ge 33$ (karena $32^3 = 32\,768 < 33\,333$ dan $33^3 = 35\,937$). Dengan $n = 33$: $s_{33} \approx 1{,}082314$, sedangkan nilai eksak $\pi^4/90 \approx 1{,}082323$; selisihnya $\approx 9 \times 10^{-6} < 10^{-5}$. ✓

CONTOH 8 — TAKSIRAN UNTUK $\sum \frac{1}{N^2}$ DAN HARMONIK

(a) $\sum \frac{1}{n^2}$ dengan $n = 10$: $s_{10} \approx 1{,}549768$, $\int_{11}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{11}$, $\int_{10}^\infty = \frac{1}{10}$. Maka $1{,}6407 \le s \le 1{,}6498$; nilai eksak $\pi^2/6 \approx 1{,}6449$ ✓. Konvergensinya lambat: galat $R_n \approx 1/n$, sehingga butuh seribu suku untuk tiga desimal.

(b) Harmonik: untuk deret divergen, ketaksamaan yang sama memberi $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$. Jadi H_{1000} ada di antara $6{,}91$ dan $7{,}91$ (nilai sebenarnya $\approx 7{,}485$). Deret harmonik tumbuh seperti $\ln n$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap $\sum a_n = \int_1^\infty f$. Hanya *sifat* konvergen/divergennya yang sama.
- Memakai uji integral pada fungsi yang tidak menurun atau bernilai negatif.
- Menyimpulkan konvergen dari $a_n \to 0$. Harmonik menuju 0 tetapi divergen.
- Mengira $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p = 1$; batasnya *tegas* $p > 1$.

7. Ringkasan

- Uji integral: f positif, kontinu, menurun $\Rightarrow \sum f(n)$ dan $\int^\infty f$ sama-sama konvergen/divergen.
- Deret-p: konvergen $\iff p > 1$.
- Sisa: $\int_{n+1}^\infty f \le R_n \le \int_n^\infty f$; gunakan untuk menaksir jumlah dan menentukan banyak suku.

Lanjut ke 11.4 Uji Perbandingan, yang memanfaatkan deret-p dan geometri sebagai pembanding.

11.4 Uji Perbandingan

Uji integral hanya cocok bila suku deret mudah diintegralkan. Deret seperti $\sum \frac{1}{2^n+1}$ atau $\sum \frac{n+1}{n^3-2}$ lebih mudah ditangani bila kita *membandingkannya* dengan deret yang kekonvergenannya sudah kita kenal. Pembanding utama kita: **deret geometri** ($\sum r^n$) dan **deret-p** ($\sum 1/n^p$).

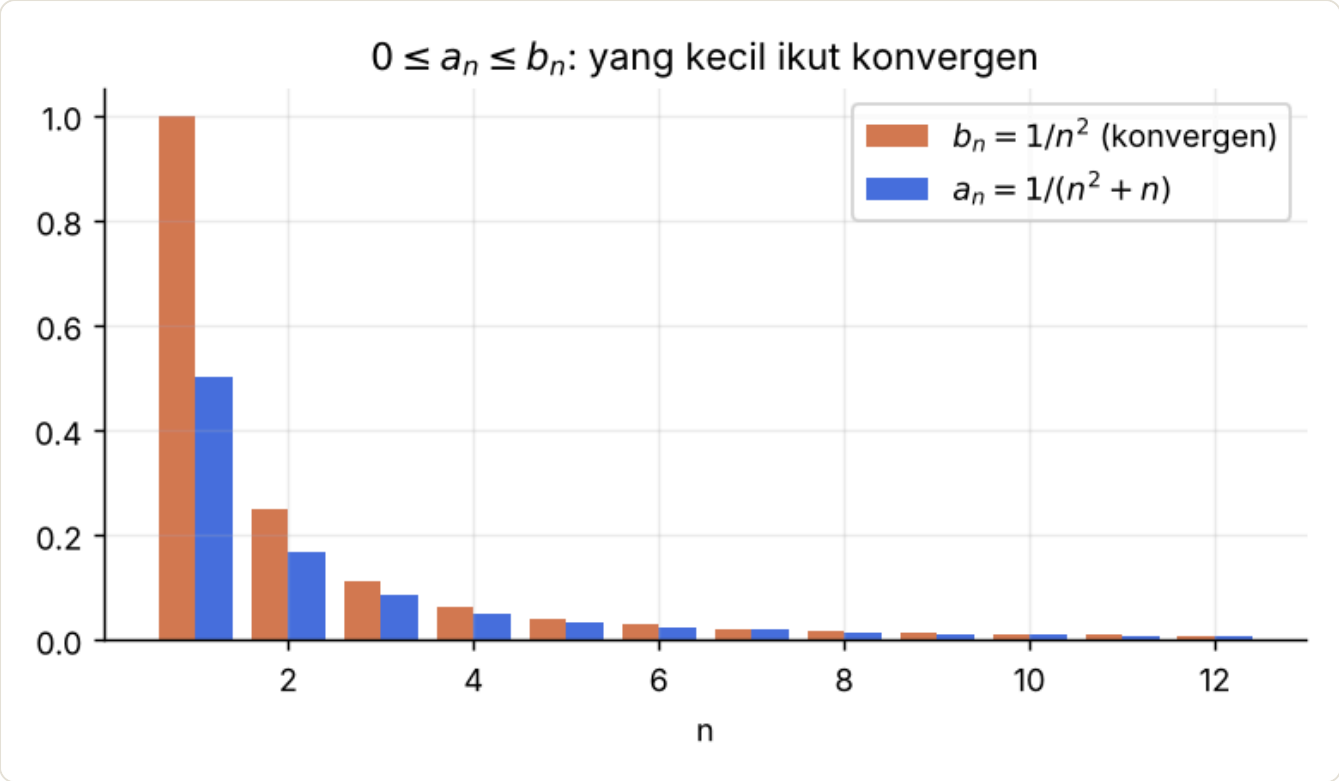
1. Uji perbandingan langsung

TEOREMA (UJI PERBANDINGAN)

Misalkan $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ deret dengan suku positif.

1. Jika $\sum b_n$ konvergen dan $a_n \le b_n$ untuk semua n, maka $\sum a_n$ konvergen.
2. Jika $\sum b_n$ divergen dan $a_n \ge b_n$ untuk semua n, maka $\sum a_n$ divergen.

Intuisi. Deret yang "lebih kecil" dari deret berjumlah hingga pasti berjumlah hingga; deret yang "lebih besar" dari deret yang meledak pasti meledak.



Batang biru (a_n) selalu di bawah batang oranye (b_n) dan $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum a_n$ konvergen.

Bukti (bagian 1)

Misalkan $s_n = \sum_{k \le n} a_k$, $t_n = \sum_{k \le n} b_k$ dan $t = \sum b_k$. Karena suku positif, s_n naik, dan $s_n \le t_n \le t$. Jadi $\{s_n\}$ naik dan terbatas di atas, sehingga konvergen (Teorema Barisan Monoton). Bagian 2 adalah kontrapositifnya: bila $\sum a_n$ konvergen, maka $\sum b_n \le \sum a_n$ juga konvergen, kontradiksi dengan divergensi $\sum b_n$. ■

> **CATATAN**
>
> Pertidaksamaan cukup berlaku untuk $n \ge N$ (suatu N), karena berhingga banyak suku awal tidak memengaruhi kekonvergenan. Arah pertidaksamaan harus **cocok** dengan sifat pembanding: "lebih kecil dari yang konvergen" atau "lebih besar dari yang divergen". Dua kombinasi lainnya tidak menghasilkan kesimpulan.

Contoh

CONTOH 1 — $\sum \frac{5}{2N^2+4N+3}$

Untuk $n \ge 1$, $2n^2 + 4n + 3 > 2n^2$, sehingga $\dfrac{5}{2n^2+4n+3} < \dfrac{5}{2n^2} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$. Deret $\frac{5}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ konvergen (deret-p, $p = 2$). Jadi deret asal konvergen.

CONTOH 2 — $\sum \frac{\ln N}{N}$ ($N \ge 3$)

Untuk $n \ge 3$, $\ln n > 1$, jadi $\dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$. Karena harmonik divergen, deret asal divergen.

CONTOH 3 — $\sum \frac{1}{2^N+1}$

$\dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{2^n}$ dan $\sum (\frac{1}{2})^n$ geometri konvergen ($r = \frac{1}{2}$). Maka konvergen.

CONTOH 4 — $\sum \frac{\sin^2 N}{N^2}$

Suku tak negatif dan $\sin^2 n \le 1$, jadi $\dfrac{\sin^2 n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Konvergen.

CONTOH 5 — PEMBANDINGAN YANG SALAH ARAH

Untuk $\sum \dfrac{1}{2^n - 1}$, kita punya $\dfrac{1}{2^n - 1} > \dfrac{1}{2^n}$, tetapi pembanding konvergen: arahnya *tidak cocok* (lebih besar dari yang konvergen tidak menyimpulkan apa-apa). Perlu uji lain, yaitu uji perbandingan limit di bawah.

2. Uji perbandingan limit

Pada Contoh 5, deret $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ jelas "berperilaku seperti" $\sum \frac{1}{2^n}$ untuk n besar. Uji berikut menjadikan intuisi itu tepat tanpa perlu mencari pertidaksamaan.

TEOREMA (UJI PERBANDINGAN LIMIT)

Misalkan $a_n, b_n > 0$ dan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad 0 < c < \infty.$$

Maka $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen.

Bukti

Pilih bilangan m, M dengan $0 < m < c < M$. Karena $a_n / b_n \to c$, ada N sehingga $m < \frac{a_n}{b_n} < M$ untuk $n > N$, yaitu $m b_n < a_n < M b_n$. Bila $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum M b_n$ konvergen, dan $a_n < M b_n$ memberi $\sum a_n$ konvergen (uji perbandingan). Bila $\sum b_n$ divergen, $\sum m b_n$ divergen dan $a_n > m b_n$ memberi $\sum a_n$ divergen. $\blacksquare$

CARA MEMILIH B_N

Ambil *suku dominan* pada pembilang dan penyebut (pangkat tertinggi), dan buang konstanta. Untuk $a_n = \dfrac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}$, pilih $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2}$.

CONTOH 6 — $\sum \frac{1}{2^N - 1}$

Ambil $b_n = \frac{1}{2^n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^n}{2^n - 1} = \dfrac{1}{1 - 2^{-n}} \to 1$. Limit positif dan berhingga; $\sum b_n$ konvergen, jadi $\sum \frac{1}{2^n - 1}$ konvergen. (Nilainya $\approx 1{,}6067$.)

CONTOH 7 — $\sum \frac{2N^2+3N}{\sqrt{5+N^5}}$

Suku dominan: $\dfrac{2n^2}{n^{5/2}} = 2n^{-1/2}$. Ambil $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Maka $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(2n^2+3n)\sqrt{n}}{\sqrt{5+n^5}} = \dfrac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{n^{5/2}\sqrt{1+5/n^5}} \to 2$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{1}{2} < 1$ divergen, maka deret asal divergen.

CONTOH 8 — $\sum \frac{1}{N^{1+1/N}}$

Ambil $b_n = \frac{1}{n}$. $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{n^{1/n}}$, dan $n^{1/n} = e^{(\ln n)/n} \to e^0 = 1$. Limit $= 1$; harmonik divergen, jadi deret divergen. Perhatikan: pangkat $1 + \frac{1}{n}$ selalu > 1, tetapi menuju 1 sehingga deret-p tidak berlaku (p harus konstan).

CONTOH 9 — $\sum \frac{N+5}{N^3-2N+1}$ UNTUK $N \geq 2$

Dominan: $\dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Rasio dengan $\frac{1}{n^2}$ menuju 1; $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka konvergen.

KASUS $C = 0$ ATAU $C = \infty$

- Jika $c = 0$ dan $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen (a_n lebih kecil kecuali untuk faktor konstan).
- Jika $c = \infty$ dan $\sum b_n$ divergen, maka $\sum a_n$ divergen.

Sisanya ($c = 0$ dengan $\sum b_n$ divergen, atau $c = \infty$ dengan $\sum b_n$ konvergen) tidak memberi kesimpulan. Contoh: $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ dibanding $\frac{1}{n^2}$: $c = 0$, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka konvergen.

3. Menaksir jumlah dengan perbandingan

Bila $a_n \leq b_n$ dan kita dapat menjumlahkan $\sum b_n$ secara eksak, maka galat pemotongan $\sum a_n$ dapat dibatasi oleh sisa deret pembanding: $R_n = \sum_{k>n} a_k \leq \sum_{k>n} b_k$.

