# Bab 10: Persamaan Parametrik dan Koordinat Kutub



# 10.1 Kurva yang Didefinisikan oleh Persamaan Parametrik

## 1. Mengapa perlu persamaan parametrik?

Selama ini kurva di bidang kita nyatakan sebagai grafik fungsi $y = f(x)$, atau sebagai himpunan titik yang memenuhi relasi $F(x, y) = 0$. Cara ini punya dua keterbatasan. Pertama, banyak kurva yang gagal uji garis vertikal (misalnya lingkaran), sehingga tidak bisa ditulis sebagai satu fungsi $y = f(x)$. Kedua, persamaan $F(x, y) = 0$ hanya memberi tahu *titik mana saja* yang berada pada kurva, bukan *urutan* dan *arah* titik-titik itu dilalui.

Bayangkan sebuah partikel yang bergerak di bidang. Posisi horizontal dan vertikalnya masing-masing bergantung pada waktu $t$. Jika kita tuliskan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, kita mendapat deskripsi gerak yang lengkap: di mana partikel berada, kapan ia di sana, dan ke arah mana ia bergerak.

**DEFINISI**

Misalkan $x$ dan $y$ keduanya diberikan sebagai fungsi dari peubah ketiga $t$ (disebut **parameter**):

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in I.$$

Setiap nilai $t$ menentukan satu titik $(x, y)$. Ketika $t$ berubah, titik itu menggambar sebuah kurva $C$ yang disebut **kurva parametrik**. Pasangan persamaan di atas disebut **persamaan parametrik**.

Parameter tidak harus berarti waktu, dan tidak harus bernama $t$. Dalam banyak soal geometri parameternya adalah sudut (sering $\theta$). Namun dalam fisika dan teknik, $t$ hampir selalu waktu, sehingga $(f(t), g(t))$ dibaca sebagai posisi partikel pada saat $t$.

## 2. Menggambar kurva parametrik dengan menandai titik

Cara paling dasar: buat tabel nilai $t$, hitung $(x, y)$, tandai titik-titiknya, lalu hubungkan *menurut urutan $t$ yang naik*. Jangan lupa memberi tanda panah arah.

**CONTOH 1 — PARABOLA YANG DILALUI DENGAN KECEPATAN BERUBAH**

Gambarlah kurva $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1$.

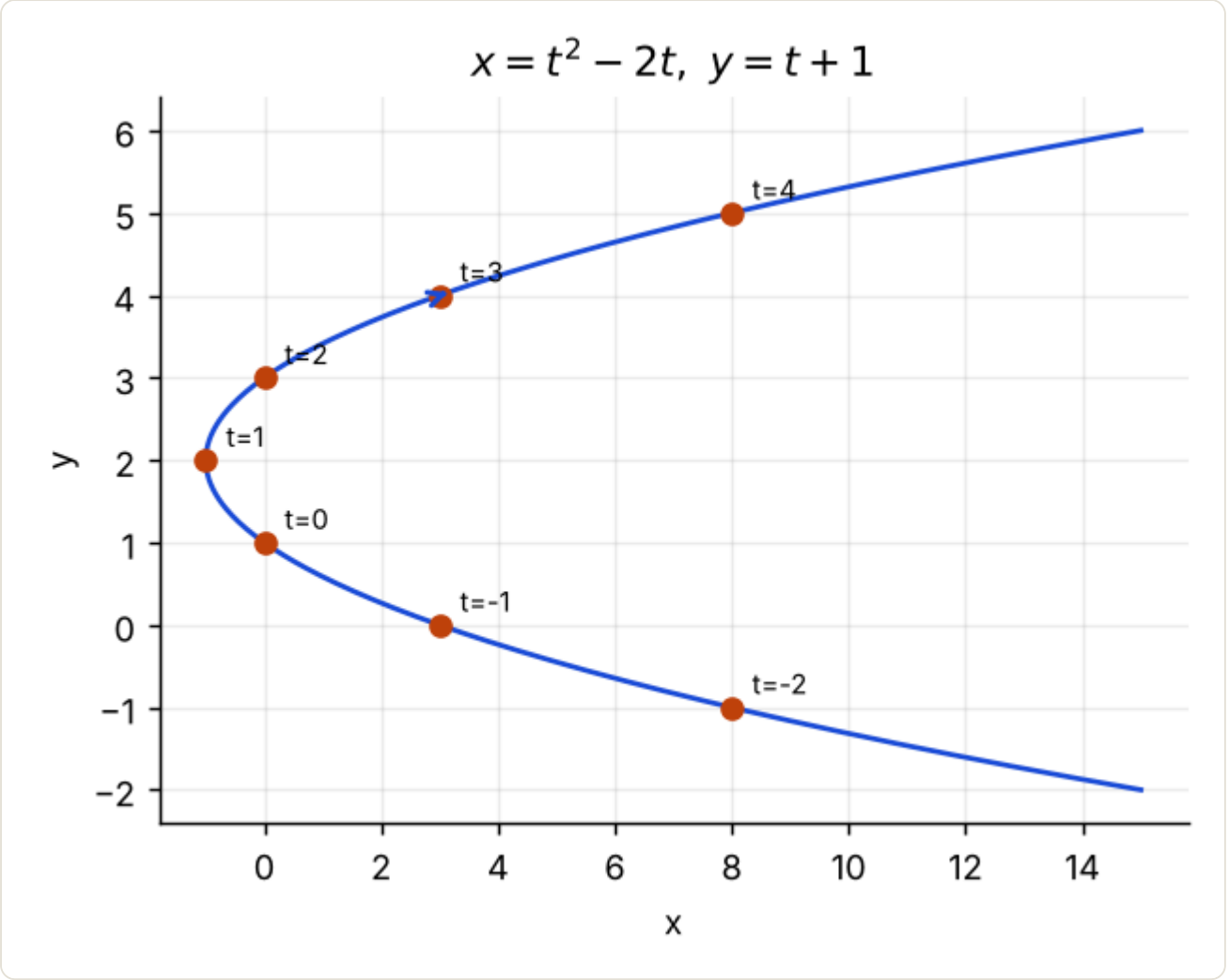
| $T$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 8 | 3 | 0 | −1 | 0 | 3 | 8 |
| $Y$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Perhatikan bahwa $t = 0$ dan $t = 2$ memberi nilai $x$ yang sama (0), tetapi $y$ berbeda (1 dan 3). Titik-titiknya terlihat membentuk parabola yang terbuka ke kanan. Untuk membuktikannya, **hilangkan parameter**: dari $y = t + 1$ diperoleh $t = y - 1$. Substitusi ke persamaan pertama:

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 3.$$

Jadi kurvanya adalah parabola $x = y^2 - 4y + 3$ dengan sumbu simetri horizontal.

Informasi tambahan yang tidak diberikan persamaan $x = y^2 - 4y + 3$: partikel bergerak ke arah $t$ membesar, yaitu dari kanan-bawah, melewati titik puncak $(-1, 2)$ saat $t = 1$, lalu menuju kanan-atas. Titik-titik bernomor $t$ yang berjarak waktu sama tidak berjarak sama pada kurva, karena partikel melambat mendekati puncak lalu mempercepat lagi.




Titik-titik pada $t = -2, \ldots, 4$ dan arah penelusuran.

### Membatasi interval parameter

Bila parameter dibatasi pada interval tertutup $a \le t \le b$, kurva memiliki **titik awal** $(f(a), g(a))$ dan **titik akhir** $(f(b), g(b))$. Contoh: kurva di atas dengan $0 \le t \le 4$ hanya mencakup bagian parabola dari $(0, 1)$ sampai $(8, 5)$.

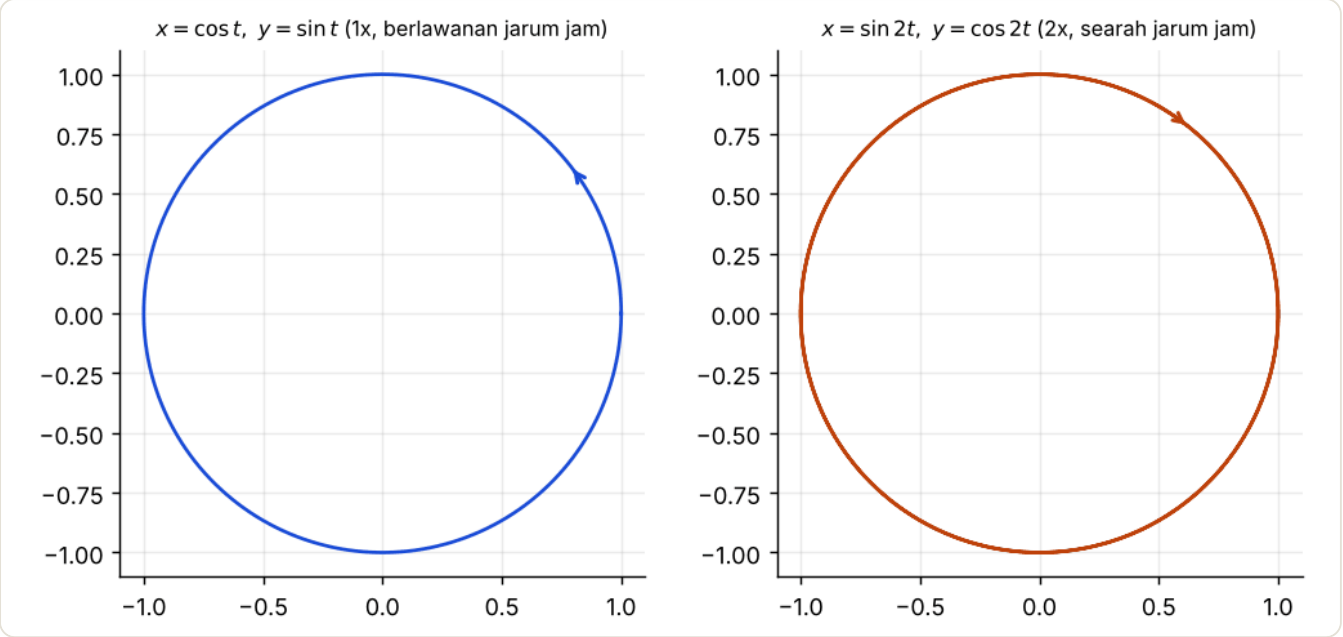
## 3. Kurva yang sama, parametrisasi berbeda

**CONTOH 2 — LINGKARAN SATUAN, SATU KALI PUTARAN**

$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Karena $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, kita peroleh $x^2 + y^2 = 1$, yaitu lingkaran satuan. Di sini $t$ adalah sudut (dalam radian) antara sumbu $x$ positif dan ruas garis dari pusat ke titik. Saat $t$ naik dari 0 ke $2\pi$, titik bergerak *sekali* mengelilingi lingkaran *berlawanan arah jarum jam*, mulai dan berakhir di $(1, 0)$.

**CONTOH 3 — LINGKARAN YANG SAMA, DUA KALI PUTARAN DAN ARAH BERLAWANAN**

$x = \sin 2t,\ y = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Kembali $x^2 + y^2 = 1$, tetapi sekarang titik awalnya $(0, 1)$, arahnya searah jarum jam (karena $x$ bertambah ketika $y$ masih positif), dan karena argumen sudutnya $2t$, lingkaran dikelilingi *dua kali* selama $t$ menempuh $0$ sampai $2\pi$.




Dua parametrisasi untuk himpunan titik yang sama.

**CATATAN PENTING**

Kurva sebagai *himpunan titik* tidak sama dengan *kurva parametrik*, yaitu himpunan titik beserta cara melaluinya. Contoh 2 dan 3 adalah dua kurva parametrik berbeda dengan himpunan titik yang sama. Perbedaan ini sangat berpengaruh nanti pada panjang kurva (Bagian 10.2): bila lingkaran dilalui dua kali, integral panjang akan memberi dua kali keliling.

**CONTOH 4 — LINGKARAN UMUM**

Untuk lingkaran berpusat $(h, k)$ berjari-jari $r$: mula-mula kalikan parametrisasi lingkaran satuan dengan $r$ sehingga diperoleh lingkaran berjari-jari $r$ berpusat di titik asal, kemudian geser $h$ satuan ke kanan dan $k$ satuan ke atas:

$$x = h + r\cos t, \qquad y = k + r\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Elips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ diparametrisasi dengan cara serupa: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, sebab $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ langsung memberi persamaan elips.

**CONTOH 5 — PARAMETRISASI YANG HANYA MENCAKUP SEBAGIAN GRAFIK**

$x = \sin t,\ y = \sin^2 t$. Karena $y = x^2$, titik-titiknya berada pada parabola $y = x^2$. Namun $-1 \le \sin t \le 1$, sehingga hanya bagian $-1 \le x \le 1$ yang tercapai. Selain itu $\sin t$ periodik, maka titik bergerak bolak-balik tak hingga kali di antara $(-1, 1)$ dan $(1, 1)$. Pelajaran: setelah menghilangkan parameter, **selalu periksa daerah nilai $x$ dan $y$** yang benar-benar dicapai oleh parametrisasi.

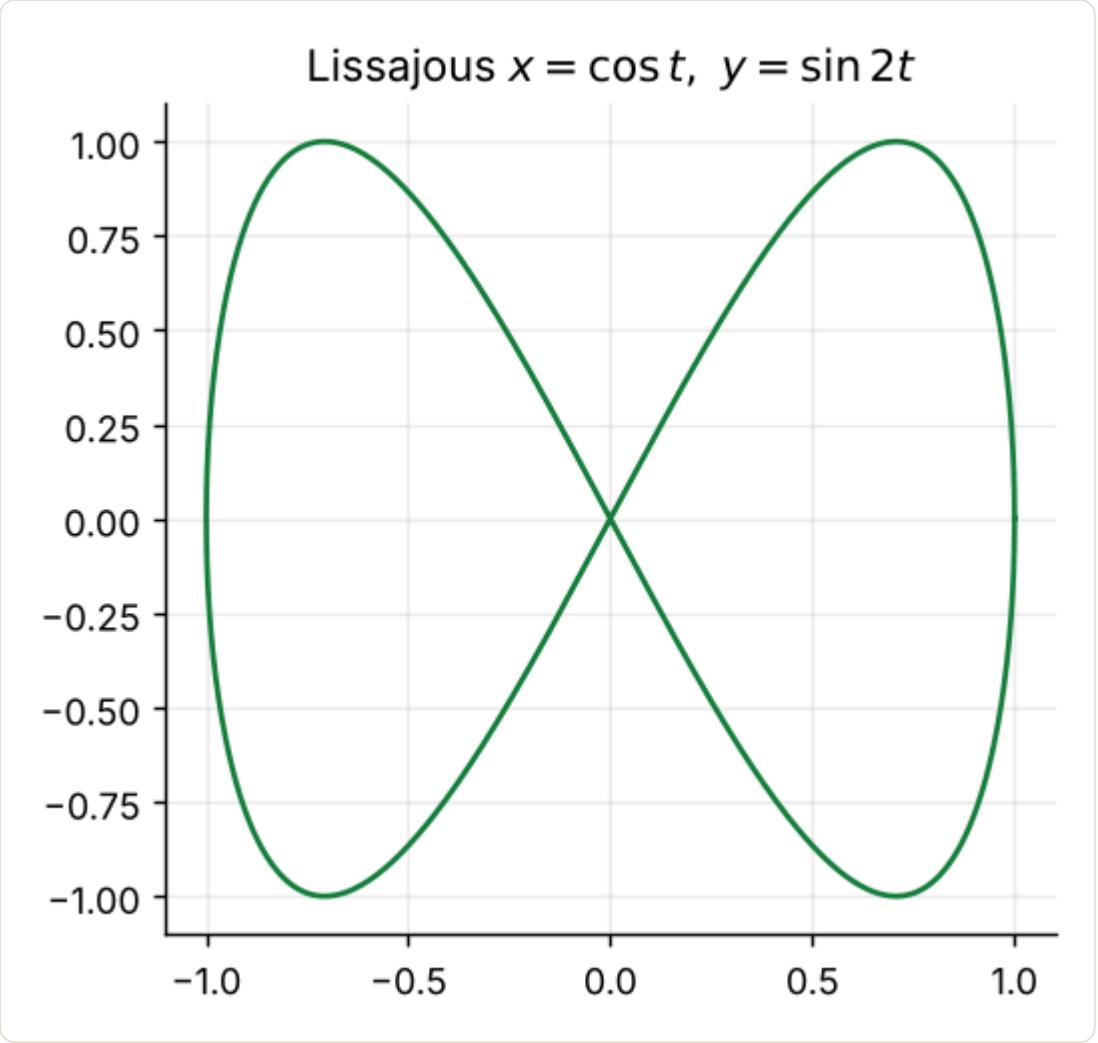
## 4. Menghilangkan parameter: kiat praktis

- **Persamaan linear dalam $t$**: selesaikan salah satu persamaan untuk $t$, substitusikan ke yang lain (hasilnya garis atau parabola, bergantung pangkatnya).
- **Memuat $\cos t, \sin t$**: gunakan $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (lingkaran/elips). Bila memuat $\sec t, \tan t$, gunakan $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ (hiperbola).
- **Memuat $e^t$**: ingat $e^{2t} = (e^t)^2$ dan $e^{-t} = 1/e^t$; sering menghasilkan kurva rasional seperti $y = 1/x$.
- **Memuat $\cosh t, \sinh t$**: gunakan $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, cabang hiperbola.

Tidak semua parametrisasi bisa dihilangkan parameternya secara bersih. Sikloid (Bagian 5) adalah contohnya: persamaan Cartesiusnya sangat rumit, sedangkan bentuk parametriknya sederhana.

## 5. Menggambar dengan alat bantu grafik

Kalkulator grafik dan perangkat lunak (termasuk Python/matplotlib yang dipakai untuk gambar di situs ini) menggambar kurva parametrik dengan menghitung banyak titik dan menyambungnya secara berurutan. Parametrik juga memudahkan penggambaran relasi yang sulit diselesaikan untuk $y$. Misalnya $x = y^4 - 3y^2$: cukup tetapkan $y = t$ lalu $x = t^4 - 3t^2$; kita tidak perlu memecahkan $y$ sebagai empat fungsi terpisah. Secara umum, kurva $x = h(y)$ dapat ditulis $x = h(t),\ y = t$, dan grafik $y = f(x)$ dapat ditulis $x = t,\ y = f(t)$.




Kurva Lissajous $x = \cos t,\ y = \sin 2t$: hasil dua gerak harmonik dengan frekuensi berbeda.

Kurva yang rumit seperti Lissajous $x = a\sin nt,\ y = b\cos t$ praktis mustahil digambar tangan; di sinilah komputer berguna. Kegunaan penting lain: *computer-aided design* (CAD) memakai kurva parametrik khusus, yaitu kurva Bézier, untuk mendefinisikan bentuk bodi mobil dan huruf pada printer laser.

## 6. Sikloid

**DEFINISI**

**Sikloid** adalah lintasan sebuah titik $P$ pada keliling lingkaran yang menggelinding tanpa selip sepanjang garis lurus.

### Menurunkan persamaannya

Misalkan lingkaran berjari-jari $r$ menggelinding di sepanjang sumbu $x$, dan $P$ awalnya di titik asal. Pilih parameter $\theta$ = sudut putar lingkaran (dalam radian) setelah menggelinding.

1. Karena tidak selip, panjang busur yang sudah menyentuh garis sama dengan jarak yang ditempuh: titik singgung berada di $x = r\theta$.
2. Maka pusat lingkaran ada di $C = (r\theta,\ r)$.
3. Posisi $P$ relatif terhadap pusat: $P$ telah berputar sebesar $\theta$ dari posisi terendahnya, sehingga selisih koordinatnya adalah $(-r\sin\theta,\ -r\cos\theta)$.

Dengan menjumlahkan,

$$\boxed{x = r(\theta - \sin\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta)}$$

Satu busur sikloid dihasilkan oleh satu putaran penuh, yaitu $0 \le \theta \le 2\pi$. Rumus ini juga berlaku untuk $\theta$ di luar interval itu (Latihan di buku meminta pembuktian untuk $\pi/2 < \theta < \pi$).




Sikloid dan posisi lingkaran pada $\theta = 2.2$.

### Sejarah dan sifat menarik

- **Brakistokron**: dari semua kurva yang menghubungkan titik $A$ ke titik $B$ yang lebih rendah (tidak tepat di bawah $A$), kurva yang membuat partikel meluncur paling cepat di bawah gravitasi adalah busur sikloid terbalik (soal yang diajukan Johann Bernoulli tahun 1696).
- **Tautokron**: pada sikloid terbalik, waktu meluncur ke dasar tidak bergantung dari titik awal. Huygens memakai ini untuk merancang bandul jam yang periodenya tidak bergantung amplitudo.
- Galileo sudah mempelajarinya dan menyarankan bentuk sikloid untuk lengkung jembatan.

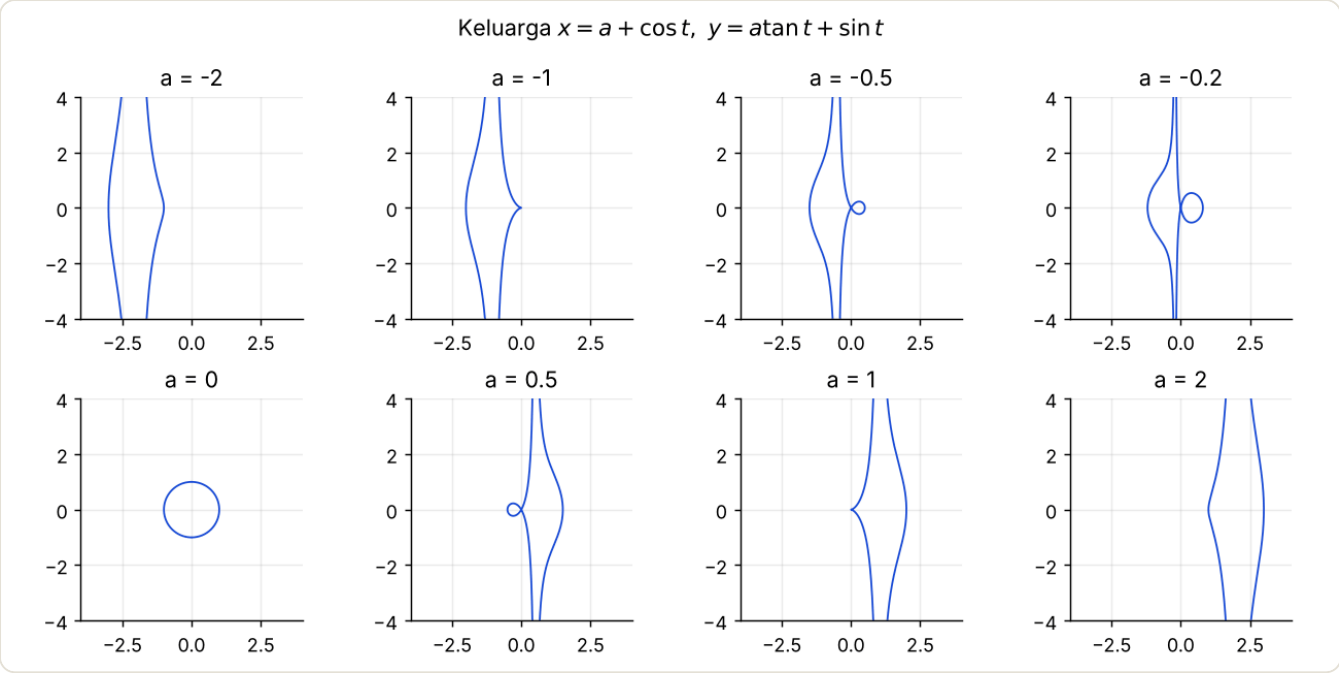
## 7. Keluarga kurva parametrik

Dengan mengubah konstanta dalam persamaan, kita mendapat *keluarga* kurva. Mengamati bagaimana bentuk berubah terhadap konstanta adalah latihan penting untuk intuisi.