CONTOH 10 — $\sum \frac{1}{3^N+1}$ DENGAN $N = 10$

$\frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}$. Sisa pembanding geometri: $\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty} 3^{-k} = \frac{3^{-11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^{-10}}{2} \approx 8{,}47 \times 10^{-6}$. Jumlah parsial $s_{10} \approx 0{,}404055$, maka jumlah sebenarnya ada di $[0{,}404055;\ 0{,}404063]$. (Nilai sebenarnya $\approx 0{,}4040633$.) Dalam hampir semua penggunaan praktis, empat desimal $0{,}4041$ sudah pasti benar.

4. Strategi memilih pembanding

Bentuk suku	Pembanding yang cocok
Rasional dalam n (polinomial/polinomial)	$\frac{1}{n^p}$, p = selisih derajat
Memuat $2^n, 3^n, \ldots$ di penyebut	geometri r^n
Akar: $\sqrt{n^k}$	$n^{k/2}$ pada suku dominan
Memuat $\sin n$, $\cos n$, $(-1)^n$	batas $\lvert\cdot\rvert \le 1$, banding langsung
Memuat $\ln n$	$\ln n < n^{\varepsilon}$ untuk n besar; bandingkan dengan deret-p

5. Kesalahan umum

- Arah yang tidak cocok (Contoh 5). Selalu cek: kecil terhadap konvergen, besar terhadap divergen.
- Uji perbandingan limit memerlukan suku **positif** dan limit c **positif berhingga**.
- Lupa bahwa $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergen hanya bila $p > 1$: $p = 1$ divergen.

6. Ringkasan

- Perbandingan langsung: kecil $\le$ konvergen $\Rightarrow$ konvergen; besar $\ge$ divergen $\Rightarrow$ divergen.
- Perbandingan limit: $a_n/b_n \to c \in (0, \infty) \Rightarrow$ sifat kekonvergenan sama.
- Pembanding standar: geometri dan deret-p.
- Taksiran galat dapat memakai sisa deret pembanding.

Berikutnya 11.5 Deret Berganti Tanda, yaitu deret yang sukunya tidak semua positif.

11.5 Deret Berganti Tanda

Sampai di sini semua deret yang diuji memiliki suku positif. Deret yang sukunya bergantian positif dan negatif berperilaku jauh lebih baik: pembatalan antar suku membantu kekonvergenan. Contoh terkenalnya adalah **deret harmonik berganti tanda**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

yang konvergen walaupun deret harmonik biasa divergen.

1. Deret berganti tanda

DEFINISI

Deret berganti tanda (*alternating series*) adalah deret yang suku-sukunya berganti positif dan negatif, yaitu berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad \text{atau} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n, \quad b_n > 0.$$

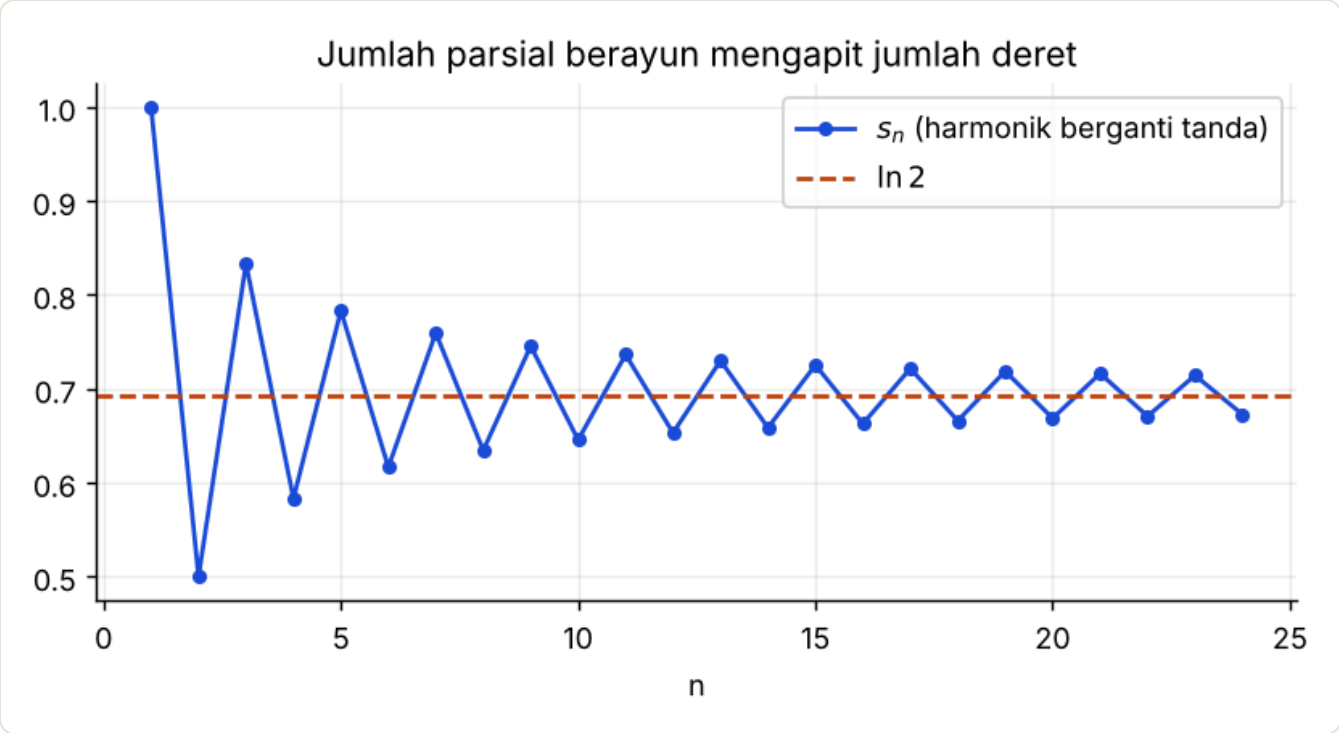
2. Uji deret berganti tanda (Leibniz)

TEOREMA

Jika deret berganti tanda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ ($b_n > 0$) memenuhi

1. $b_{n+1} \le b_n$ untuk semua n (barisan b_n menurun), dan
2. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$,

maka deret itu konvergen.



Jumlah parsial s_n berayun naik-turun dan mengapit $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

Mengapa ini benar

Perhatikan jumlah parsial:

- Jumlah parsial genap: $s_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n})$. Tiap kurung ≥ 0, jadi s_{2n} **naik**. Sekaligus $s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots - b_{2n} \leq b_1$, jadi s_{2n} **terbatas** oleh b_1. Maka $s_{2n} \to s$ (Teorema Barisan Monoton).
- Jumlah parsial ganjil: $s_{2n+1} = s_{2n} + b_{2n+1}$, dan $b_{2n+1} \to 0$, maka $s_{2n+1} \to s + 0 = s$.

Kedua subbarisan (genap dan ganjil) menuju s yang sama, sehingga $s_n \to s$. ■

Secara geometris, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots$ turun dari atas, $s_2 < s_4 < \cdots$ naik dari bawah, dan jumlah deret s selalu *terjepit* di antara dua jumlah parsial berurutan.

PERINGATAN

- Kedua syarat harus dipenuhi. Bila $b_n \not\to 0$, deret divergen menurut uji divergensi.
- Syarat menurun cukup berlaku untuk $n \geq N$ (suatu N).
- Uji ini hanya menyatakan **konvergen**; bila syaratnya gagal, uji ini *tidak* menyimpulkan divergen.

3. Contoh

CONTOH 1 — HARMONIK BERGANTI TANDA

$b_n = \frac{1}{n}$: menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Nilainya $\ln 2 \approx 0{,}6931$; lihat nanti di 11.10.)

CONTOH 2 — SYARAT $B_N \to 0$ GAGAL

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3n}{4n-1}$. Di sini $b_n = \dfrac{3n}{4n-1} \to \dfrac{3}{4} \neq 0$. Maka $\lim a_n$ tidak ada (a_n berayun mendekati $\pm\frac{3}{4}$), dan deret divergen menurut uji divergensi.

CONTOH 3 — MEMERIKSA MENURUN DENGAN TURUNAN

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{n^3+1}$. Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$. Maka $f'(x) = \dfrac{2x(x^3+1) - 3x^4}{(x^3+1)^2} = \dfrac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2} < 0$ bila $x^3 > 2$, yaitu $x > 1{,}26$. Jadi b_n menurun untuk $n \geq 2$. Juga $b_n \to 0$ (derajat penyebut lebih besar). Konvergen. (Jumlah $\approx 0{,}2396$.)

CONTOH 4 — MEMERIKSA MENURUN SECARA LANGSUNG

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (mulai dari $n = 3$). $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ untuk $x > e \approx 2{,}72$; jadi menurun untuk $n \geq 3$. Dan $\lim \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (l'Hôpital). Konvergen.

CONTOH 5 — SUKU MENGANDUNG FAKTORIAL

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$: $b_n = \dfrac{1}{n!}$ menurun dan $\to 0$. Konvergen. (Jumlahnya $e^{-1} \approx 0{,}3679$; ini adalah e^x di $x = -1$, lihat 11.10.)

CONTOH 6 — MEMERIKSA B_N MENURUN LEWAT SELISIH

$\sum (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}+n}$. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+n}$, penyebut $\sqrt{n}+n$ bertambah besar bila n naik, sehingga b_n menurun; $b_n \to 0$. Konvergen.

CONTOH 7 — DERET YANG TAMPAK BERGANTI TANDA TETAPI SYARAT MENURUN GAGAL

Misalkan $\sum(-1)^n b_n$ dengan $b_n = \dfrac{1}{n}$ untuk n genap dan $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ untuk n ganjil. Maka $b_n \to 0$, tetapi b_n *tidak menurun*: misalnya $b_3 = \frac{1}{9} < b_4 = \frac{1}{4}$. Jadi uji Leibniz tidak berlaku. Dan deret ini memang **divergen**: bagian positifnya $\sum \frac{1}{2k}$ divergen, sedangkan bagian negatifnya $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ konvergen, sehingga jumlah parsialnya tak terbatas. Moral: syarat menurun bukan formalitas.

4. Taksiran jumlah deret berganti tanda

Karena jumlah s terjepit di antara s_n dan s_{n+1}, jarak $|s - s_n|$ paling besar sama dengan jarak antara keduanya, yaitu b_{n+1}.

TEOREMA (TAKSIRAN DERET BERGANTI TANDA)

Bila $s = \sum(-1)^{n-1} b_n$ memenuhi $b_{n+1} \le b_n$ dan $b_n \to 0$, maka

$$|R_n| = |s - s_n| \le b_{n+1}.$$

Yakni galat jumlah parsial tidak melebihi **suku pertama yang dibuang**.

CONTOH 8 — JUMLAH $\sum \frac{(-1)^N}{N!}$ DENGAN GALAT $< 0{,}01$

Cari n sehingga $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} < 0{,}01 \iff (n+1)! > 100$. Karena $4! = 24$ dan $5! = 120$, cukup $n+1 = 5$, yaitu $n = 4$. Maka

$$s_4 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} = 0{,}375.$$

Galat $\le \frac{1}{120} \approx 0{,}0083 < 0{,}01$. Memang nilai sebenarnya $0{,}3679$ berjarak $0{,}0071$ dari $0{,}375$. ✓

CONTOH 9 — $\sum \frac{(-1)^{N+1}}{N^2}$ HINGGA TIGA DESIMAL

Perlu $b_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} < 0{,}001 \iff (n+1)^2 > 1000 \iff n+1 \ge 32$, jadi $n = 31$. $s_{31} \approx 0{,}82297$; nilai sebenarnya $\pi^2/12 \approx 0{,}82247$, selisih $5 \times 10^{-4} < \frac{1}{32^2} \approx 9{,}8 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 10 — HARMONIK BERGANTI TANDA KONVERGEN LAMBAT

Bahkan 1000 suku hanya memberi $s_{1000} \approx 0{,}69265$ vs $\ln 2 = 0{,}69315$; galat $\approx 5 \times 10^{-4} \approx b_{1001} \approx 10^{-3}$. Deret berganti tanda dengan $b_n \sim 1/n$ memerlukan banyak suku.

TRIK

Tebakan lebih baik: nilai tengah $\frac{s_n + s_{n+1}}{2}$ biasanya jauh lebih dekat ke jumlah sebenarnya daripada s_n.