**CONTOH 6 — KONKOID NICOMEDES**

Keluarga $x = a + \cos t,\ y = a\tan t + \sin t$. Hasil pengamatan dari grafik:

- Semua anggota (kecuali $a = 0$) memiliki dua cabang yang mendekati asimtot vertikal $x = a$.
- Untuk $|a| > 1$ kedua cabang mulus; makin besar $|a|$, makin kurang melengkung.
- Untuk $|a| = 1$, salah satu cabang punya *ujung runcing* (cusp).
- Untuk $0 < |a| < 1$, muncul *simpul* (loop) yang mengecil menjadi cusp saat $|a| \to 1$, dan membesar saat $a \to 0$.
- Untuk $a = 0$ kedua cabang menyatu menjadi lingkaran satuan (Contoh 2).
- Kurva dengan $a > 0$ adalah pencerminan terhadap sumbu $y$ dari kurva dengan $-a$. Buktinya: ganti $a$ dengan $-a$ dan $t$ dengan $\pi - t$; karena $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\tan(\pi - t) = -\tan t$, dan $\sin(\pi - t) = \sin t$, titik $(x, y)$ berubah menjadi $(-x, y)$.




Delapan anggota keluarga konkoid pada jendela $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

Nama "konkoid" berasal dari kemiripan cabang luar dengan cangkang kerang (*concha*).

## 8. Ringkasan teknik

| Tujuan | Alat |
|---|---|
| Parametrisasi lingkaran/elips | $x = h + a\cos t,\ y = k + b\sin t$ |
| Ruas garis dari $(x_1, y_1)$ ke $(x_2, y_2)$ | $x = x_1 + (x_2 - x_1)t,\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t,\ 0 \le t \le 1$ |
| Grafik $y = f(x)$ | $x = t,\ y = f(t)$ |
| Sikloid jari-jari $r$ | $x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$ |
| Trokoid (titik pada jarak $d$ dari pusat) | $x = r\theta - d\sin\theta,\ y = r - d\cos\theta$ |

Coba kalkulator Python pada menu atas untuk menghitung panjang dan luas kurva parametrik setelah Anda memahami bagian ini.

# 10.2 Kalkulus pada Kurva Parametrik

Setelah kita bisa menyatakan kurva secara parametrik, pertanyaan alaminya: bagaimana menghitung garis singgung, luas, panjang kurva, dan luas permukaan putar tanpa terlebih dahulu menghilangkan parameter? Jawabannya adalah menurunkan semua rumus yang sudah kita kenal ke dalam bahasa parameter $t$.

## 1. Garis singgung

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ keduanya terdiferensialkan, dan $y$ juga terdiferensialkan sebagai fungsi $x$. Aturan rantai memberi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Jika $dx/dt \neq 0$, kita selesaikan untuk $dy/dx$:

**RUMUS (1)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{bila } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Interpretasi fisis: $dx/dt$ dan $dy/dt$ adalah kecepatan horizontal dan vertikal partikel. Kemiringan garis singgung adalah rasio keduanya. Dari sini:

- **Tangen horizontal** terjadi bila $dy/dt = 0$ *dan* $dx/dt \neq 0$.
- **Tangen vertikal** terjadi bila $dx/dt = 0$ *dan* $dy/dt \neq 0$.
- Bila keduanya nol, belum bisa disimpulkan apa-apa; gunakan limit (misalnya aturan l'Hôpital) seperti pada sikloid di bawah.

### Turunan kedua

Kecekungan ditentukan oleh $d^2y/dx^2$. Terapkan Rumus (1) pada fungsi $dy/dx$ (bukan pada $y$):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

**JEBAKAN YANG SANGAT SERING TERJADI**

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$

Anda harus mendiferensialkan *hasil bagi* $\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ terhadap $t$, baru dibagi lagi dengan $dx/dt$.

**CONTOH 1 — KURVA YANG MEMOTONG DIRINYA SENDIRI**

Kurva $C$: $x = t^2,\ y = t^3 - 3t$.

**(a) Dua garis singgung di (3, 0).** $y = t(t^2 - 3) = 0$ bila $t = 0$ atau $t = \pm\sqrt{3}$. Titik $(3, 0)$ memenuhi $x = t^2 = 3$, yaitu $t = \pm\sqrt{3}$: kurva melewati titik ini dua kali (memotong dirinya). Hitung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}.$$

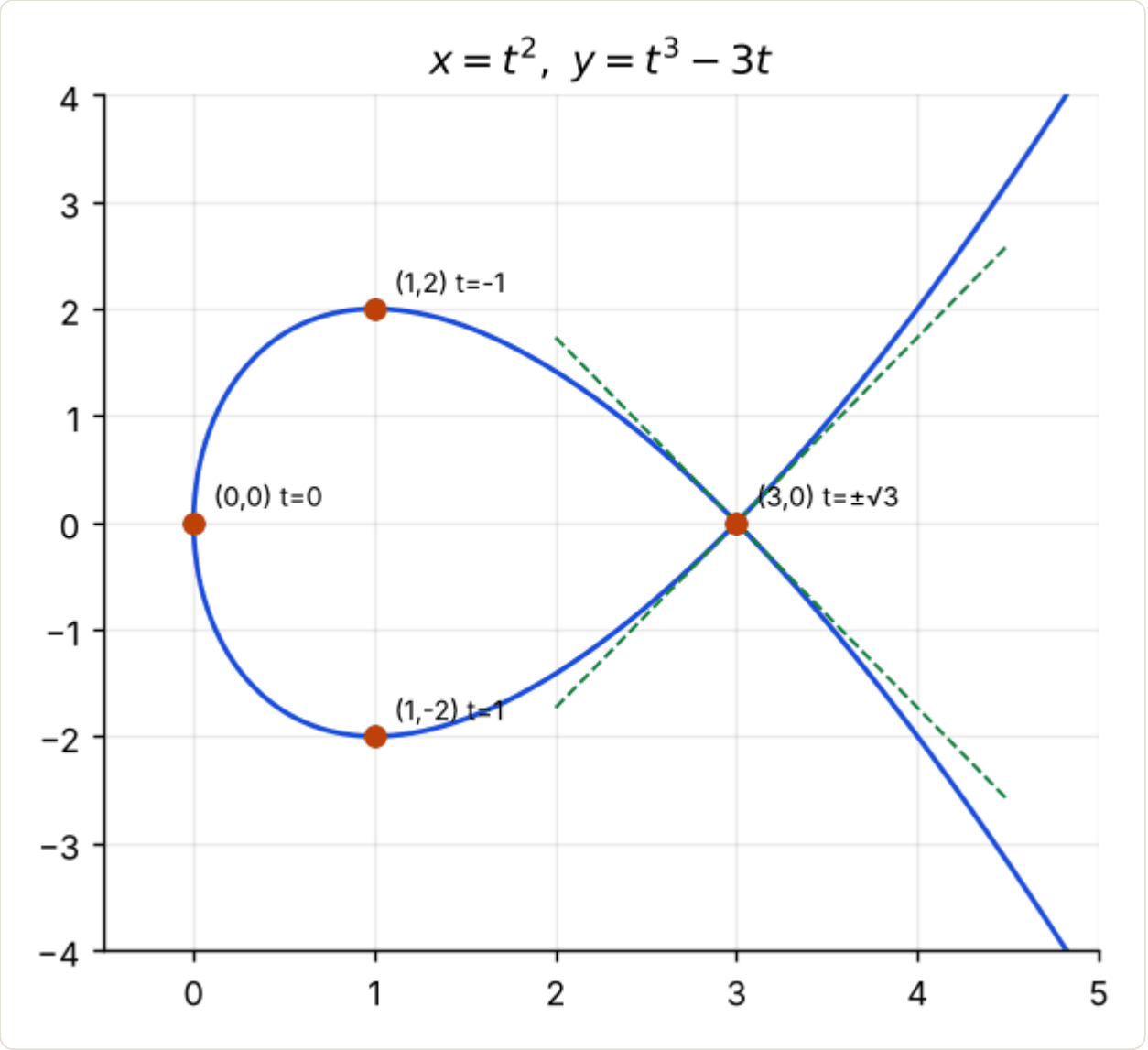
Untuk $t = \sqrt{3}$: kemiringan $= \dfrac{9 - 3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; untuk $t = -\sqrt{3}$: kemiringan $= -\sqrt{3}$. Maka garis singgungnya $y = \sqrt{3}\,(x - 3)$ dan $y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$.

**(b) Tangen horizontal/vertikal.** Horizontal: $dy/dt = 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ (di sini $dx/dt = 2t \neq 0$), titik $(1, -2)$ dan $(1, 2)$. Vertikal: $dx/dt = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ (di sini $dy/dt = -3 \neq 0$), titik $(0, 0)$.

**(c) Kecekungan.** Pertama $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t^2 - 3}{2t}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2t}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2t^2} = \dfrac{3(t^2 + 1)}{2t^2}$.
Dibagi $dx/dt = 2t$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}.$$

Positif (cekung ke atas) untuk $t > 0$; negatif (cekung ke bawah) untuk $t < 0$.




Simpul di $(3, 0)$ dengan dua garis singgungnya (putus-putus), tangen horizontal di $(1, \pm 2)$, tangen vertikal di titik asal.

**CONTOH 2 — GARIS SINGGUNG SIKLOID**

Sikloid $x = r(\theta - \sin\theta),\ y = r(1 - \cos\theta)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

**Di** $\theta = \pi/3$: $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1-\cos = \frac{1}{2}$, kemiringan $= \sqrt{3}$. Titiknya $\left(r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}),\ \frac{r}{2}\right)$, sehingga

$$y - \tfrac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \tfrac{\pi r}{3} + \tfrac{\sqrt{3}\,r}{2}\right) \implies y = \sqrt{3}\,x - \tfrac{\pi r}{\sqrt{3}} + \tfrac{3r}{2} + \tfrac{r}{2},$$

yaitu $\sqrt{3}\,x - y = r\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$.

**Tangen horizontal:** $\sin\theta = 0$ dan $1-\cos\theta \neq 0$, yaitu $\theta = (2n+1)\pi$ — titik puncak $((2n+1)\pi r,\ 2r)$.

**Di** $\theta = 2n\pi$ kedua turunan nol (ujung runcing di permukaan tanah). Dengan l'Hôpital,

$$\lim_{\theta\to 2n\pi^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = +\infty, \qquad \lim_{\theta\to 2n\pi^-} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\infty,$$

jadi garis singgungnya vertikal pada titik-titik runcing itu.

## 2. Luas di bawah kurva parametrik

Luas di bawah $y = F(x)$ $(\geq 0)$ dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $x = f(t),\ y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, maka substitusi $x = f(t),\ dx = f'(t)\,dt$ memberi

**RUMUS (2)**

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt \quad (\text{atau } \int_\beta^\alpha \text{ bila } f \text{ menurun}).$$

Batas $t$ diambil dari kondisi: $x = a$ terjadi di salah satu ujung interval, $x = b$ di ujung lainnya. Bila kurva berjalan dari kanan ke kiri, urutan batasnya terbalik, sehingga hasil integral mungkin negatif; luas yang sebenarnya adalah nilai mutlaknya.

**CONTOH 3 — LUAS SATU BUSUR SIKLOID**

Satu busur: $0 \le \theta \le 2\pi$, $y = r(1-\cos\theta)$, $dx = r(1-\cos\theta)\,d\theta$.

$$A = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\, r(1-\cos\theta)\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Gunakan $\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$:

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = r^2 \left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2.$$

Luas ini **tiga kali luas lingkaran pembangkit** ($\pi r^2$). Galileo menebaknya; pembuktian pertama diberikan Roberval dan Torricelli.




**CONTOH 4 — LUAS ELIPS**

Elips $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. Separuh atas: $0 \le t \le \pi$, tetapi saat $t$ naik $x$ *menurun* dari $a$ ke $-a$. Jadi luas separuh atas $= \int_{x=-a}^{a} y\,dx = \int_{t=\pi}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = ab\cdot\tfrac{\pi}{2}$. Dua kali itu memberi luas elips $= \pi ab$.

## 3. Panjang busur

Untuk kurva $y = F(x)$ dengan $F'$ kontinu, $L = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$. Bila kurva ditelusuri sekali oleh $(f(t), g(t))$ dengan $f'(t) > 0$ (sehingga dari kiri ke kanan), maka dengan Rumus (1) dan substitusi

$dx = f'(t)dt$:

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{g'}{f'}\right)^2}\, f'\, dt = \int \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt.$$

**TEOREMA (3)**

Jika $C$ diberikan oleh $x = f(t),\ y = g(t),\ \alpha \le t \le \beta$, dengan $f', g'$ kontinu dan $C$ ditelusuri **tepat satu kali**, maka

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

## Mengapa rumus ini masuk akal

Bagi $[\alpha, \beta]$ menjadi $n$ bagian sama panjang, hubungkan titik-titik $P_i = (f(t_i), g(t_i))$ dengan poligon. Panjang tiap sisi $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$. Dengan Teorema Nilai Rata-rata, $\Delta x_i = f'(t_i^*)\Delta t$ dan $\Delta y_i = g'(t_i^{**})\Delta t$ untuk titik-titik $t_i^*, t_i^{**}$ dalam subinterval yang sama. Jadi panjang poligon $= \sum \sqrt{f'(t_i^*)^2 + g'(t_i^{**})^2}\, \Delta t$, yang menyerupai jumlah Riemann dan menuju integral di atas bila $n \to \infty$ (kekontinuan $f', g'$ menjamin $t_i^*$ dan $t_i^{**}$ boleh dianggap sama pada limitnya). Secara simbolik $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt$.

**AWAS: TELUSURI SEKALI SAJA**

Untuk $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$, integral memberi $\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$ (benar). Untuk $x = \sin 2t,\ y = \cos 2t$ pada interval yang sama integralnya $\int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi$ — dua kali keliling, karena lingkaran dilalui dua kali. Integral selalu mengukur *jarak tempuh* partikel, bukan panjang himpunan titik.

**CONTOH 5 — PANJANG SATU BUSUR SIKLOID**

$\dfrac{dx}{d\theta} = r(1-\cos\theta),\ \dfrac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$. Maka

$$\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = r\sqrt{2-2\cos\theta}.$$

Karena $1-\cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, kita peroleh $\sqrt{2-2\cos\theta} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2\left|\sin\tfrac{\theta}{2}\right| = 2\sin\tfrac{\theta}{2}$ untuk $0 \le \theta \le 2\pi$. Jadi

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\Big[-2\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = 2r(2+2) = 8r.$$

Panjang satu busur sikloid adalah **delapan kali jari-jari** lingkaran pembangkit (dibuktikan Christopher Wren tahun 1658).

## 4. Luas permukaan benda putar

Jika kurva $x = f(t),\ y = g(t), \alpha \le t \le \beta$, diputar mengelilingi sumbu $x$, dengan $f', g'$ kontinu dan $g(t) \ge 0$, maka luas permukaannya

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int 2\pi y\,ds.$$

Jika diputar mengelilingi sumbu $y$ (dengan $x \ge 0$), ganti $y$ dengan $x$: $S = \int 2\pi x\,ds$. Idenya: setiap potongan busur $ds$ menyapu pita sempit dengan keliling $2\pi y$ dan lebar $ds$.

**CONTOH 6 — LUAS PERMUKAAN BOLA**

Bola jari-jari $r$ dihasilkan oleh pemutaran setengah lingkaran $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ 0 \le t \le \pi$ mengelilingi sumbu $x$. Karena $ds = r\,dt$,

$$S = \int_0^\pi 2\pi(r\sin t)\,r\,dt = 2\pi r^2\big[-\cos t\big]_0^\pi = 4\pi r^2.$$

## 5. Ringkasan rumus

| Besaran | Rumus parametrik |
|---|---|
| Kemiringan | $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$ |
| Turunan kedua | $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d}{dt}(dy/dx)}{dx/dt}$ |
| Luas | $\displaystyle\int y\,dx = \int g(t)f'(t)\,dt$ |
| Panjang | $\displaystyle\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ |
| Luas permukaan (sumbu $x$) | $\displaystyle\int 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ |

Anda dapat memeriksa Contoh 3 dan 5 secara numerik dengan kalkulator Python: pilih "Luas di bawah kurva parametrik" dengan $x(t) = t - \sin(t),\ y(t) = 1 - \cos(t)$, batas $0$ sampai $2 * pi$ (hasil $3\pi \approx 9.4248$).

# 10.3 Koordinat Kutub

## 1. Sistem koordinat kutub

Koordinat Cartesius menyatakan titik lewat dua jarak berarah dari dua sumbu tegak lurus. Newton memperkenalkan cara lain yang jauh lebih alami untuk persoalan berpusat: lingkaran, spiral, orbit planet, gelombang yang merambat keluar dari sumber.

**DEFINISI**

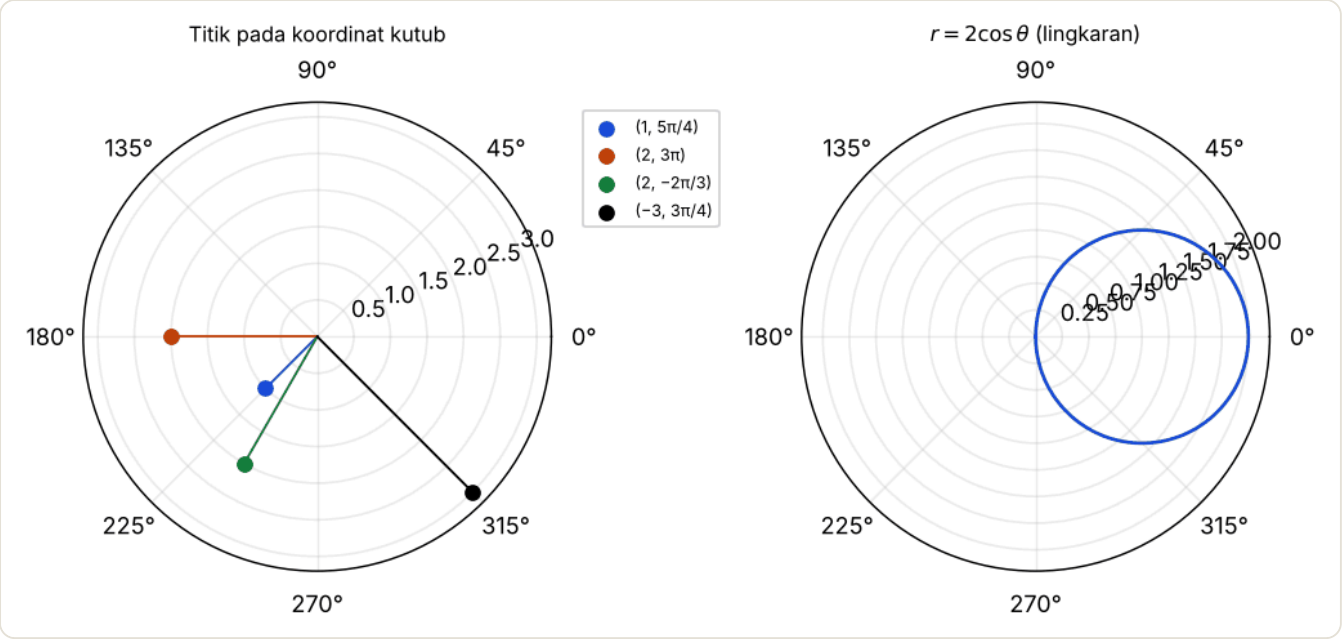
Pilih sebuah titik $O$ (disebut **kutub** atau titik asal) dan sebuah sinar dari $O$ (disebut **sumbu kutub**, biasanya digambar horizontal ke kanan, sehingga berimpit dengan sumbu $x$ positif). Untuk titik $P$ lain, misalkan $r$ = jarak $OP$ dan $\theta$ = sudut dari sumbu kutub ke garis $OP$ (positif bila berlawanan arah jarum jam, negatif bila searah). Pasangan $(r, \theta)$ disebut **koordinat kutub** $P$. Kutub sendiri adalah $(0, \theta)$ untuk sembarang $\theta$.

### Memperluas ke $r$ negatif

Kita sepakati bahwa $(-r, \theta)$ adalah titik yang terletak pada garis lurus yang sama melalui $O$ dengan $(r, \theta)$, dengan jarak yang sama dari $O$, tetapi di sisi *berlawanan* dari kutub. Dengan kata lain, $(-r, \theta)$ dan $(r, \theta + \pi)$ adalah titik yang sama. Jadi $r < 0$ berarti "mundur" sejauh $|r|$ dari arah $\theta$.

**CONTOH 1 — MENGGAMBAR TITIK**

(a) $(1, \frac{5\pi}{4})$: sudut di kuadran III, jarak 1. (b) $(2, 3\pi)$: $3\pi$ = satu setengah putaran, tepat arah negatif sumbu $x$; jarak 2 sehingga di $(-2, 0)$ Cartesius. (c) $(2, -\frac{2\pi}{3})$: berputar $120^\circ$ searah jarum jam (kuadran III). (d) $(-3, \frac{3\pi}{4})$: sudut $135^\circ$ ada di kuadran II, tetapi $r$ negatif sehingga titik berada di sisi berlawanan, yaitu kuadran IV.




Keempat titik pada Contoh 1 (kiri), dan lingkaran $r = 2\cos\theta$ (kanan).

### Satu titik, banyak representasi

Berbeda dengan Cartesius, setiap titik punya tak hingga banyak koordinat kutub. Titik $(r, \theta)$ juga dinyatakan oleh

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad \text{dan} \quad (-r, \theta + (2n+1)\pi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Contoh: $(1, \frac{5\pi}{4}) = (1, -\frac{3\pi}{4}) = (1, \frac{13\pi}{4}) = (-1, \frac{\pi}{4})$. Konsekuensi: mencari titik potong dua kurva kutub memerlukan kehati-hatian ekstra (Bagian 10.4).

## 2. Hubungan dengan koordinat Cartesius

Letakkan kutub di titik asal dan sumbu kutub pada sumbu $x$ positif. Dari segitiga siku-siku pada gambar standar:

**RUMUS KONVERSI**

$$(1) \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad\qquad (2) \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Persamaan (1) berlaku untuk semua $r$ dan $\theta$ (termasuk $r < 0$).

**CONTOH 2 — KUTUB KE CARTESIUS**

$(2, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $y = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Jadi $(1, \sqrt{3})$.

**CONTOH 3 — CARTESIUS KE KUTUB**

Titik $(1, -1)$: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Dari $\tan\theta = -1$ ada dua sudut dalam $[0, 2\pi)$: $\frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4}$. Titik berada di kuadran IV, sehingga $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (atau $-\frac{\pi}{4}$). Satu jawaban: $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$; jawaban lain: $(-\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

**CATATAN**

Persamaan $\tan\theta = y/x$ tidak menentukan $\theta$ secara tunggal (nilai tangen berulang tiap $\pi$). Periksa kuadran yang benar, jangan hanya memakai $\arctan(y/x)$ mentah. Khusus $x = 0$, tangen tak terdefinisi: $\theta = \pm\pi/2$ sesuai tanda $y$.

## 3. Kurva kutub

Grafik persamaan kutub $r = f(\theta)$ (atau lebih umum $F(r, \theta) = 0$) terdiri atas semua titik yang *memiliki sedikitnya satu* representasi kutub yang memenuhi persamaan itu.

**CONTOH 4 — $R = 2$ DAN $\Theta = 1$**

$r = 2$: semua titik berjarak 2 dari kutub, yaitu lingkaran berpusat di $O$ berjari-jari 2. Umumnya $r = a$ adalah lingkaran jari-jari $|a|$.
$\theta = 1$ (radian): semua titik dengan sudut 1, yaitu garis lurus melalui $O$ yang membentuk sudut 1 radian dengan sumbu kutub; titik dengan $r > 0$ berada di kuadran I, yang $r < 0$ di kuadran III.

**CONTOH 5 — $R = 2\,\mathrm{COS}\,\Theta$**

**Dengan tabel:** $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ memberi $r = 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0$; bila $\theta$ dilanjutkan ke $\pi$, $r$ negatif dan titiknya jatuh kembali pada lingkaran yang sama, jadi cukup $0 \le \theta \le \pi$.
**Dengan konversi:** kalikan kedua ruas dengan $r$: $r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$, lingkaran berpusat $(1, 0)$ berjari-jari 1.
**Geometri:** bila $P$ pada lingkaran dan $Q = (2, 0)$ ujung diameter, sudut $OPQ$ adalah sudut siku-siku (sudut keliling pada setengah lingkaran), sehingga $OP = OQ\cos\theta = 2\cos\theta$.