5. Kesalahan umum

- Menganggap deret berganti tanda otomatis konvergen. Contoh 2 menunjukkan sebaliknya.
- Lupa memeriksa bahwa b_n benar-benar *menurun* (bukan hanya menuju 0).
- Memakai taksiran b_{n+1} untuk deret yang bukan berganti tanda.
- Menyimpulkan divergen dari kegagalan syarat menurun (uji ini hanya cukup, bukan perlu).

6. Ringkasan

- Leibniz: b_n menurun dan $\to 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} b_n$ konvergen.
- Galat $\le$ suku pertama yang dibuang b_{n+1}.
- Harmonik berganti tanda konvergen (ke $\ln 2$), sedangkan harmonik biasa divergen; ini mengantar pada konsep kekonvergenan bersyarat di 11.6.

11.6 Kekonvergenan Mutlak, Uji Rasio dan Akar

Deret harmonik berganti tanda konvergen, tetapi deret harmonik biasa divergen. Perbedaan ini ternyata penting: ada dua "tingkat" kekonvergenan. Subbab ini merumuskannya dan memberi dua uji yang sangat kuat untuk deret dengan faktorial atau pangkat: **uji rasio** dan **uji akar**.

1. Kekonvergenan mutlak dan bersyarat

DEFINISI

- $\sum a_n$ **konvergen mutlak** (*absolutely convergent*) jika deret nilai mutlaknya $\sum |a_n|$ konvergen.
- $\sum a_n$ **konvergen bersyarat** (*conditionally convergent*) jika $\sum a_n$ konvergen tetapi $\sum |a_n|$ divergen.

Untuk deret dengan suku positif, kedua gagasan itu sama. Contoh:

- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ konvergen mutlak (karena $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen).
- $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergen bersyarat (konvergen menurut uji Leibniz, tetapi $\sum \frac{1}{n}$ divergen).

TEOREMA

Jika $\sum |a_n|$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen. (Kekonvergenan mutlak $\Rightarrow$ kekonvergenan.)

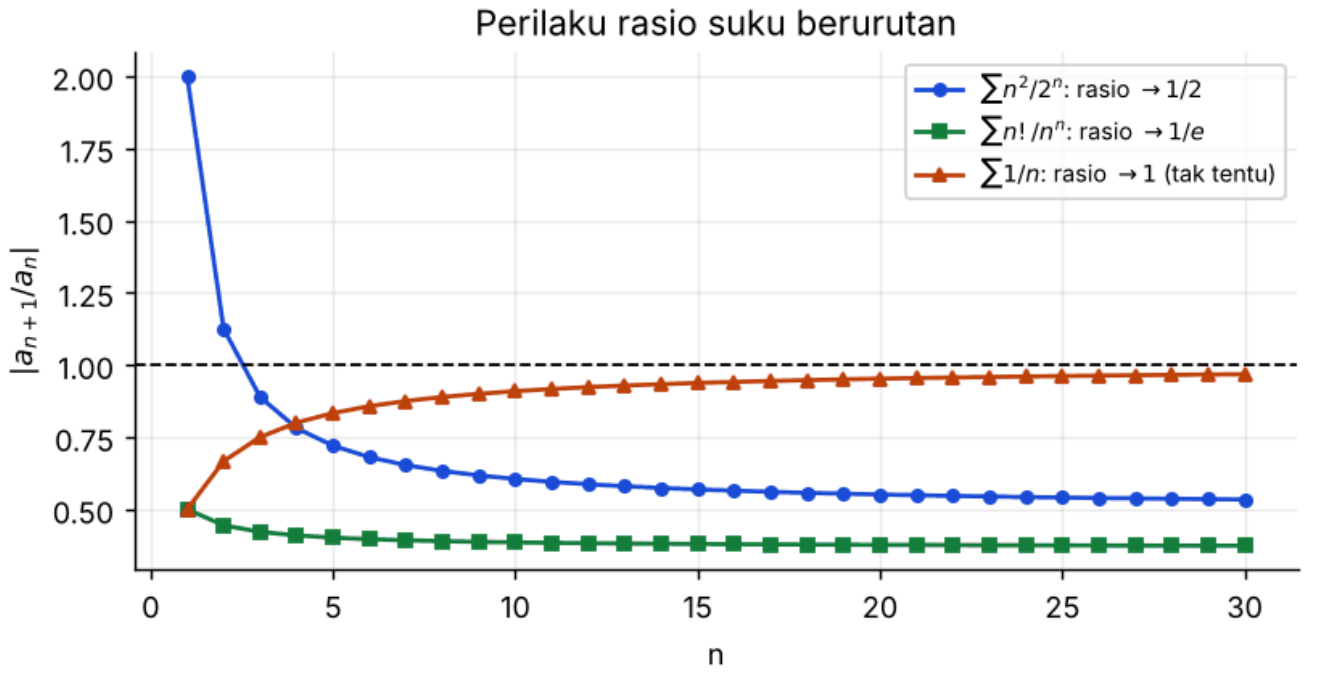
Bukti. Karena $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$, maka $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$. Deret $\sum 2|a_n|$ konvergen, jadi $\sum (a_n + |a_n|)$ konvergen menurut uji perbandingan. Lalu $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$ adalah selisih dua deret konvergen. ■

CONTOH 1 — $\sum \frac{\cos N}{N^2}$

Suku berganti tanda secara tak beraturan, sehingga uji Leibniz tidak berlaku. Tetapi $|\cos n| \le 1$, jadi $\left|\dfrac{\cos n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, dan $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen. Maka $\sum |\cos n/n^2|$ konvergen (uji perbandingan), dan deret asal konvergen mutlak, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}3241$.)

2. Uji rasio

Ide dasarnya dari deret geometri: bila rasio suku berurutan mendekati bilangan $L < 1$, deretnya "hampir geometri" dengan rasio L, jadi konvergen.



Rasio $|a_{n+1}/a_n|$ untuk tiga deret: menuju $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, dan 1 (tak tentu).

TEOREMA (UJI RASIO)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak (jadi konvergen).
2. Jika $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji **tidak menyimpulkan apa-apa**.

Bukti (kasus 1 dan 2)

(1) Pilih r dengan $L < r < 1$. Ada N sehingga $|a_{n+1}| < r|a_n|$ untuk $n \geq N$. Maka $|a_{N+k}| < r^k|a_N|$, dan $\sum_k r^k|a_N|$ geometri konvergen. Uji perbandingan memberi $\sum |a_n|$ konvergen.
(2) Bila $L > 1$, untuk n besar $|a_{n+1}| > |a_n|$, jadi $|a_n|$ membesar dan $a_n \not\to 0$. Deret divergen menurut uji divergensi. ■

Mengapa $L = 1$ tidak menyimpulkan. Untuk $\sum \frac{1}{n}$ (divergen) dan $\sum \frac{1}{n^2}$ (konvergen), rasio $\to 1$ pada keduanya. Jadi uji rasio tidak dapat membedakan; gunakan uji lain.

Contoh uji rasio

CONTOH 2 — $\sum (-1)^N \dfrac{N^3}{3^N}$

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen mutlak. (Jumlahnya $\approx 0{,}0234$.)

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{N^N}{N!}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen. (Rasio $2{,}59$ di $n = 10$, $2{,}70$ di $n = 100$, menuju e.)

CONTOH 4 — $\sum \dfrac{2^N N!}{N^N}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \dfrac{n^n}{2^n n!} = 2 \cdot \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{2}{(1+1/n)^n} \to \dfrac{2}{e} \approx 0{,}736 < 1$. Konvergen.

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{(2N)!}{(N!)^2}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4 > 1$. Divergen.

CONTOH 6 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$ DAN JUMLAHNYA

Rasio $= \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \to \dfrac{1}{2}$, jadi konvergen. Jumlahnya tepat 6 (dapat diturunkan dengan deret pangkat; lihat 11.9).

CONTOH 7 — UJI RASIO GAGAL

$\sum \dfrac{1}{n^2+1}$: rasio $= \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \to 1$. Tak ada kesimpulan; gunakan perbandingan dengan $\sum \frac{1}{n^2}$.

KAPAN MEMAKAI UJI RASIO

Cocok untuk suku yang memuat **faktorial**, **pangkat** c^n, atau hasil kali, karena faktor-faktornya saling membatalkan pada a_{n+1}/a_n. Tidak berguna untuk suku rasional murni ($L = 1$ selalu).

3. Uji akar

TEOREMA (UJI AKAR)

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, maka $\sum a_n$ konvergen mutlak.
2. Jika $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ atau $= \infty$, maka $\sum a_n$ divergen.
3. Jika $L = 1$, uji tidak menyimpulkan.

Bukti (kasus 1). Pilih r dengan $L < r < 1$. Untuk $n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, yaitu $|a_n| < r^n$. Bandingkan dengan geometri $\sum r^n$. Kasus 2: $|a_n| > 1$ tak terhingga sering, jadi $a_n \not\to 0$. ■

CONTOH 8 — $\sum \left(\frac{N}{2N+1}\right)^N$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2} < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 9 — $\sum \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N^2}$

$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$. Divergen.

CONTOH 10 — $\sum \left(\frac{2N+3}{3N+2}\right)^N$

$\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{2n+3}{3n+2} \to \dfrac{2}{3} < 1$. Konvergen.

HUBUNGAN RASIO DAN AKAR

Bila $\lim |a_{n+1}/a_n|$ ada, maka $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ ada dan sama. Uji akar sedikit lebih kuat, tetapi uji rasio biasanya lebih mudah dihitung. Untuk suku berbentuk $(\cdots)^n$, uji akar lebih cocok.

4. Penyusunan ulang suku (rearrangement)

Pada jumlah berhingga, urutan penjumlahan tidak berpengaruh. Pada deret tak hingga, bergantung pada jenis kekonvergenan:

- **Konvergen mutlak:** penyusunan ulang suku *tidak* mengubah jumlah (Dirichlet).
- **Konvergen bersyarat:** penyusunan ulang dapat menghasilkan jumlah berbeda, bahkan sembarang bilangan real atau divergen (Teorema Riemann).

CONTOH 11 — MENYUSUN ULANG HARMONIK BERGANTI TANDA

Jumlah aslinya $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$. Susun ulang dengan pola "dua suku positif, satu suku negatif":

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Hitungan numerik dengan dua juta kelompok memberi $\approx 1{,}03972$, yaitu $\frac{3}{2}\ln 2$. Jadi suku-suku yang sama, urutan berbeda, jumlah berbeda: $\frac{3}{2}\ln 2 \neq \ln 2$.

Alasan: $\sum_{\text{positif}} = \infty$ dan $\sum_{\text{negatif}} = -\infty$. Kita dapat "memborong" suku positif sampai melewati target, lalu suku negatif sampai di bawahnya, berulang, sehingga jumlah parsial menuju target mana saja.

5. Peta uji sejauh ini

Ciri deret	Uji
Suku tidak menuju 0	Uji divergensi
Geometri / deret-p	Rumus langsung
Teleskop	Jumlah parsial
$f(n)$ mudah diintegralkan	Uji integral
Rasional, akar, pangkat	Perbandingan / perbandingan limit
Berganti tanda	Leibniz; periksa kemutlakan
Faktorial, c^n, hasil kali	Uji rasio
Berbentuk $(\ldots)^n$	Uji akar

6. Kesalahan umum

- Menyimpulkan konvergen dari $L = 1$ pada uji rasio atau akar.
- Menganggap kekonvergenan bersyarat sama baiknya dengan mutlak: hanya yang mutlak boleh disusun ulang bebas.
- Lupa nilai mutlak pada rasio untuk deret berganti tanda.
- Salah menghitung a_{n+1}: ganti *setiap* n dengan $n + 1$, termasuk faktorial dan pangkat.