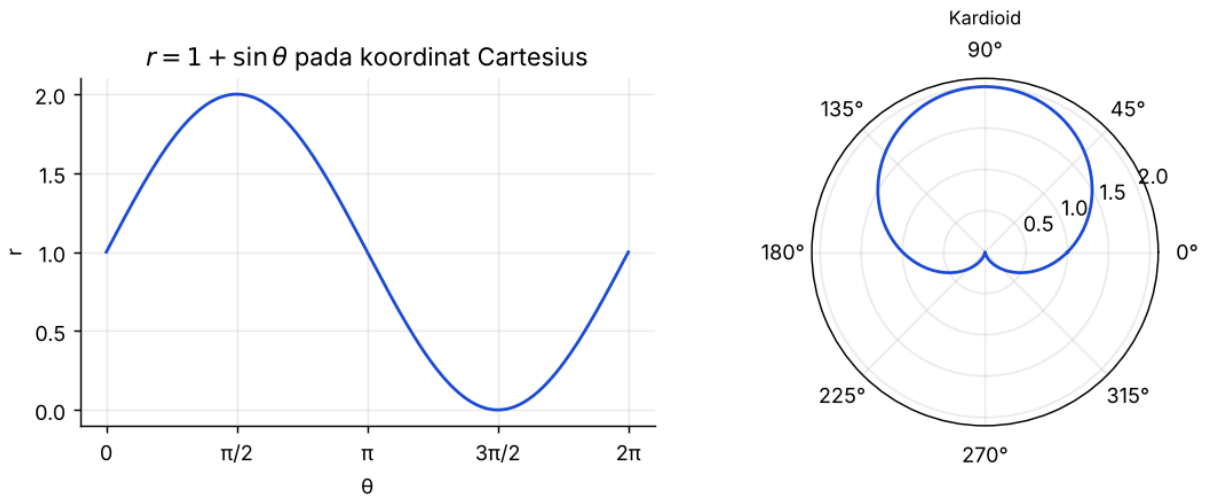
### Membuat sketsa: baca dulu dari grafik Cartesius

Cara paling dapat diandalkan untuk kurva kutub tanpa komputer: gambar $r$ terhadap $\theta$ pada koordinat Cartesius biasa, lalu "baca" bagaimana $r$ naik/turun saat $\theta$ bergerak, dan terjemahkan menjadi gerak sepanjang sinar yang berputar.

**CONTOH 6 — KARDIOID $R = 1 + \SIN \Theta$**

- $\theta : 0 \to \pi/2$: $r$ naik dari 1 ke 2.
- $\theta : \pi/2 \to \pi$: $r$ turun dari 2 ke 1.
- $\theta : \pi \to 3\pi/2$: $r$ turun dari 1 ke 0 (kurva kembali ke kutub dengan "ujung runcing").
- $\theta : 3\pi/2 \to 2\pi$: $r$ naik dari 0 ke 1.

Bentuknya seperti hati (*kardia* = jantung), makanya disebut kardioid.




Kiri: $r$ sebagai fungsi $\theta$; kanan: kurva kutubnya.

**CONTOH 7 — MAWAR BERDAUN EMPAT $R = \COS 2\Theta$**

Pada $0 \le \theta \le \pi/4$, $r$ turun dari 1 ke 0 (daun pertama di kuadran I). Pada $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$, $r$ negatif dari 0 ke $-1$: titik berada di sisi berlawanan (kuadran III), sehingga daun kedua terbentuk di kuadran III, bukan II. Kelanjutan analog membentuk empat daun. Secara umum $r = \cos n\theta$ dan $r = \sin n\theta$ menghasilkan mawar berdaun $n$ bila $n$ ganjil dan $2n$ bila $n$ genap.

## 4. Simetri

| Bila persamaan tidak berubah jika… | maka kurva simetris terhadap… |
|---|---|
| $\theta \to -\theta$ | sumbu kutub (sumbu $x$) |
| $r \to -r$, atau $\theta \to \theta + \pi$ | kutub (putaran $180°$) |
| $\theta \to \pi - \theta$ | garis $\theta = \pi/2$ (sumbu $y$) |

Contoh: $r = 2\cos\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu kutub; $r = 1 + \sin\theta$ dan $r = \cos 2\theta$ simetris terhadap sumbu $y$ (karena $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$); mawar $r = \cos 2\theta$ juga simetris terhadap kutub. Dengan simetri, cukup gambar sebagian lalu cerminkan.

## 5. Garis singgung kurva kutub

Untuk $r = f(\theta)$, jadikan $\theta$ parameter: $x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta$. Aturan perkalian dan rumus parametrik memberi

**RUMUS (3)**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}.$$

- Tangen horizontal: pembilang $= 0$ (penyebut $\neq 0$).
- Tangen vertikal: penyebut $= 0$ (pembilang $\neq 0$).
- **Di kutub** ($r = 0$) rumus menjadi $dy/dx = \tan\theta$ bila $dr/d\theta \neq 0$: garis singgung di kutub adalah garis $\theta = \theta_0$ di mana $r(\theta_0) = 0$. Misalnya pada $r = \cos 2\theta$, $r = 0$ di $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, jadi garis $y = x$ dan $y = -x$ menyinggung kurva di titik asal.

**CONTOH 8 — KARDIOID $R = 1 + \mathrm{SIN}\,\Theta$**

$dr/d\theta = \cos\theta$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin}$$

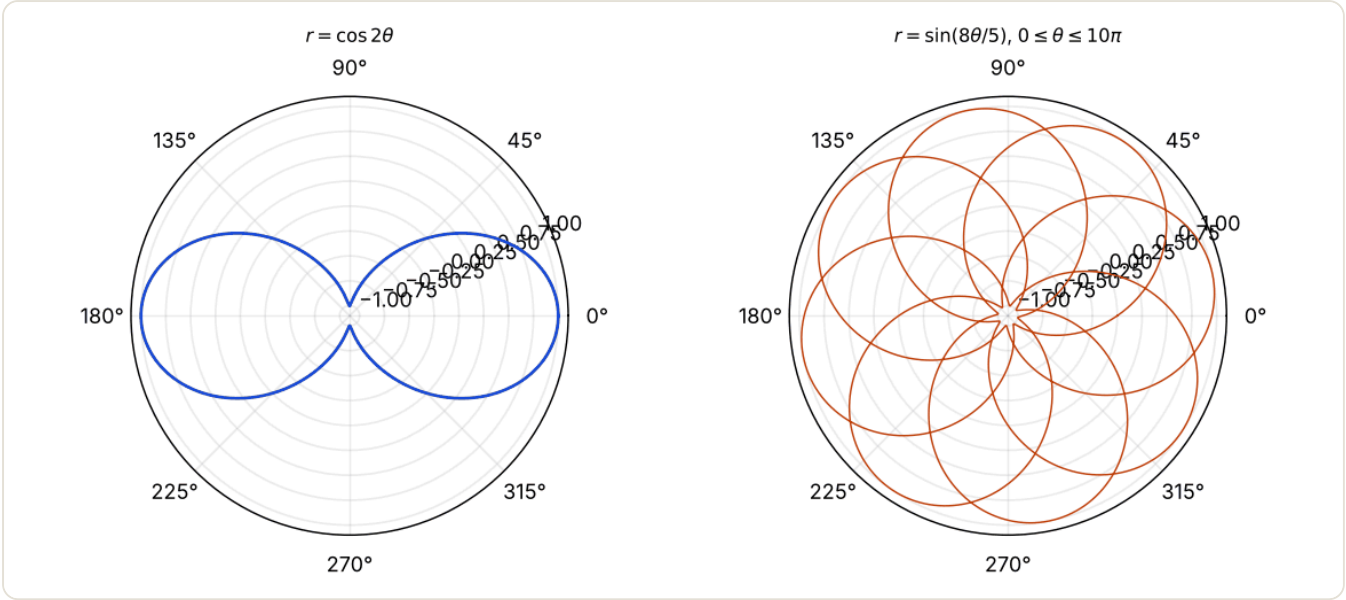
(a) Di $\theta = \pi/3$: $\cos = \frac{1}{2}$, $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pembilang $= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, penyebut $= (1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\sqrt{3})$. Setelah disederhanakan kemiringannya adalah $-1$ (perhitungannya: pembilang $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, penyebut $\frac{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, rasio $= -1$).
(b) Horizontal: pembilang nol, $\cos\theta = 0$ atau $1 + 2\sin\theta = 0$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; namun di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ penyebut juga nol (faktor $1+\sin\theta$), jadi nilai itu dikeluarkan dan ditinjau terpisah. Titik horizontal yang valid: $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, yaitu $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6})$, $(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$. Vertikal: penyebut nol dari faktor $1 - 2\sin\theta$, yaitu $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, titik $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$ dan $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$. Di $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (kutub) pembilang dan penyebut keduanya nol; dengan l'Hôpital limit $dy/dx \to \infty$, jadi ada garis singgung vertikal di kutub.

# 6. Menggambar dengan komputer

Bila alat tidak punya perintah kutub langsung, ubah ke parametrik: $x = f(t)\cos t,\ y = f(t)\sin t$. Tentukan dulu rentang $t$ agar seluruh kurva tergambar.

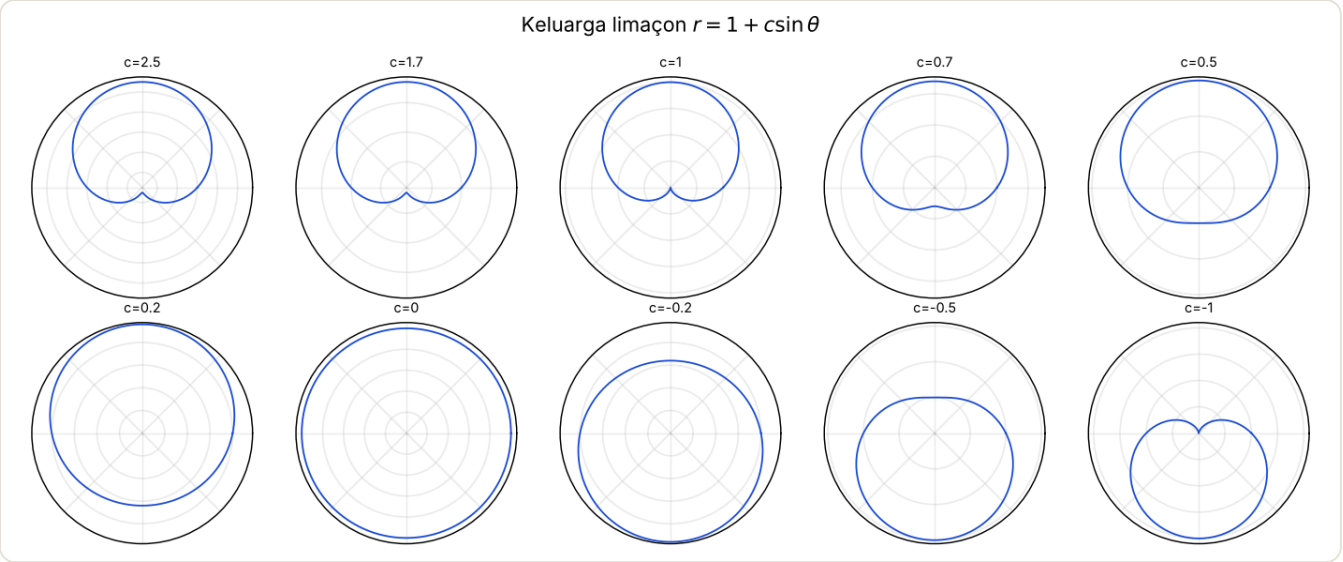
**CONTOH 9 — $R = \mathrm{SIN}(8\Theta/5)$**

Setelah $n$ putaran penuh ($\theta \to \theta + 2n\pi$), nilai $r$ menjadi $\sin\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right)$. Kurva mulai mengulang jika pergeseran sudut itu kelipatan $2\pi$, yaitu $\frac{16n\pi}{5} = 2\pi k$, atau $\frac{8n}{5} = k$ bilangan bulat. Nilai $n$ positif terkecil yang memenuhi adalah $n = 5$, sehingga cukup menggambar $0 \le \theta \le 10\pi$. Hasilnya mawar dengan 16 daun.