7. Ringkasan

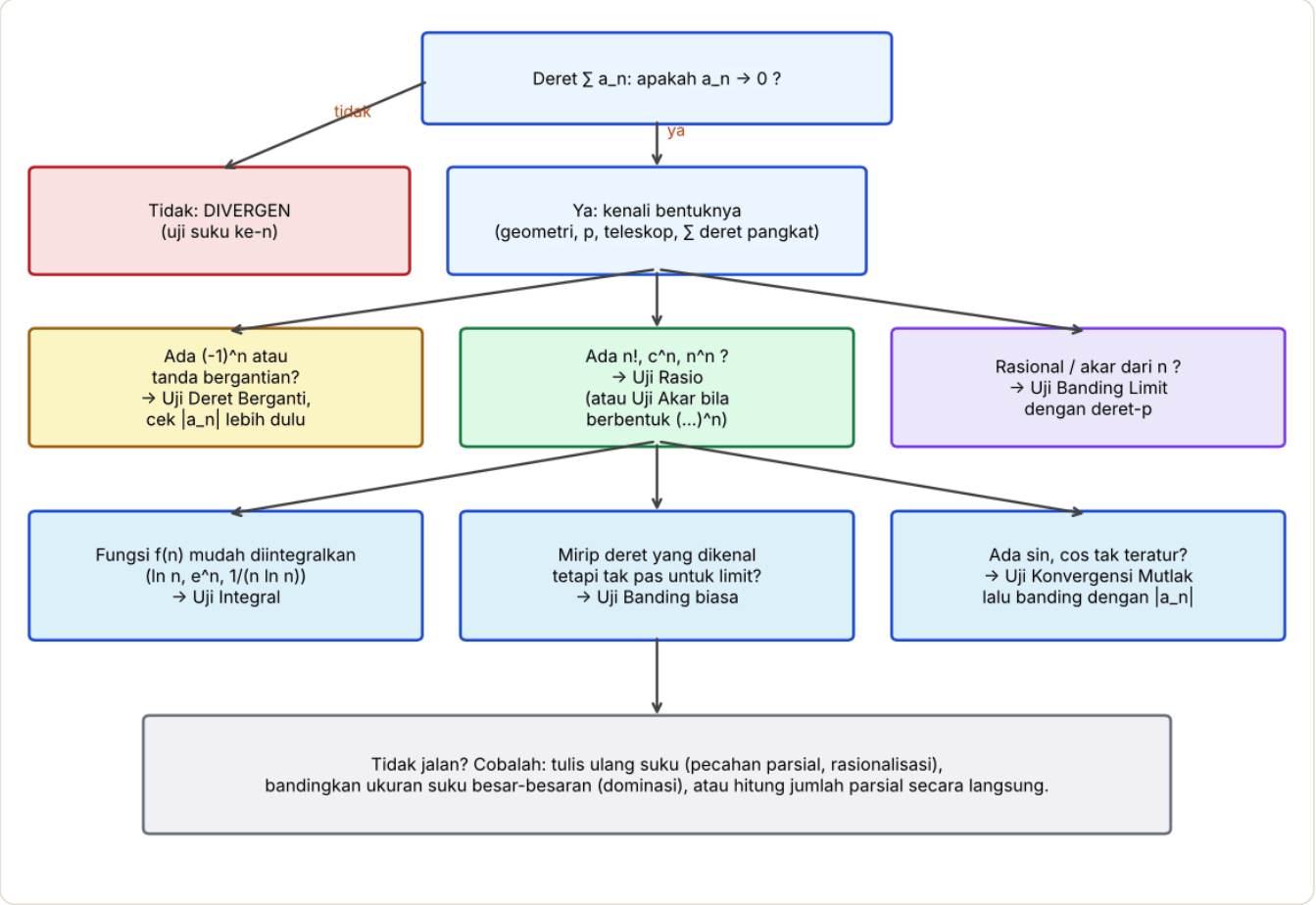
- Mutlak $\Rightarrow$ konvergen; sebaliknya tidak berlaku (harmonik berganti tanda).
- Uji rasio: $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$; < 1 konvergen mutlak, > 1 divergen, $= 1$ tak tentu.
- Uji akar: $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, aturan sama.
- Penyusunan ulang aman hanya untuk deret konvergen mutlak.

Subbab berikutnya, 11.7, merangkum semua uji menjadi strategi memilih.

11.7 Strategi Menguji Deret

Kita sudah punya banyak uji kekonvergenan: uji divergensi, integral, perbandingan, perbandingan limit, Leibniz, rasio, akar, ditambah deret geometri, deret-p, dan deret teleskop. Kesulitan baru muncul: *uji mana yang dipakai untuk deret tertentu?* Tidak ada resep mekanis yang selalu benar, tetapi ada urutan pertimbangan yang hampir selalu menolong. Subbab ini merangkumnya dan melatihnya pada banyak contoh.

1. Langkah-langkah strategi



Alur keputusan: mulai dari uji divergensi, lalu kenali bentuk suku.

1. **Cek dulu apakah $a_n \to 0$.** Bila tidak (atau limit tidak ada), deret divergen menurut uji divergensi. Langkah ini cepat dan sering menyelesaikan soal.
2. **Kenali deret standar.**
   - Geometri $\sum ar^{n-1}$: konvergen bila $|r| < 1$, jumlah $\frac{a}{1-r}$.
   - Deret-p $\sum \frac{1}{n^p}$: konvergen bila $p > 1$.
   - Teleskop: uraikan dengan pecahan parsial, lihat suku yang bertahan.

3. **Suku rasional atau memuat akar dari polinomial** $\Rightarrow$ uji perbandingan limit dengan $\frac{1}{n^p}$ dari suku dominan; bila ada pertidaksamaan jelas, perbandingan langsung.
4. **Berganti tanda** ($(-1)^n$) $\Rightarrow$ uji Leibniz; bila gagal, periksa uji rasio atau uji divergensi. Lalu periksa kemutlakan: apakah $\sum |a_n|$ konvergen?
5. **Faktorial, pangkat c^n, atau hasil kali/pembagian dalam n** $\Rightarrow$ uji rasio. Bila seluruh suku berpangkat n: uji akar.
6. **Suku $a_n = f(n)$ dengan f mudah diintegralkan dan menurun** $\Rightarrow$ uji integral (misalnya $\frac{1}{n(\ln n)^p}$, ne^{-n^2}).
7. **Bila semua gagal**: tulis ulang suku (rasionalkan akar, pecahan parsial, identitas trigonometri), atau cari batas dengan $|\sin| \le 1$, $\ln n < n^{\varepsilon}$.

DUA JEBAKAN YANG PALING SERING

- Uji rasio dan akar *gagal* ($L = 1$) untuk suku rasional murni. Jangan buang waktu; pakai perbandingan.
- Uji divergensi tidak pernah membuktikan kekonvergenan. $a_n \to 0$ hanyalah syarat perlu.

2. Contoh-contoh

Untuk tiap deret, tentukan konvergen/divergen, dan jelaskan ujinya.

CONTOH 1 — $\sum \dfrac{N-1}{3N+1}$

$\lim \dfrac{n-1}{3n+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Divergen (uji divergensi).

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{\sqrt{N^3+1}}{3N^3+4N^2+2}$

Suku dominan: $\dfrac{n^{3/2}}{3n^3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Bandingkan limit dengan $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{1}{3}$. Deret-$p$ dengan $p = \frac{3}{2} > 1$ konvergen, jadi konvergen. (Jumlahnya $\approx 0{,}591$.)

CONTOH 3 — $\sum NE^{-N^2}$

Fungsi xe^{-x^2} mudah diintegralkan: $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2e}$. Menurun untuk $x \ge 1$. Konvergen (uji integral). Uji rasio juga bisa: $\dfrac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n}e^{-2n-1} \to 0$.

CONTOH 4 — $\sum (-1)^N \dfrac{3^N}{N^2 2^N}$

Berganti tanda, tetapi $\dfrac{(3/2)^n}{n^2} \to \infty$ (eksponensial mengalahkan polinomial). Suku tidak menuju 0, jadi divergen. (Uji rasio juga memberi $L = \frac{3}{2} > 1$.)

CONTOH 5 — $\sum \dfrac{N!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3N+2)}$

Faktorial dan hasil kali: uji rasio. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)}{3(n+1)+2} = \dfrac{n+1}{3n+5} \to \dfrac{1}{3} < 1$. Konvergen.

CONTOH 6 — $\sum_{N=2}^{\infty} \dfrac{1}{N(\mathrm{LN}\, N)^2}$

Uji integral: dengan $u = \ln x$, $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \Big[-\frac{1}{\ln x}\Big]_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$. Konvergen. Bandingkan dengan $\sum \frac{1}{n \ln n}$ yang divergen: pangkat tambahan pada $\ln n$ mengubah hasil.

CONTOH 7 — $\sum \left(\dfrac{\mathrm{LN}\, N}{N}\right)^N$

Seluruh suku berpangkat n: uji akar. $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\ln n}{n} \to 0 < 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 8 — $\sum N \,\mathrm{SIN}\, \dfrac{1}{N}$

$n \sin \frac{1}{n} = \dfrac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1 \neq 0$. Divergen (uji divergensi). Sebaliknya $\sum \sin \frac{1}{n}$ divergen karena $\sin(1/n)\big/\frac{1}{n} \to 1$ dan harmonik divergen (perbandingan limit).

CONTOH 9 — $\sum (-1)^N \dfrac{1}{\sqrt{N}+1}$

Berganti tanda dengan $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ menurun dan $\to 0$, jadi konvergen (Leibniz). Kemutlakan: $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ dibandingkan $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (limit 1), divergen. Jadi **konvergen bersyarat**.

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{\mathrm{COS}\, N}{N^{3/2}}$

Tanda tak beraturan. $\left|\dfrac{\cos n}{n^{3/2}}\right| \le \dfrac{1}{n^{3/2}}$ dan $p = \frac{3}{2} > 1$. Konvergen mutlak.

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}$ (RASIONALKAN)

$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$: deret teleskop dengan $s_n = \sqrt{n+1}-1 \to \infty$. Divergen. (Alternatif: dominan $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, $p=\frac{1}{2}$.)

CONTOH 12 — $\sum \dfrac{2^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{2}{n+1} \to 0$. Konvergen (jumlahnya e^2-1 bila mulai dari $n=1$; lihat 11.10).

CONTOH 13 — $\sum \dfrac{\ln N}{N^2}$

$\ln n < \sqrt{n}$ untuk n cukup besar, jadi $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$, konvergen (perbandingan). Atau uji integral seperti pada 11.3.

3. Tabel ringkas

Bentuk deret	Uji pertama
$\sum ar^n$	geometri
$\sum 1/n^p$	deret-p
polinom/polinom	perbandingan limit dengan $1/n^p$
$n!$, c^n, $\binom{2n}{n}$	rasio
$(\dots)^n$	akar
$(-1)^n b_n$	Leibniz, lalu kemutlakan
$f(n)$, f mudah diintegralkan	integral
$a_n \not\to 0$	divergensi

4. Ringkasan

- Selalu mulai dengan uji divergensi dan pengenalan deret standar.

- Pilih uji berdasarkan bentuk suku: rasional (perbandingan), faktorial/eksponensial (rasio), pangkat-n (akar), berganti tanda (Leibniz), integrabel (integral).
- Bila satu uji tidak menyimpulkan, ganti uji; jangan memaksa.

Mulai 11.8, sukunya mengandung peubah x: deret pangkat.

11.8 Deret Pangkat

Sampai sekarang suku deret berupa bilangan. Bila suku-sukunya adalah fungsi dari x, deret itu mendefinisikan sebuah *fungsi* (nilainya jumlah deret untuk tiap x yang membuatnya konvergen). Kelas fungsi yang paling penting dibangun dari pangkat x, mirip polinomial berderajat tak hingga: **deret pangkat**.

1. Definisi

DEFINISI

Deret pangkat dalam x adalah deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

dengan c_n konstanta (**koefisien**). Lebih umum, **deret pangkat dalam** $(x - a)$ (atau berpusat di a):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots.$$

Untuk tiap x tetap, ini adalah deret bilangan biasa yang kekonvergenannya dapat diuji. Pertanyaan kunci: *untuk x mana deretnya konvergen?* Selalu konvergen di pusat $x = a$ (semua suku kecuali c_0 nol).

Contoh paling sederhana: deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ konvergen ke $\dfrac{1}{1-x}$ bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| \geq 1$. Jadi daerah konvergennya adalah *selang* $(-1, 1)$.

2. Uji rasio untuk deret pangkat

CONTOH 1 — $\sum N!\, X^N$

Rasio: $\left|\dfrac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$ bila $x \neq 0$. Divergen untuk semua $x \neq 0$; konvergen hanya di $x = 0$.

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{(X-3)^N}{N}$

$\left|\dfrac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x-3| \to |x-3|$. Konvergen mutlak bila $|x-3|<1$ ($2<x<4$), divergen bila $|x-3|>1$. Titik ujung:

- $x=4$: $\sum \frac{1}{n}$, harmonik, divergen.
- $x=2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen (Leibniz).

Jadi daerah konvergen adalah $[2,4)$: ujung kiri ikut, ujung kanan tidak.

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{X^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$ untuk *setiap* x. Konvergen untuk semua bilangan real. (Ini deret untuk e^x.)

3. Teorema radius kekonvergenan

TEOREMA

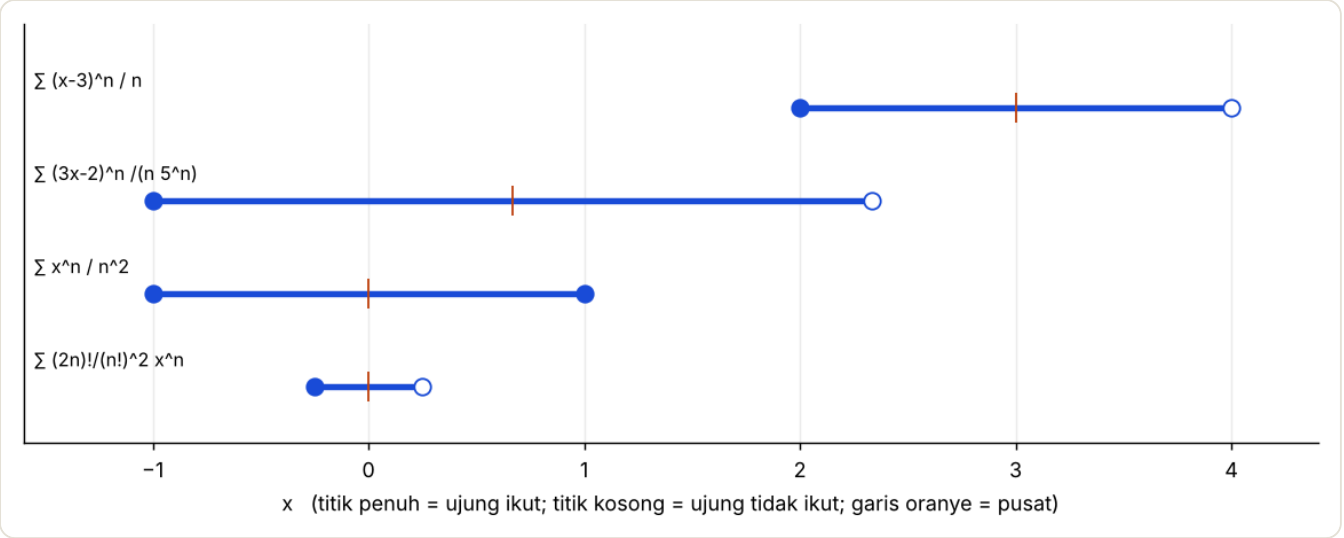
Untuk deret pangkat $\sum c_n(x-a)^n$, hanya ada tiga kemungkinan:

1. deret konvergen hanya di $x=a$;
2. deret konvergen untuk semua x;
3. ada bilangan $R>0$ sehingga deret konvergen mutlak bila $|x-a|<R$ dan divergen bila $|x-a|>R$.

Bilangan R disebut **radius kekonvergenan** ($R=0$ pada kasus 1, $R=\infty$ pada kasus 2). Himpunan x tempat deret konvergen disebut **selang kekonvergenan**: $(a-R, a+R)$ ditambah mungkin salah satu atau kedua titik ujung.

Gagasan bukti. Jika deret konvergen di $x=b$, maka suku-suku $c_n b^n$ terbatas; untuk $|x|<|b|$, $|c_n x^n| \le M\,|x/b|^n$, yaitu dibatasi oleh deret geometri konvergen. Jadi kekonvergenan di satu titik memaksa kekonvergenan mutlak di semua titik yang lebih dekat ke pusat.

Cara menghitung R. Terapkan uji rasio (atau akar) pada $|c_n(x-a)^n|$; bila $\lim\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$, maka $R = \dfrac{1}{L}$ (dengan $R=\infty$ bila $L=0$, $R=0$ bila $L=\infty$). **Titik ujung harus diperiksa tersendiri**, karena uji rasio selalu gagal di sana ($L=1$).



Selang kekonvergenan beberapa deret. Titik penuh = ujung ikut, titik kosong = tidak; garis oranye menandai pusat.

4. Contoh mencari selang

CONTOH 4 — $\sum \frac{X^N}{N^2}$

Rasio koefisien $\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, jadi $R = 1$. Ujung: $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergen. Selang $[-1, 1]$.

CONTOH 5 — $\sum \frac{(3X-2)^N}{N\,5^N}$

Uji rasio: $\frac{|3x-2|}{5} < 1 \iff |3x-2| < 5 \iff -1 < x < \frac{7}{3}$. Ujung:

- $x = -1$: $3x - 2 = -5$, deret $\sum \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen.
- $x = \frac{7}{3}$: $3x - 2 = 5$, deret $\sum \frac{1}{n}$, divergen.

Selang $[-1, \frac{7}{3})$. Perhatikan: pusatnya $x = \frac{2}{3}$ dan $R = \frac{5}{3}$ (bukan 5; faktor 3 pada $3x$ harus dikeluarkan: $|3x-2| = 3|x - \frac{2}{3}|$).

CONTOH 6 — FUNGSI BESSEL $J_0(X) = \sum \frac{(-1)^N X^{2N}}{2^{2N}(N!)^2}$

Rasio: $\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0$. Konvergen untuk semua x ($R = \infty$). Fungsi ini muncul pada getaran membran lingkaran (drum) dan penyebaran panas dalam silinder.

CONTOH 7 — KOEFISIEN BINOMIAL TENGAH, $\sum \binom{2N}{N} X^N$

Koefisien $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$; $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$, jadi $R = \frac{1}{4}$. Ujung $x = \frac{1}{4}$: suku $\binom{2n}{n}4^{-n} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (tidak menuju 0 secepat $1/n$); jumlahnya diverge karena $\sum n^{-1/2}$ divergen. Ujung $x = -\frac{1}{4}$: berganti tanda, $b_n = \binom{2n}{n}4^{-n}$ menurun (rasio $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$) dan $\to 0$, jadi konvergen. Selang $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

CONTOH 8 — HANYA ADA PANGKAT GENAP: $\sum \dfrac{X^{2N}}{4^N}$

Ini geometri dengan rasio $\dfrac{x^2}{4}$: konvergen bila $x^2 < 4$, yaitu $|x| < 2$. Ujung $x = \pm 2$: suku $= 1$, divergen. Selang $(-2, 2)$, $R = 2$. (Uji rasio pada koefisien saja salah karena banyak koefisien nol; gunakan uji rasio pada *suku*.)

5. Turunan dan integral deret pangkat

TEOREMA (DIFERENSIASI DAN INTEGRASI SUKU DEMI SUKU)

Jika $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ mempunyai radius $R > 0$, maka f terdiferensialkan pada $(a - R, a + R)$, dan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \qquad \int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Kedua deret ini mempunyai radius kekonvergenan yang *sama* dengan R (selang di titik ujung boleh berubah).

Artinya deret pangkat boleh diturunkan dan diintegralkan seperti polinomial, tetapi hanya di dalam selang $|x - a| < R$.

CONTOH 9 — TURUNAN DERET GEOMETRI

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pada $|x| < 1$. Turunkan: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. Ujung $x = \pm 1$ kini divergen (suku tidak menuju 0), jadi selang tetap $(-1, 1)$.

CONTOH 10 — TURUNAN E^X

Misalkan $f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ (Contoh 3). $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$. Jadi $f' = f$ dan $f(0) = 1$, maka $f(x) = e^x$. Ini penjelasan mengapa deret itu mewakili fungsi eksponensial.

CONTOH 11 — MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN DERET

Cari deret pangkat solusi $y'' = -y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Tulis $y = \sum c_n x^n$; $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$. Menyamakan koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = -c_n$. Dari $y(0) = 0$: $c_0 = 0$; $y'(0) = 1$: $c_1 = 1$. Maka $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{6}$, $c_5 = \frac{1}{120}$, ... yaitu $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x$.

6. Kesalahan umum

- Lupa memeriksa titik ujung selang.
- Salah mengira radius pada deret seperti $\sum (3x-2)^n$: ubah ke bentuk $|x - a| < R$.
- Memakai rasio koefisien bila ada koefisien nol; pakai rasio suku lengkap.
- Menganggap selang turunan sama persis dengan selang fungsi (titik ujung bisa berubah).

7. Ringkasan

- Deret pangkat: $\sum c_n (x-a)^n$; selang kekonvergenannya berpusat di a dengan radius $R \in [0, \infty]$.
- Hitung R dengan uji rasio/akar; periksa ujung dengan uji lain.
- Boleh diturunkan dan diintegralkan suku demi suku dalam $|x - a| < R$.

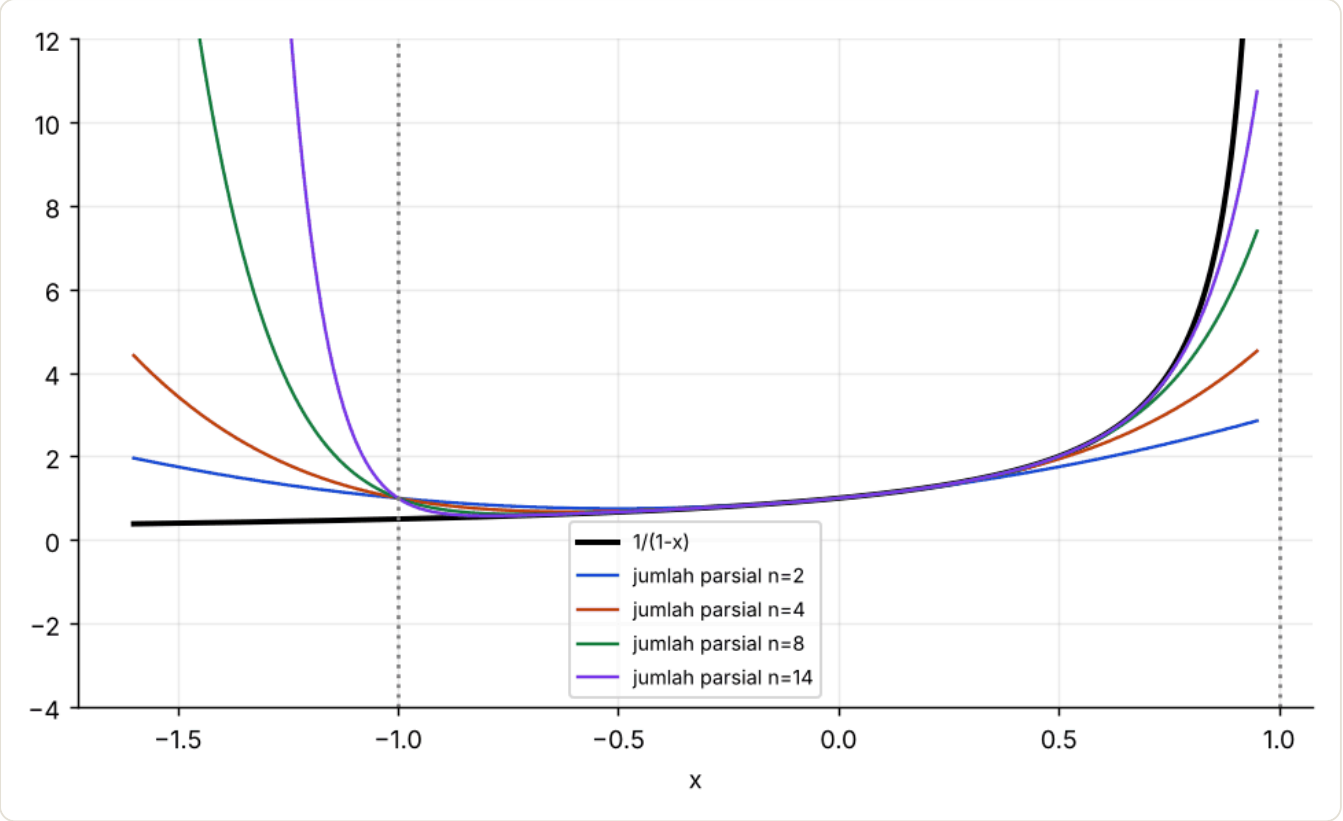
Selanjutnya 11.9: menyatakan fungsi-fungsi sebagai deret pangkat.

11.9 Representasi Fungsi sebagai Deret Pangkat

Pada 11.8 kita mulai dari deret pangkat dan bertanya fungsi apa yang diwakilinya. Sekarang kita membalik arah: *diberikan sebuah fungsi, nyatakan sebagai deret pangkat.* Alasan praktisnya kuat: deret pangkat dapat diintegralkan, diturunkan, dan dihitung nilainya dengan hanya penjumlahan dan perkalian. Pada subbab ini kita memakai satu "bahan dasar" saja: **deret geometri**, ditambah turunan dan integral suku demi suku.