## Keluarga limaçon $r = 1 + c\sin\theta$

- $c > 1$: ada simpul dalam yang mengecil saat $c \downarrow 1$.
- $c = 1$: kardioid.
- $\frac{1}{2} < c < 1$: ujung runcing kardioid melembut menjadi "lekukan" (dimple) di dekat kutub, yaitu di bagian bawah untuk $r = 1 + c\sin\theta$.
- $0 < c \le \frac{1}{2}$: bentuk oval yang makin bulat saat $c \to 0$.
- $c = 0$: lingkaran $r = 1$. Untuk $c < 0$ bentuknya adalah pencerminan terhadap sumbu horizontal.




Kata "limaçon" berarti siput (Prancis). Lintasan Mars dilihat dari Bumi dimodelkan oleh limaçon berloop.

Batas $c = \frac{1}{2}$ antara "berlekuk" dan "oval" dapat dibuktikan. Di titik bawah $\theta = \frac{3\pi}{2}$ kita punya $r = 1 - c$, $r' = 0$, $r'' = c$. Rumus kelengkungan kurva kutub (pembilang: $r^2 + 2r'^2 - rr''$) memberi pembilang $(1-c)^2 - (1-c)c = (1-c)(1-2c)$, yang berganti tanda tepat di $c = \frac{1}{2}$ (untuk $0 < c < 1$). Artinya di bawah $c = \frac{1}{2}$ kurva cembung di titik itu (oval), di atasnya cekung (lekukan).

# 10.4 Luas dan Panjang Kurva dalam Koordinat Kutub

## 1. Luas daerah kutub

Dasar dari semuanya adalah luas *juring* (sektor) lingkaran. Juring berjari-jari $r$ dengan sudut pusat $\theta$ (radian) memiliki luas

$$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta, \tag{1}$$

karena luasnya sebanding dengan sudut pusat: $\dfrac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2$.

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah daerah yang dibatasi kurva $r = f(\theta)$ dan dua sinar $\theta = a$ dan $\theta = b$, dengan $f$ kontinu dan positif serta $0 < b - a \le 2\pi$. Bagi $[a, b]$ menjadi $n$ bagian sama lebar $\Delta\theta$. Sinar-sinar pembagi memecah $\mathcal{R}$ menjadi $n$ irisan tipis. Irisan ke-$i$ dihampiri juring berjari-jari $f(\theta_i^*)$ dan sudut $\Delta\theta$, maka luasnya $\approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$. Menjumlahkan lalu mengambil limit $n \to \infty$ menghasilkan integral:

**RUMUS LUAS**

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,[f(\theta)]^2\,d\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}\,r^2\,d\theta.$$

Bayangkan sinar yang berputar dari $\theta = a$ ke $\theta = b$ menyapu daerah itu.

**CONTOH 1 — SATU DAUN MAWAR $R = \cos 2\Theta$**

Daun di sisi kanan disapu sinar dari $\theta = -\frac{\pi}{4}$ sampai $\frac{\pi}{4}$ (karena $r \ge 0$ di sana dan $r = 0$ di kedua ujungnya). Dengan simetri terhadap sumbu $x$:

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\,d\theta = \left[\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]$$

Karena keempat daun kongruen, luas seluruh mawar $= 4 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Kerjakan juga dengan alat: kalkulator Python, pilih *Luas daerah kutub*, $r(t) = \cos(2 * t)$, batas $-pi/4$ sampai $pi/4$, hasil $\approx 0.3927 = \pi/8$.

**CONTOH 2 — LUAS KARDIOID UTUH**

$r = 1 + \sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta - 2\cos\theta + \tfrac{\theta}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{2}\cdot 3\pi = \tfrac{3}{2}$$

## 2. Luas di antara dua kurva kutub

Bila $\mathcal{R}$ dibatasi kurva dalam $r = g(\theta)$ dan kurva luar $r = f(\theta)$ untuk $a \le \theta \le b$ (dengan $f \ge g \ge 0$), luasnya adalah luas daerah luar dikurangi luas daerah dalam:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta.$$

**CONTOH 3 — DI DALAM LINGKARAN, DI LUAR KARDIOID**

Cari luas daerah di dalam $r = 3\sin\theta$ dan di luar $r = 1 + \sin\theta$.

**Langkah 1: titik potong.** $3\sin\theta = 1 + \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{6}$. Itulah batas $a, b$.

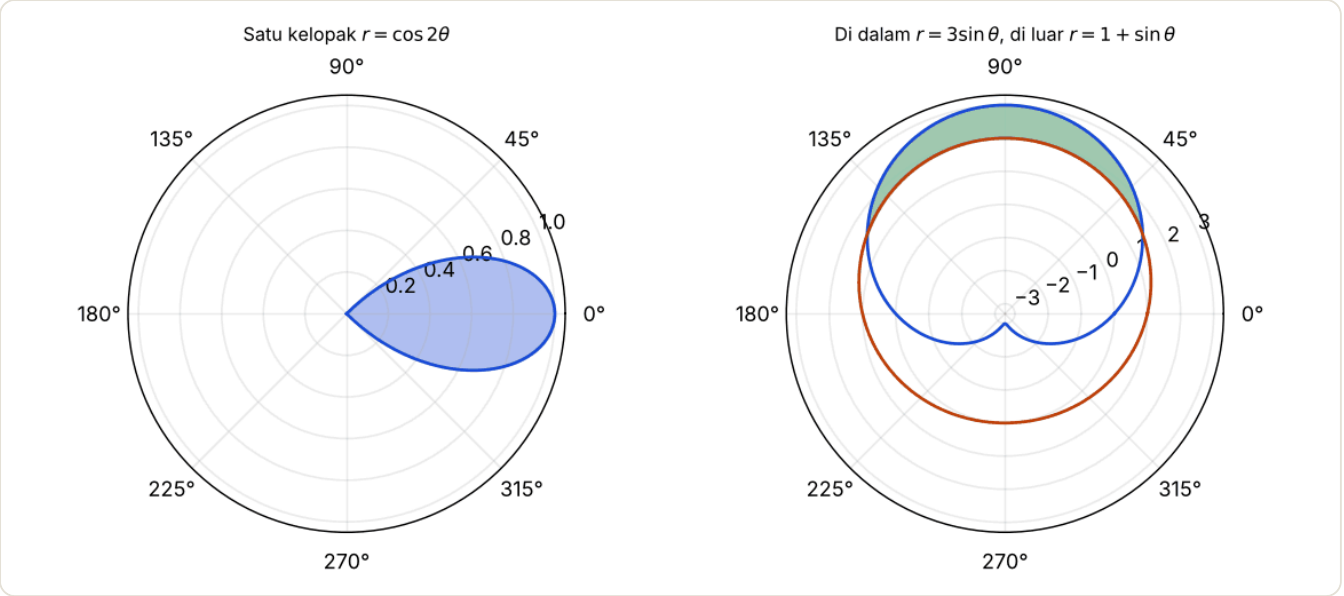
**Langkah 2: integral.** Pada $\tfrac{\pi}{6} \le \theta \le \tfrac{5\pi}{6}$, lingkaran adalah kurva luar. Karena daerah simetris terhadap sumbu $y$ ($\theta = \pi/2$), hitung separuh lalu gandakan:

$$A = 2\cdot\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(9\sin^2\theta - (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\right) d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin^2\theta - 2\sin\theta - 1)\, d\theta$$

Gunakan $\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$: integran menjadi $3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta$, sehingga

$$A = \left[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(\tfrac{3\pi}{2} + 0\right) - \left(\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \pi.$$

(Perhatikan: di $\theta = \pi/6$, $-2\sin\tfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ dan $2\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, sehingga saling menghapus.) Luas $= \pi$.




Kiri: satu daun $r = \cos 2\theta$. Kanan: daerah di dalam lingkaran dan di luar kardioid pada Contoh 3.

**PERINGATAN: TITIK POTONG KURVA KUTUB**

Karena satu titik memiliki banyak representasi, menyelesaikan $f(\theta) = g(\theta)$ *tidak* selalu menemukan semua titik potong. Pada Contoh 3, lingkaran dan kardioid memotong di $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ dan $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ *dan juga di kutub*. Kutub tidak ditemukan dari penyelesaian persamaan karena kutub bukan $(r, \theta)$ yang sama untuk kedua kurva: lingkaran mencapai kutub di $\theta = 0, \pi$ ($3\sin\theta = 0$), sedangkan kardioid mencapainya di $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Pikirkan dua titik yang bergerak sepanjang kurva masing-masing saat $\theta$ naik: mereka tidak *bertabrakan* di kutub karena tiba pada waktu berbeda, tetapi kurvanya tetap berpotongan di sana.

**Saran:** selalu gambar kedua kurva (dengan komputer bila perlu), dan periksa kutub secara terpisah.

**CONTOH 4 — SEMUA TITIK POTONG $R = \cos 2\theta$ DAN $R = \frac{1}{2}$**

Dari $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ diperoleh $2\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, jadi $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$: empat titik. Dari gambar ada empat titik lagi, yaitu $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Titik-titik ini ditemukan lewat simetri, atau dengan menulis lingkaran sebagai $r = -\frac{1}{2}$ dan menyelesaikan $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$. Total delapan titik potong.

## 3. Panjang kurva kutub

Jadikan $\theta$ parameter: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, r = f(\theta)$. Turunkan:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

Kuadratkan dan jumlahkan; suku silang $\mp 2r\,\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta$ saling menghapus dan $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$:

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2.$$

Dengan rumus panjang kurva parametrik (Bagian 10.2) kita dapatkan

**RUMUS PANJANG**

$$L=\int_a^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

**CONTOH 5 — KELILING KARDIOID**

$r=1+\sin\theta$, $\dfrac{dr}{d\theta}=\cos\theta$:

$$r^2+r'^2=1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta=2+2\sin\theta.$$

Integral $\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\sin\theta}\,d\theta$ dapat dihitung dengan mengalikan dan membagi dengan $\sqrt{2-2\sin\theta}$, atau dengan identitas setengah-sudut ($1+\sin\theta=2\sin^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})$). Hasilnya $L=8$. Periksa numerik di kalkulator Python (hasil $\approx 7.9999999$).

**CONTOH 6 — SPIRAL $R=\Theta$**

Di sini $r=\theta$ dan $dr/d\theta=1$, jadi

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\Big[\tfrac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\big)\Big]_0^{\pi}=\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+1}+\tfrac{1}{2}\ln\big(\pi$$

(Antiturunan $\int\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$ diperoleh dengan substitusi trigonometri $\theta=\tan u$.)

## 4. Luas permukaan benda putar (kurva kutub)

Jika kurva $r=f(\theta)$, $a\le\theta\le b$, diputar mengelilingi sumbu kutub (sumbu $x$), maka dengan $y=r\sin\theta$ dan elemen busur kutub di atas,

$$S=\int_a^b 2\pi\, r\sin\theta\,\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

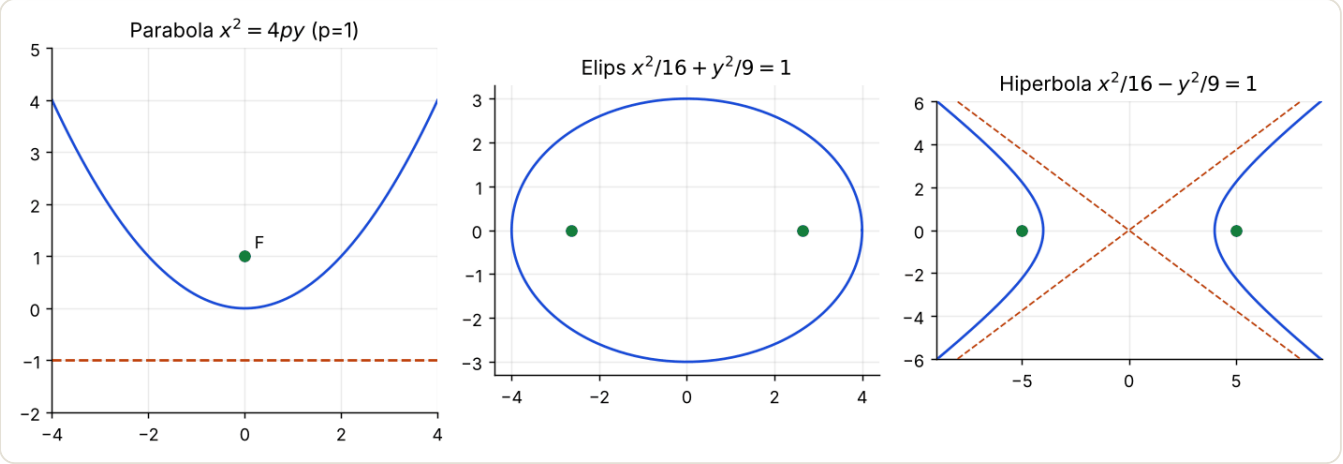
Untuk diputar mengelilingi sumbu $y$, ganti $\sin\theta$ dengan $\cos\theta$ (karena $x=r\cos\theta$).