1. Bahan dasar: deret geometri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$



Jumlah parsial mendekati $\frac{1}{1-x}$ di dalam $(-1, 1)$ dan menyimpang di luarnya.

Ide umum: ubah fungsi menjadi bentuk $\dfrac{\text{sesuatu}}{1-(\text{rasio})}$, lalu ganti dengan $\sum(\text{rasio})^n$. Kekonvergenan terjadi bila $|\text{rasio}| < 1$.

2. Substitusi dan perkalian

CONTOH 1 — $\dfrac{1}{1+X^2}$

Ganti x dengan $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Radius $R = 1$ (karena $|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$).

CONTOH 2 — $\dfrac{1}{2+X}$

Keluarkan faktor agar menjadi bentuk $\frac{1}{1-r}$: $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x/2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$. Konvergen bila $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, jadi $R = 2$. Nilai $R = 2$ wajar: pembagi $2 + x$ nol di $x = -2$, jarak 2 dari pusat 0.

CONTOH 3 — $\dfrac{X^3}{X+2}$

Dari Contoh 2: $\dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$. Radius tetap 2 (perkalian dengan x^3 tidak mengubah R). Tulisan beberapa suku: $\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} - \cdots$.

CONTOH 4 — PECAHAN PARSIAL: $\dfrac{3}{(1-X)(2+X)}$

Uraikan: $\dfrac{3}{(1-x)(2+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2+x}$ (cek: $\frac{(2+x)+(1-x)}{(1-x)(2+x)} = \frac{3}{\cdots}$ ✓). Deret: $\sum x^n + \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$, berlaku untuk $|x| < 1$ (irisan $|x| < 1$ dan $|x| < 2$).

3. Turunan dan integral suku demi suku

Berdasarkan 11.8, bila $f = \sum c_n x^n$ (radius R), maka f' dan $\int f$ diperoleh dengan menurunkan/mengintegralkan tiap suku, dengan radius yang sama.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1-X)^2}$

Turunkan $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x| < 1$.

CONTOH 6 — $\mathrm{LN}(1+X)$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ($|x| < 1$). Integralkan dari 0 ke x:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Konstanta integrasi nol karena $\ln 1 = 0$ di $x = 0$. Radius 1. Di $x = 1$ deret menjadi harmonik berganti tanda yang konvergen; sehingga $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ (hasil ini dibuktikan di 11.10).

CONTOH 7 — $\mathrm{ARCTAN}\,X$

Integralkan Contoh 1: $\arctan x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots$, $|x| < 1$. Di $x = 1$ deret konvergen (Leibniz). Hasilnya, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (\text{deret Gregory–Leibniz}).$$

Konvergensinya sangat lambat: 1000 suku hanya memberi akurasi sekitar 10^{-3}. Pendekatan lebih cepat: $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$, dan deret $\arctan x$ di $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ konvergen cepat.

CONTOH 8 — $\mathrm{LN}\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$

$\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2} = 2\sum x^{2n}$. Integralkan: $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$. Berguna untuk menghitung logaritma: bila $x = \frac{1}{3}$ maka $\frac{1+x}{1-x} = 2$, sehingga $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots\right) \approx 0{,}6931$ dengan beberapa suku saja.

4. Menjumlahkan deret bilangan

Bila kita tahu fungsi untuk sebuah deret pangkat, kita dapat memperoleh jumlah deret bilangan dengan mensubstitusi x.

CONTOH 9 — $\sum \dfrac{N}{2^N}$

Dari Contoh 5: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Pada $x = \frac{1}{2}$ (di dalam $|x| < 1$):

$$\sum \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2.$$

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$

Kalikan $\sum nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ dengan x setelah menurunkan: $\sum n^2 x^n = x\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \dfrac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$. Jadi $\sum \dfrac{n^2}{2^n} = 6$ (ini yang kita pakai di 11.6).

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{(-1)^N}{N\,2^N}$

Dari deret $\ln(1+x)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n} = \ln\frac{3}{2}$. Maka $\sum \dfrac{(-1)^n}{n2^n} = -\ln\frac{3}{2} \approx -0{,}4055$.

5. Mengintegralkan fungsi tanpa antiturunan elementer

CONTOH 12 — $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{DX}{1+X^4}$

Ganti x dengan x^4 pada $\frac{1}{1+u} = \sum(-u)^n$: $\frac{1}{1+x^4} = \sum(-1)^n x^{4n}$. Integralkan suku demi suku:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots$$

Deretnya berganti tanda dengan suku menurun, jadi galat $\le$ suku pertama yang dibuang. Dengan tiga suku: $0{,}5 - 0{,}00625 + 0{,}000217 \approx 0{,}49397$; galat $< \frac{1}{13\cdot 2^{13}} \approx 9{,}4 \times 10^{-6}$. (Hasil numerik $0{,}493958$.)

CONTOH 13 — ARCTAN DI TITIK TERTENTU

$\arctan\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} - \cdots \approx 0{,}4636$ (delapan suku memberi $0{,}463647$); dengan $\arctan\frac{1}{3} \approx 0{,}3217$, jumlah keduanya $0{,}7854 = \frac{\pi}{4}$ ✓.

6. Kesalahan umum

- Lupa konstanta integrasi: tentukan dengan mensubstitusi titik di mana nilainya diketahui.
- Mengubah indeks saat menurunkan: $\sum_{n=0}$ menjadi $\sum_{n=1}$ (suku konstan hilang).
- Menyatakan radius tanpa memeriksa persyaratan $|\text{rasio}| < 1$ pada bentuk yang sudah disubstitusi.
- Memakai deret di luar selang kekonvergenannya.

7. Ringkasan

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum x^n$ adalah dasar; substitusi dan manipulasi aljabar menghasilkan banyak deret lain.
- Turunan/integral suku demi suku menghasilkan $\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ dan lainnya.
- Deret pangkat memudahkan menghitung jumlah deret bilangan dan integral tanpa antiturunan elementer.

Pada 11.10 kita menemukan cara *langsung* menghitung koefisien deret dari turunan fungsi: deret Taylor.

11.10 Deret Taylor dan Maclaurin

Pada 11.9 kita memperoleh deret pangkat sebuah fungsi dengan trik aljabar yang hanya berhasil untuk fungsi tertentu. Sekarang kita berangkat dari pertanyaan umum: *jika f dapat dinyatakan sebagai deret pangkat, bagaimana koefisiennya ditentukan?* Jawabannya sangat rapi: koefisien ditentukan oleh turunan f di pusat.

1. Koefisien dari turunan

Misalkan $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$. Substitusi $x = a$: $f(a) = c_0$. Turunkan suku demi suku (11.8):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \Rightarrow f'(a) = c_1,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2\, c_3(x-a) + \cdots \Rightarrow f''(a) = 2c_2,$$

$$f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\, c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\, c_n.$$

TEOREMA

Jika f mempunyai representasi deret pangkat di sekitar a, yaitu $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ untuk $|x-a| < R$, maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Representasi seperti itu, bila ada, **tunggal**.

2. Deret Taylor dan Maclaurin

DEFINISI

Untuk fungsi f yang mempunyai turunan semua orde di a, **deret Taylor** f di a adalah

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

Untuk $a = 0$, disebut **deret Maclaurin**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

DUA HAL YANG HARUS DIBEDAKAN

- Deret Taylor dapat *dibentuk* dari fungsi apa pun yang cukup mulus. Pertanyaannya adalah apakah deret itu *konvergen ke* f.
- Ada fungsi mulus yang deret Taylornya konvergen tetapi ke fungsi lain. Contoh klasik: $f(x) = e^{-1/x^2}$ ($f(0) = 0$) yang semua turunannya di 0 bernilai 0, sehingga deret Maclaurinnya adalah deret nol, padahal $f(x) \neq 0$ untuk $x \neq 0$.

3. Kapan deret Taylor sama dengan fungsi?

Misalkan $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ adalah **polinomial Taylor** derajat n dan $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ adalah **sisa**. Maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$ tepat bila $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Teorema ini dibahas lebih rinci di 11.11. Dengan $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$ untuk semua x (suku umum deret konvergen $\sum \frac{x^n}{n!}$, jadi menuju nol), kita pakai untuk fungsi e^x, $\sin x$, $\cos x$.

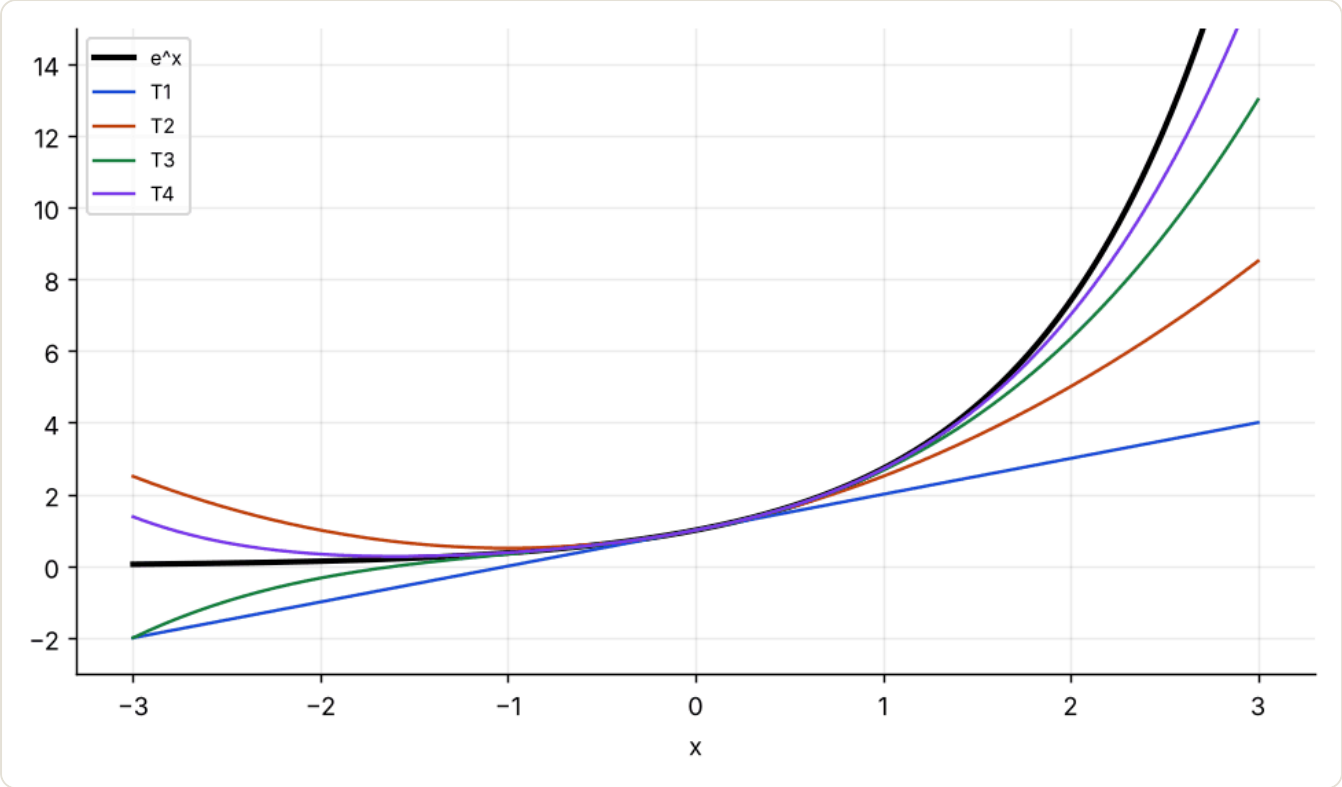
4. Deret Maclaurin yang harus dikuasai

CONTOH 1 — E^X

$f^{(n)}(x) = e^x$, jadi $f^{(n)}(0) = 1$. Maka $c_n = \frac{1}{n!}$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{semua } x).$$

Untuk sembarang x, pada interval antara 0 dan x berlaku $e^t \le e^{|x|} =: M$, maka $|R_n(x)| \le \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Jadi deret konvergen ke e^x di mana-mana. Khususnya $e = \sum \frac{1}{n!} = 2{,}71828\ldots$



Polinomial Taylor $T_1, \ldots, T_4$ menghampiri e^x makin baik di sekitar 0.