# 5. Ringkasan

| Besaran | Rumus |
|---|---|
| Luas daerah sampai kutub | $\frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta$ |
| Luas antara dua kurva | $\frac{1}{2}\int_a^b (r_{luar}^2 - r_{dalam}^2)\,d\theta$ |
| Panjang kurva | $\int_a^b \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$ |
| Luas permukaan putar (sumbu kutub) | $\int_a^b 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}\,d\theta$ |

# 10.5 Irisan Kerucut

Parabola, elips, dan hiperbola disebut **irisan kerucut** (*conic sections*) karena masing-masing adalah hasil perpotongan sebuah kerucut dengan sebuah bidang, dengan kemiringan bidang yang menentukan jenisnya. Dalam bagian ini kita memberi definisi geometris yang berdiri sendiri (tanpa kerucut) dan menurunkan persamaan bakunya.




Parabola, elips, dan hiperbola beserta fokusnya (titik hijau).

## 1. Parabola

**DEFINISI**

**Parabola** adalah himpunan titik di bidang yang berjarak sama dari sebuah titik tetap $F$ (**fokus**) dan sebuah garis tetap (**direktriks**). Titik tengah antara fokus dan direktriks (pada garis tegak lurus direktriks melalui $F$) terletak pada parabola dan disebut **puncak**. Garis tegak lurus direktriks melalui fokus disebut **sumbu** parabola.

### Menurunkan persamaan

Letakkan puncak di titik asal dan direktriks mendatar: fokus $F(0, p)$, direktriks $y = -p$. Titik $P(x, y)$ memenuhi $|PF| =$ jarak ke direktriks:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Kuadratkan: $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$, sehingga

**PERSAMAAN BAKU**

$$x^2 = 4py \quad (\text{fokus } (0,p),\ \text{direktriks } y=-p).$$

Terbuka ke atas bila $p>0$, ke bawah bila $p<0$. Bila $x$ dan $y$ ditukar: $y^2=4px$, fokus $(p,0)$, direktriks $x=-p$; terbuka ke kanan bila $p>0$, ke kiri bila $p<0$.

Ekivalen dengan $y=ax^2$ dengan $a=\dfrac{1}{4p}$.

**CONTOH 1**

Parabola $y^2+10x=0$. Tulis $y^2=-10x$, cocokkan dengan $y^2=4px$: $4p=-10 \Rightarrow p=-\frac{5}{2}$. Fokus $(-\frac{5}{2},0)$, direktriks $x=\frac{5}{2}$, terbuka ke kiri.

Parabola dipakai pada lampu depan mobil, teleskop pantul, dan jembatan gantung. Sifat pantulnya: sinar yang sejajar sumbu dipantulkan melewati fokus (dan sebaliknya).

# 2. Elips

**DEFINISI**

**Elips** adalah himpunan titik $P$ yang jumlah jaraknya ke dua titik tetap $F_1, F_2$ (**fokus**) konstan: $|PF_1|+|PF_2|=2a$ (dengan $2a>|F_1F_2|$).

Hukum pertama Kepler: orbit planet berupa elips dengan Matahari di salah satu fokus.

## Menurunkan persamaan

Letakkan fokus di $(\pm c,0)$. Syaratnya $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Pindahkan satu akar dan kuadratkan:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \;\Rightarrow\; x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2}$$

Sederhanakan: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$. Kuadratkan lagi: $a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$, sehingga $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Dari segitiga $F_1F_2P$ kita tahu $2c<2a$, jadi $a^2-c^2>0$; definisikan $b^2=a^2-c^2$. Pembagian dengan $a^2b^2$ memberi

**PERSAMAAN BAKU ELIPS**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a\geq b>0, \quad c^2=a^2-b^2.$$

Fokus $(\pm c,0)$, titik puncak $(\pm a,0)$, sumbu mayor panjang $2a$ (sepanjang sumbu $x$), sumbu minor panjang $2b$ (titik $(0,\pm b)$). Bila fokus pada sumbu $y$: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, fokus $(0,\pm c)$, puncak $(0,\pm a)$.

Bila $c=0$ (dua fokus berimpit), $a=b$ dan elips menjadi lingkaran jari-jari $a$.

**CONTOH 2 — DARI PERSAMAAN KE ELEMEN ELIPS**

$9x^2+16y^2=144$. Bagi dengan 144: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $a=4,\ b=3$. $c^2=16-9=7$, fokus $(\pm\sqrt{7},0)$, puncak $(\pm 4,0)$, titik potong sumbu $y$: $(0,\pm 3)$.

**CONTOH 3 — DARI ELEMEN KE PERSAMAAN**

Fokus $(0,\pm 2)$, puncak $(0,\pm 3)$: fokus di sumbu $y$, $c=2,\ a=3, b^2=9-4=5$. Persamaan $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$, atau $9x^2+5y^2=45$.

**Sifat pantul:** cahaya atau bunyi dari satu fokus dipantulkan ke fokus lain. Prinsip ini dipakai pada litotripsi (penghancur batu ginjal dengan gelombang kejut) dan pada *whispering gallery*.

## 3. Hiperbola

**DEFINISI**

**Hiperbola** adalah himpunan titik $P$ yang *selisih* jaraknya ke dua fokus $F_1, F_2$ konstan: $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$.

Turunannya paralel dengan elips (dengan selisih menggantikan jumlah, dan $c>a$): dengan fokus $(\pm c,0)$ dan $b^2=c^2-a^2$,

**PERSAMAAN BAKU HIPERBOLA**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

Titik puncak $(\pm a, 0)$, fokus $(\pm c, 0)$, asimtot $y = \pm \dfrac{b}{a} x$. Tidak ada titik potong sumbu $y$ (karena $-y^2/b^2 = 1$ mustahil). Hiperbola memiliki dua cabang, $x \geq a$ dan $x \leq -a$. Bila fokus pada sumbu $y$: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, fokus $(0, \pm c)$, asimtot $y = \pm \dfrac{a}{b} x$.

**Cara menggambar:** gambar dulu persegi panjang dengan sisi $2a$ dan $2b$ berpusat di titik pusat, tarik diagonalnya sebagai asimtot, lalu lukis cabang yang bersinggungan dengan puncak dan mendekati asimtot.

**CONTOH 4**

$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. $a = 4,\ b = 3,\ c = 5$. Fokus $(\pm 5, 0)$, puncak $(\pm 4, 0)$, asimtot $y = \pm \frac{3}{4} x$.

**CONTOH 5**

Puncak $(0, \pm 1)$, asimtot $y = \pm 2x$. Fokus pada sumbu $y$, $a = 1$; asimtot $y = \pm \frac{a}{b} x \Rightarrow \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. $c^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, fokus $(0, \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$; persamaan $y^2 - 4x^2 = 1$.

Hiperbola muncul dalam hukum Boyle, hukum Ohm, kurva penawaran dan permintaan, dan sistem navigasi LORAN (stasiun radio di titik $A, B$; selisih waktu tiba sinyal $\Rightarrow$ selisih jarak $\Rightarrow$ kapal berada pada satu cabang hiperbola dengan fokus $A, B$).

## 4. Irisan kerucut yang digeser

Untuk menggeser pusat/puncak ke $(h, k)$, ganti $x$ dengan $x - h$ dan $y$ dengan $y - k$ pada semua persamaan baku (lihat Lampiran C buku).

**CONTOH 6 — ELIPS DARI FOKUS DAN PUNCAK**

Fokus $(-1, 2), (5, 2)$, puncak $(-2, 2), (6, 2)$. Pusat adalah titik tengah: $(2, 2)$. Panjang sumbu mayor $= 8 \Rightarrow a = 4$; jarak fokus $= 6 \Rightarrow c = 3$; $b^2 = 16 - 9 = 7$. Persamaan:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{7} = 1.$$

**CONTOH 7 — MELENGKAPKAN KUADRAT**

$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$. Kelompokkan: $9(x^2 - 8x) - 4(y^2 - 2y) = -176$. Lengkapkan kuadrat: $9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 = -176 + 144 - 4 = -36$. Bagi dengan $-36$ :

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1.$$

Hiperbola dengan fokus pada garis vertikal $x = 4$: $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{13}$, pusat $(4, 1)$; puncak $(4, 4), (4, -2)$; fokus $(4, 1 \pm \sqrt{13})$; asimtot $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$.

## 5. Pendekatan numerik untuk keliling elips

Keliling elips $x = a\sin\theta,\ y = b\cos\theta$ adalah integral eliptik $L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta$ dengan $e = c/a$ — tidak punya antiturunan elementer. Gunakan integral numerik (Simpson). Dengan kalkulator Python: panjang kurva parametrik $x = 3\cos(t),\ y = 2\sin(t)$, $0$ sampai $2 * pi$, memberi $\approx 15.865$.

## 6. Ringkasan

| | Parabola | Elips | Hiperbola |
|---|---|---|---|
| Definisi | $\lvert PF\rvert = d(P, \ell)$ | $\lvert PF_1\rvert + \lvert PF_2\rvert = 2a$ | $\lvert\lvert PF_1\rvert - \lvert PF_2\rvert\rvert = 2a$ |
| Persamaan baku | $x^2 = 4py$ | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| Hubungan | — | $c^2 = a^2 - b^2$ | $c^2 = a^2 + b^2$ |
| Eksentrisitas $e$ | 1 | $c/a < 1$ | $c/a > 1$ |

# 10.6 Irisan Kerucut dalam Koordinat Kutub

Pada subbab sebelumnya parabola didefinisikan lewat fokus dan direktriks, sedangkan elips dan hiperbola lewat dua fokus. Di sini ketiganya disatukan dalam satu definisi tunggal berbasis *satu fokus, satu direktriks, dan satu bilangan* (eksentrisitas). Bila fokus diletakkan di kutub, hasilnya adalah persamaan kutub yang sangat sederhana dan sangat cocok untuk gerak planet, satelit, dan komet.

## 1. Teorema fokus–direktriks

**TEOREMA**

Misalkan $F$ titik tetap (fokus), $\ell$ garis tetap (direktriks), dan $e > 0$ bilangan tetap (**eksentrisitas**). Himpunan semua titik $P$ yang memenuhi

$$\frac{|PF|}{|P\ell|} = e$$

(rasio jarak ke fokus terhadap jarak ke direktriks sama dengan $e$) adalah irisan kerucut:

- elips bila $e < 1$,
- parabola bila $e = 1$,
- hiperbola bila $e > 1$.

### Bukti

Untuk $e = 1$, syarat itu menjadi $|PF| = |P\ell|$, yaitu definisi parabola.