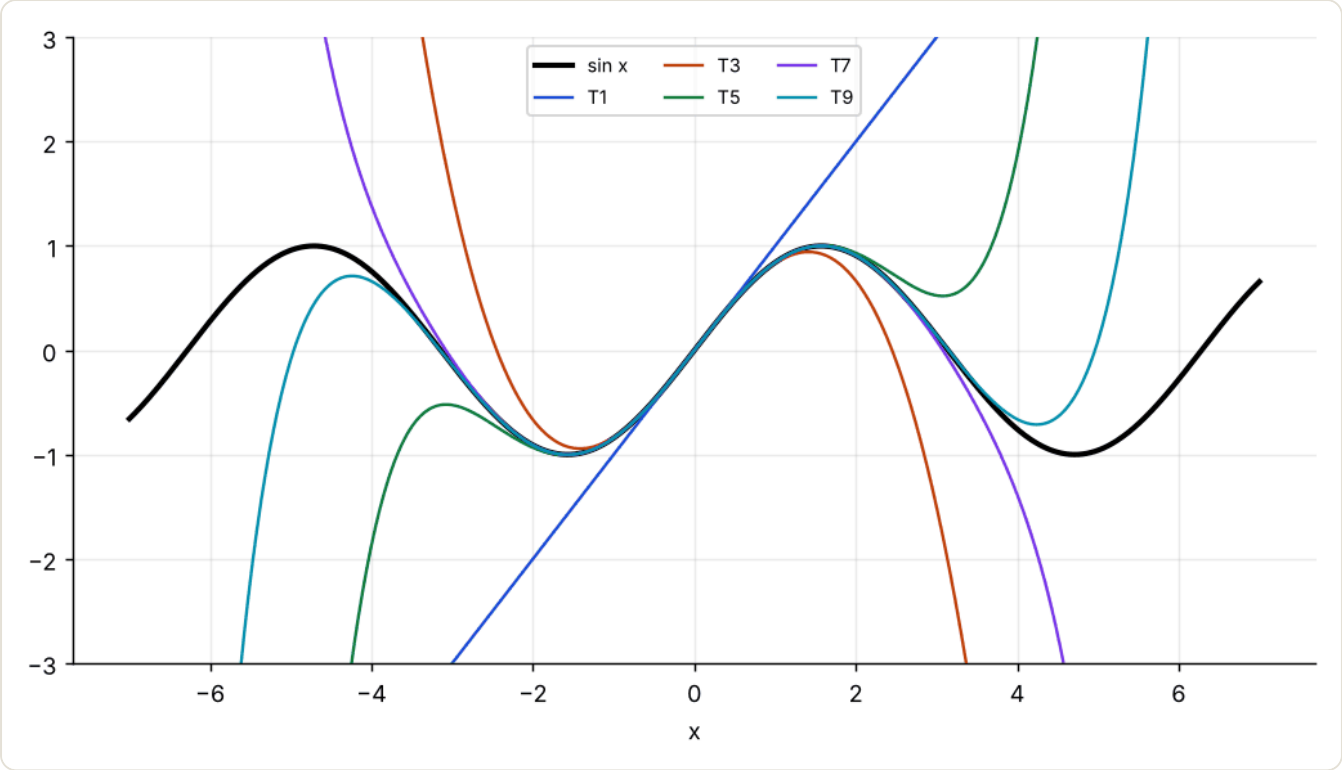
CONTOH 2 — SIN X DAN COS X

Turunan $\sin x$ berulang dengan periode 4: $\sin, \cos, -\sin, -\cos$; di 0 nilainya $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$. Jadi hanya pangkat ganjil yang muncul:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Karena semua turunan dibatasi oleh $M = 1$, $|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$; berlaku untuk semua x. Dengan menurunkan suku demi suku:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$



T_1, T_3, T_5, T_7, T_9 dari $\sin x$; makin tinggi derajat, makin lebar selang yang cocok.

CONTOH 3 — LN$(1+X)$ DAN ARCTAN X

Dari 11.9: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ $(-1 < x \le 1)$ dan $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1 \le x \le 1)$. Ini sekaligus deret Maclaurinnya (keunikan). Di $x = 1$: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ dan $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$.

5. Deret binomial

Untuk bilangan real k sembarang, $f(x) = (1+x)^k$. Turunannya: $f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$. Jadi

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots, \qquad |x| <$$

dengan $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$. Radius kekonvergenan 1 (uji rasio: $\left|\frac{k-n}{n+1}\right| |x| \to |x|$). Bila k bilangan bulat tak negatif, deret berhenti dan menjadi teorema binomial biasa.

CONTOH 4 — $\sqrt{1+X}$

$k = \frac{1}{2}$: koefisien $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{5}{128}, \ldots$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots$$

Cek: $x = 0{,}1$: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881$; empat suku memberi $1 + 0{,}05 - 0{,}00125 + 0{,}0000625 = 1{,}0488125$ ✓.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1+X)^2}$ DAN $\dfrac{1}{\sqrt{1-X^2}}$

(a) $k = -2$: koefisien $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$, jadi $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum (-1)^n (n+1) x^n$ (sesuai 11.9).

(b) $k = -\frac{1}{2}$ dengan x diganti $-x^2$: $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$, $|x| < 1$. Integralkan: $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \dfrac{5x^7}{112} + \dfrac{35x^9}{1152} + \cdots$

6. Membuat deret baru dari deret yang diketahui

CONTOH 6 — SUBSTITUSI: E^{-X^2}

Ganti x dengan $-x^2$ pada deret e^x: $e^{-x^2} = \sum \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$ (semua x). Integralkan untuk fungsi galat:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

Empat suku pertama sampai $\frac{1}{216}$ memberi $0{,}74749$; galat $\le \frac{1}{5!\cdot 11} \approx 7{,}6 \times 10^{-4}$. Hasil sebenarnya $0{,}746824$; selisih $6{,}7 \times 10^{-4}$ ✓.

CONTOH 7 — PERKALIAN: $E^X \operatorname{SIN} X$

Kalikan deret dan kumpulkan pangkat yang sama:

$$\left(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(x - \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^5}{120} - \cdots\right) = x + x^2 + \tfrac{x^3}{3} + 0\cdot x^4 - \tfrac{x^5}{30} -$$

Koefisien x^3: $\frac{1}{2}\cdot 1$ (dari $\frac{x^2}{2}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$ ✓. Koefisien x^4: $\frac{1}{6}\cdot 1$ (dari $\frac{x^3}{6}\cdot x$) $+ 1\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$ (dari $x\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right)$) $= 0$ ✓.

CONTOH 8 — PEMBAGIAN: $\operatorname{TAN} X$

Tulis $\tan x = \sin x / \cos x = c_1 x + c_3 x^3 + \cdots$, lalu selesaikan $(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots)(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$. Samakan koefisien: $c_1 = 1$; $c_3 - \frac{c_1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$; $c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24} = \frac{1}{120} \Rightarrow c_5 = \frac{2}{15}$. Maka

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad (|x| < \tfrac{\pi}{2}).$$

Radiusnya $\frac{\pi}{2}$ karena $\tan x$ tak terdefinisi di $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Menghitung limit dengan deret

CONTOH 9 — $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{X-\sin X}{X^3}$

$x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^5}{120}+\cdots$. Bagi x^3: $\dfrac{1}{6}-\dfrac{x^2}{120}+\cdots\to\dfrac{1}{6}$. (Dengan l'Hôpital perlu tiga kali; deret lebih cepat.)

CONTOH 10 — $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{E^X-1-X}{X^2}$

$e^x-1-x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots$, sehingga limitnya $\dfrac{1}{2}$.

CONTOH 11 — $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X-X+X^3/6}{X^5}$

Pembilang $=\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\cdots$. Limit $=\dfrac{1}{120}$. Numerik: pada $x=0{,}01$ hasilnya $0{,}0083333\approx\frac{1}{120}$ ✓.

8. Menjumlahkan deret bilangan

CONTOH 12

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$: bentuk $\sin x$ dengan $x=\frac{\pi}{4}$ (karena $\frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$). Jumlah $=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}=e^2-1\approx 6{,}389$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$ (lihat taksiran galat di 11.5).

9. Tabel deret Maclaurin

Fungsi	Deret	Selang
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum x^n$	$(-1,1)$
e^x	$\sum \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$
$\ln(1+x)$	$\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	$(-1,1]$
$(1+x)^k$	$\sum \binom{k}{n} x^n$	$(-1,1)$

10. Kesalahan umum

- Mengira deret Taylor selalu menyamai fungsinya (periksa $R_n \to 0$ atau gunakan keunikan).
- Lupa faktor $n!$ pada penyebut koefisien.
- Menggunakan deret binomial untuk $|x| \geq 1$.
- Salah menggeser indeks saat substitusi (mis. x^2 untuk x pada e^x).

11. Ringkasan

- Koefisien Taylor: $c_n = f^{(n)}(a)/n!$; representasi pangkat bila ada adalah tunggal.
- Deret Maclaurin standar: $e^x, \sin x, \cos x, \arctan x, \ln(1+x), (1+x)^k$; hafalkan.
- Substitusi, perkalian, pembagian, turunan, dan integral menghasilkan deret baru; deret juga memudahkan limit.

Berikutnya 11.11: berapa dekat polinomial Taylor ke fungsi, dan penerapannya.

11.11 Penerapan Polinomial Taylor

Pada 11.10 kita melihat bahwa deret Taylor bisa mewakili fungsi secara tepat. Dalam praktik kita hampir selalu memotong deret setelah beberapa suku dan memakai **polinomial Taylor** sebagai hampiran. Pertanyaan pentingnya: *seberapa besar galatnya, dan berapa suku yang cukup?* Subbab ini menjawabnya, lalu memakainya pada hampiran nilai, limit, dan masalah fisika.

1. Polinomial Taylor

DEFINISI

Polinomial Taylor derajat n dari f di a adalah jumlah parsial deret Taylor:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Sisa (galat) hampiran: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

- $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$: *hampiran linear* (garis singgung).
- $T_2(x) = T_1(x) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$: *hampiran kuadrat*, memperhitungkan kelengkungan.

T_n adalah polinomial berderajat $\le n$ yang nilai dan turunan $1, \ldots, n$-nya **sama** dengan f di a. Karena itu ia sangat akurat dekat a dan makin kurang akurat bila menjauh.

CONTOH 1 — T_N UNTUK $F(X) = \mathrm{LN}\, X$ DI $A = 1$

$f' = \frac{1}{x},\ f'' = -\frac{1}{x^2},\ f''' = \frac{2}{x^3},\ f^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$. Di $x = 1$: $f = 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -6$. Maka

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}.$$

(Sama dengan deret $\ln(1+u)$ dengan $u = x - 1$.) Nilai $T_3(1{,}2) = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 = 0{,}18267$, sedangkan $\ln 1{,}2 = 0{,}18232$.

CONTOH 2 — T_3 UNTUK $F(X) = \cos X$ DI $A = \frac{\pi}{3}$

$f = \frac{1}{2},\ f' = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'' = -\frac{1}{2},\ f''' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Maka

$$T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3.$$

2. Seberapa baik hampiran? Sisa Taylor

TEOREMA TAYLOR (BENTUK LAGRANGE)

Jika f mempunyai turunan ke-$(n+1)$ pada interval yang memuat a dan x, maka ada bilangan z antara a dan x sehingga

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

KETAKSAMAAN TAYLOR

Jika $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ untuk semua t antara a dan x, maka

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Gagasan bukti (untuk $n=1$, arah $x > a$): $R_1(a) = R_1'(a) = 0$ dan $R_1'' = f''$. Bila $|f''| \le M$, maka $|R_1'(t)| \le M(t-a)$ dengan integrasi dari a dan kemudian $|R_1(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)^2$. Pengulangan argumen ini sebanyak $n+1$ kali menghasilkan ketaksamaan umum.

Bila $R_n(x) \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka deret Taylor konvergen ke $f(x)$. Pembuktian pada 11.10 untuk $e^x, \sin x, \cos x$ memakai ketaksamaan ini dan fakta $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$.

3. Menghampiri nilai

CONTOH 3 — MENGHITUNG $\sin 0{,}5$

Pakai $T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ di $a = 0$:

$$T_5(0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}0208333 + 0{,}00026042 = 0{,}479427.$$

Galat: turunan ke-6 dari $\sin$ dibatasi $M = 1$, jadi $|R_5(0{,}5)| \le \dfrac{0{,}5^6}{6!} = \dfrac{1}{46\,080} \approx 2{,}2 \times 10^{-5}$. Nilai sebenarnya $0{,}4794255$; galat nyata $1{,}5 \times 10^{-6}$ (jauh di bawah batas; batas Taylor adalah *jaminan*, bukan perkiraan galat).

CONTOH 4 — MENGHITUNG e DENGAN GALAT $< 10^{-5}$

Untuk $f = e^x$ di 0 dan $x = 1$: turunan semuanya $e^t \le e < 3$ pada $[0, 1]$. Jadi $|R_n(1)| \le \dfrac{3}{(n+1)!}$. Syarat $< 10^{-5}$: $(n+1)! > 3 \times 10^5$. Karena $9! = 362\,880$, cukup $n = 8$. Maka

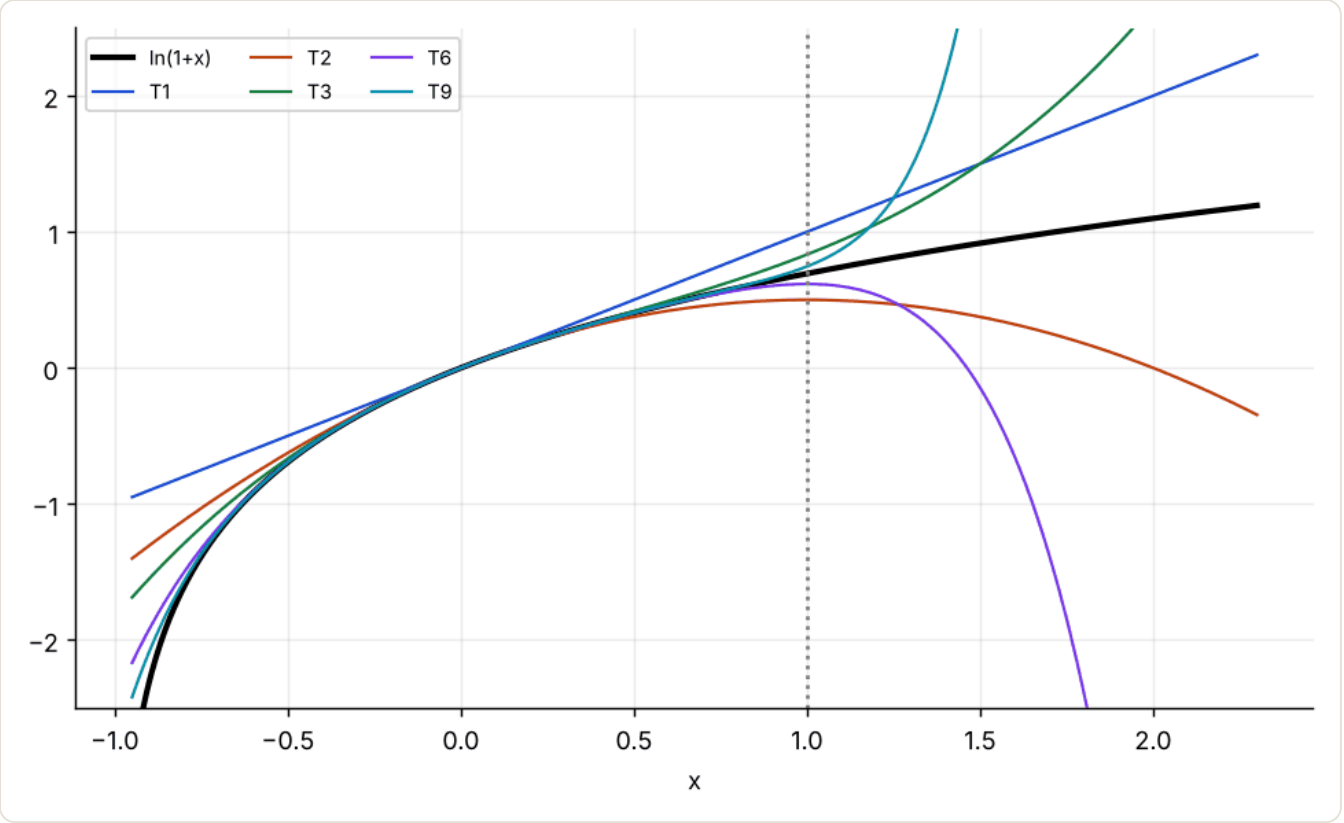
$$e \approx \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 2{,}718279, \qquad \text{galat sebenarnya } 3{,}1 \times 10^{-6}.$$

CONTOH 5 — AKAR PANGKAT TIGA DENGAN DERET BINOMIAL

$\sqrt[3]{8{,}2} = 2\sqrt[3]{1 + 0{,}025}$. Binomial dengan $k = \frac{1}{3}$: $(1+x)^{1/3} \approx 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9}$. Untuk $x = 0{,}025$: $1 + 0{,}008333 - 0{,}0000694 = 1{,}008264$, sehingga $\sqrt[3]{8{,}2} \approx 2{,}016528$. Nilai sebenarnya $2{,}016530$. Galat $\approx 2 \times 10^{-6}$, sesuai suku berikutnya $\frac{5x^3}{81} \cdot 2 \approx 1{,}9 \times 10^{-6}$.

CONTOH 6 — $\ln 1{,}5$ DAN BATAS SELANG

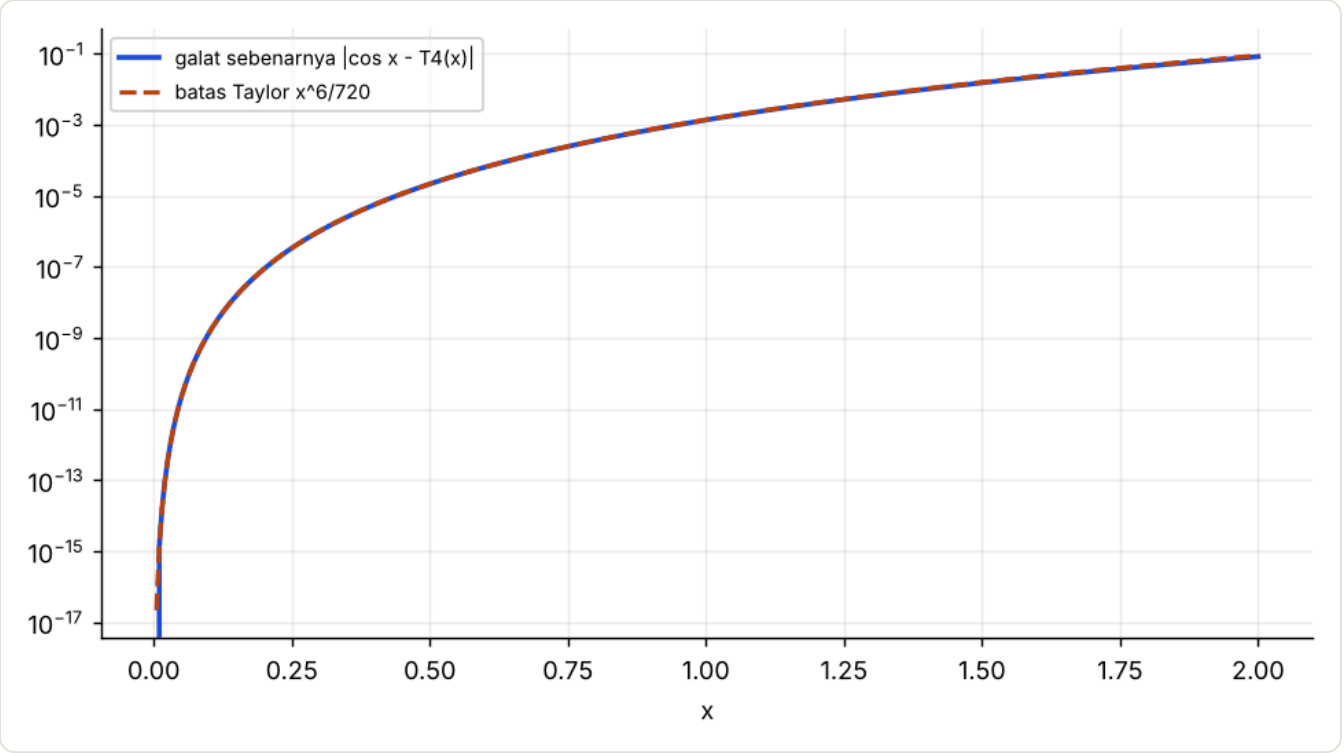
$\ln(1+x)$ pada $x = 0{,}5$ (di dalam selang $(-1, 1]$): deret berganti tanda $0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156 + \cdots$. $T_3 = 0{,}4167$, $T_5 = 0{,}4073$, $T_{10} = 0{,}40543$ vs $\ln 1{,}5 = 0{,}405465$. Karena berganti tanda, galat $\le$ suku berikutnya.



Polinomial Taylor $\ln(1+x)$: hampiran baik hanya untuk $-1 < x \leq 1$. Di luar selang itu (garis putus-putus di $x = 1$), makin tinggi derajat, makin buruk.

CONTOH 7 — GALAT T_4 UNTUK $\cos x$ PADA $x = 1$

$T_4(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = 0{,}541667$. Karena suku x^5 dari $\cos x$ bernilai nol, $T_4 = T_5$, sehingga kita boleh memakai ketaksamaan Taylor dengan $n = 5$ dan turunan ke-6 ($f^{(6)} = -\cos x$, $M = 1$): $|R_5(1)| \leq \dfrac{1}{6!} = 0{,}001389$. Galat nyata $\cos 1 - T_4(1) = -0{,}001364$, tepat di bawah batas.



Galat sebenarnya $|\cos x - T_4(x)|$ dan batas Taylor $x^6/720$ hampir berimpit pada skala logaritmik.

4. Apa yang menentukan keakuratan?

- **Jarak** $|x-a|$: galat tumbuh seperti $|x-a|^{n+1}$; makin dekat pusat makin baik.
- **Derajat** n: biasanya makin besar makin baik, asalkan x di dalam selang kekonvergenan.
- **Pusat** a: pilih a dekat nilai yang diinginkan dan yang turunannya mudah dihitung (mis. $a=8$ untuk $\sqrt[3]{8{,}2}$).

5. Limit yang rumit

CONTOH 8 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\cos X - 1 + \frac{X^2}{2}}{X^4}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$, jadi pembilangnya $\dfrac{x^4}{24} - \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{24}$.

CONTOH 9 — $\displaystyle\lim_{X\to 0}\frac{\sin X - X\cos X}{X^3}$

$x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots$ dan $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$. Selisih $= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \cdots = \dfrac{x^3}{3} + \cdots$. Limit $= \dfrac{1}{3}$.

6. Penerapan dalam fisika

CONTOH 10 — ENERGI RELATIVISTIK

Energi total partikel bermassa m dengan kecepatan v: $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Misalkan $u = v^2/c^2$. Deret binomial $(1-u)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{8}u^2 + \cdots$ memberi

$$E = mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots$$

Suku pertama adalah energi diam, suku kedua adalah energi kinetik klasik. Untuk $v = 0{,}1c$, energi kinetik sebenarnya $(\gamma - 1)mc^2 = 0{,}005038\,mc^2$, sedangkan hampiran klasik $\tfrac{1}{2}mv^2 = 0{,}005\,mc^2$: selisih kurang dari 1%.

CONTOH 11 — BANDUL SEDERHANA

Persamaan gerak bandul: $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\sin\theta$. Karena $\sin\theta = \theta - \tfrac{\theta^3}{6} + \cdots$, untuk simpangan kecil kita ganti $\sin\theta \approx \theta$, sehingga $\theta'' = -\tfrac{g}{L}\theta$ (osilator harmonik, lihat 17.3). Galat hampiran $< \tfrac{\theta^3}{6}$: pada $\theta = 0{,}2$ rad (sekitar 11°) hanya $0{,}0013$, kurang dari 1% dari θ.

CONTOH 12 — HAMPIRAN INTEGRAL

Gelombang optik memakai $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (fungsi sinus integral) yang tidak punya antiturunan elementer. Deret: $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \cdots$, jadi $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \cdots$, berlaku untuk semua x.

7. Kesalahan umum

- Memakai polinomial Taylor jauh dari pusat atau di luar selang kekonvergenan.
- Menyamakan batas Taylor dengan galat sebenarnya (batas biasanya lebih longgar).
- Lupa memakai turunan ke-$(n+1)$, bukan ke-n, pada sisa.
- Memakai derajat n tetapi menghitung M dari turunan yang salah.

8. Ringkasan

- T_n adalah polinomial yang cocok dengan f beserta n turunan pertamanya di a; $R_n = f - T_n$.

- $|R_n(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ bila $|f^{(n+1)}| \le M$.
- Dipakai untuk menghampiri nilai, menentukan banyak suku, menghitung limit, dan menyederhanakan model fisika.

Dengan ini Bab 11 selesai. Bab 12 membuka materi tiga dimensi.