Umumnya, letakkan $F$ di titik asal dan direktriks $\ell$ pada garis $x = d$ ($d > 0$), tegak lurus sumbu kutub. Untuk $P(r, \theta)$: $|PF| = r$ dan $|P\ell| = d - r\cos\theta$. Syarat $|PF| = e|P\ell|$ menjadi

$$r = e\,(d - r\cos\theta). \tag{2}$$

Kuadratkan dan konversi ke Cartesius ($r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$): $x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2d^2 - 2e^2dx + e^2x^2$, yaitu

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2.$$

Bila $e \neq 1$, lengkapkan kuadrat untuk $x$:

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 \Big/ \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1. \tag{3}$$

Untuk $e < 1$ penyebut kedua positif: persamaan elips dengan pusat $(h, 0)$, $h = -\dfrac{e^2 d}{1-e^2}$ dan

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}.$$

Maka $c^2 = a^2 - b^2 = \dfrac{e^4 d^2}{(1-e^2)^2}$, sehingga $c = \dfrac{e^2 d}{1-e^2} = |h|$: fokus (titik asal) berjarak $c$ dari pusat — sesuai fokus elips pada Bagian 10.5. Selain itu $\dfrac{c}{a} = e$, yaitu **eksentrisitas elips** $= c/a$. Untuk $e > 1$, penyebut kedua negatif dan (3) adalah persamaan hiperbola dengan $e = c/a$ pula. ■

## 2. Persamaan kutub irisan kerucut

Dari (2): $r + er\cos\theta = ed$, sehingga $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$. Letak direktriks yang lain memberi variasi tanda dan fungsi:

**TEOREMA (PERSAMAAN KUTUB KONIK)**

Persamaan kutub berbentuk

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{atau} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$$

adalah irisan kerucut dengan eksentrisitas $e$ dan fokus di kutub.

| BENTUK | DIREKTRIKS |
|---|---|
| $R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$ | $X = D$ **(DI KANAN FOKUS)** |
| $R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{COS}\,\Theta}$ | $X = -D$ **(DI KIRI FOKUS)** |
| $R = \dfrac{ED}{1 + E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$ | $Y = D$ **(DI ATAS FOKUS)** |
| $R = \dfrac{ED}{1 - E\,\mathrm{SIN}\,\Theta}$ | $Y = -D$ **(DI BAWAH FOKUS)** |

Untuk menurunkan versi lain, ulangi derivasi tadi dengan jarak ke direktriks yang sesuai, mis. direktriks $y = d$: $|P\ell| = d - r\sin\theta$, menghasilkan $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$.

**CONTOH 1 — PARABOLA**

Fokus di titik asal, direktriks $y = -6$. Direktriks di bawah fokus: bentuk $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$, $e = 1,\ d = 6$: $r = \dfrac{6}{1 - \sin\theta}$.

**CONTOH 2 — MENGENALI KONIK DARI PERSAMAAN**

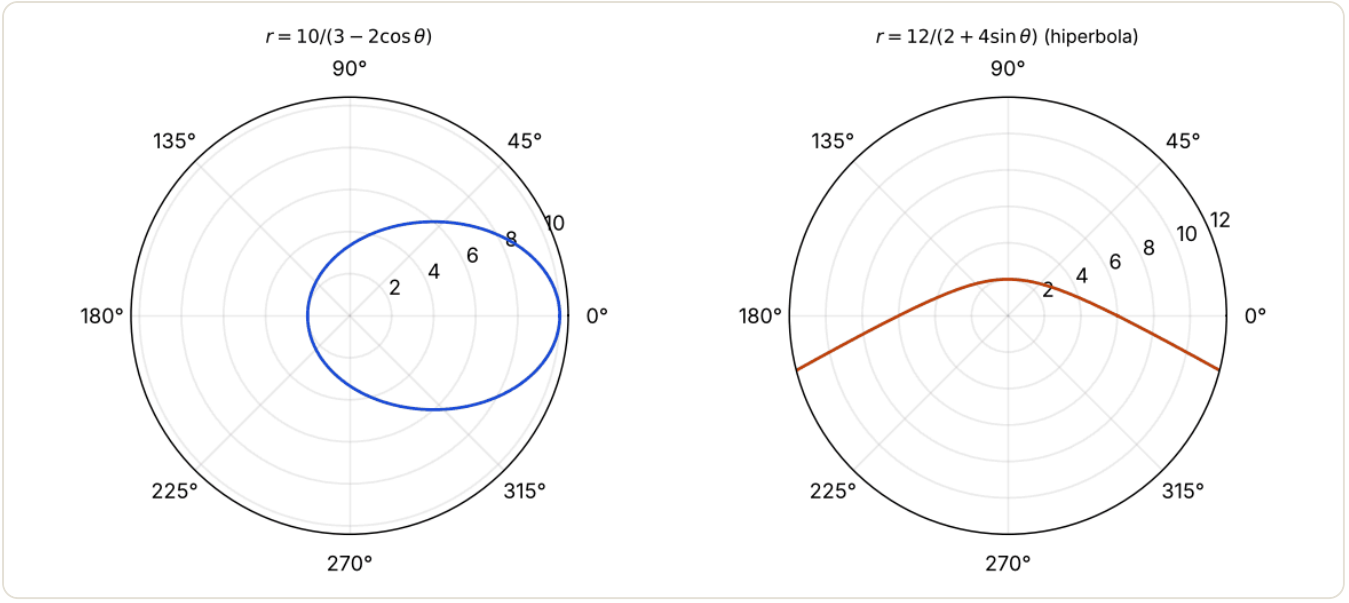
$r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$. Bagi pembilang dan penyebut dengan 3 agar penyebut berbentuk $1 \pm e\cos\theta$:

$$r = \frac{10/3}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}.$$

Jadi $e = \frac{2}{3} < 1$: elips; $ed = \frac{10}{3} \Rightarrow d = 5$; direktriks $x = -5$ (tanda minus). Puncak: $\theta = 0 \to r = 10$, titik $(10, 0)$; $\theta = \pi \to r = 2$, titik $(-2, 0)$ Cartesius. Panjang sumbu mayor $= 10 + 2 = 12$, $a = 6$; cek $e = c/a$ dengan $c = \frac{12}{2} - 2 = 4$: $4/6 = \frac{2}{3}$ ✓.

**CONTOH 3 — HIPERBOLA**

$r = \dfrac{12}{2 + 4\sin\theta} = \dfrac{6}{1 + 2\sin\theta}$: $e = 2 > 1$ hiperbola, $ed = 6 \Rightarrow d = 3$, direktriks $y = 3$. Puncak muncul di $\theta = \frac{\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{3} = 2$, yaitu titik $(0, 2)$; dan di $\theta = \frac{3\pi}{2}$, dengan $r = \frac{6}{1-2} = -6$, yaitu titik kutub $(-6, \frac{3\pi}{2}) = (6, \frac{\pi}{2})$, atau $(0, 6)$ di Cartesius. Jadi dua puncaknya $(0, 2)$ dan $(0, 6)$; pusat hiperbola $(0, 4)$, $a = 2$, dan fokus (titik asal) berjarak $c = 4$ dari pusat sehingga $e = c/a = 2$ ✓. Asimtot sejajar sinar $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (nilai $\theta$ yang membuat $1 + 2\sin\theta = 0$).

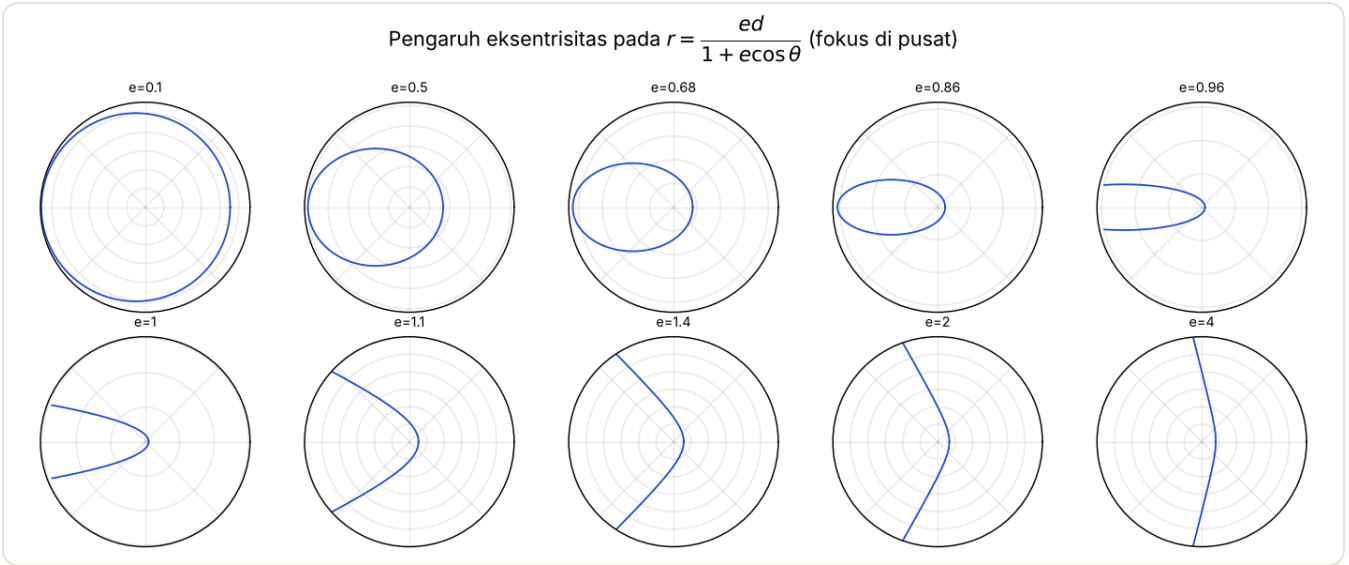



## Memutar konik

Grafik $r = f(\theta - \alpha)$ adalah grafik $r = f(\theta)$ yang diputar berlawanan arah jarum jam sebesar $\alpha$ terhadap titik asal. Jadi elips Contoh 2 yang diputar $\frac{\pi}{4}$ adalah $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$, berputar di sekitar fokus kirinya. Bandingkan dengan persamaan Cartesius yang akan sangat panjang.

## Pengaruh eksentrisitas

Untuk $e$ mendekati 0, elips hampir lingkaran. Saat $e \to 1^-$ elips makin memanjang, lalu pada $e = 1$ menjadi parabola dan untuk $e > 1$ menjadi hiperbola yang cabangnya makin "lancip" (makin lurus) seiring $e$ membesar.



# 3. Hukum Kepler

**TIGA HUKUM KEPLER (1609, 1619)**

1. Planet mengitari Matahari dalam orbit elips dengan Matahari di salah satu fokus.
2. Garis yang menghubungkan Matahari dan planet menyapu luas yang sama dalam waktu yang sama.
3. Kuadrat periode revolusi sebanding dengan pangkat tiga panjang sumbu mayor orbit.

Hukum-hukum ini juga berlaku untuk bulan, komet, dan satelit buatan yang dipengaruhi satu gaya gravitasi pusat. Pada Bab 13.4 hukum-hukum ini akan diturunkan dari hukum Newton.

## Persamaan orbit dengan $a$ dan $e$

Dalam astronomi lebih mudah memakai sumbu semimayor $a$ dan eksentrisitas $e$. Dari $a^2 = \dfrac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$ diperoleh $ed = a(1-e^2)$, jadi persamaan orbit (Matahari di kutub, direktriks $x = d$):

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}}$$

Titik terdekat (**perihelion**) saat $\theta = 0$: $r_{\min} = a(1-e)$. Titik terjauh (**aphelion**) saat $\theta = \pi$: $r_{\max} = a(1+e)$. (Karena $\dfrac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e)$ dan $\dfrac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e)$.)

**CONTOH 4 — ORBIT BUMI**

$e \approx 0.017$, panjang sumbu mayor $2a \approx 2.99 \times 10^8$ km, jadi $a \approx 1.495 \times 10^8$ km. Persamaan orbit:

$$r = \frac{1.495 \times 10^8 (1 - 0.017^2)}{1 + 0.017\cos\theta} \approx \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017\cos\theta}.$$

Perihelion: $a(1-e) \approx 1.47 \times 10^8$ km. Aphelion: $a(1+e) \approx 1.52 \times 10^8$ km. Selisihnya hanya sekitar 3%, sehingga orbit Bumi hampir lingkaran.

**CONTOH 5 — JARAK APHELION MERKURIUS**

Bila $e = 0.206$ dan jarak minimum $4.6 \times 10^7$ km, maka $a(1-e) = 4.6 \times 10^7 \Rightarrow a = \dfrac{4.6 \times 10^7}{0.794} \approx 5.79 \times 10^7$ km, dan jarak maksimum $a(1+e) \approx 5.79 \times 10^7 \times 1.206 \approx 6.99 \times 10^7$ km.

**CONTOH 6 — EKSENTRISITAS DARI DATA JARAK**

Perihelion dan aphelion Pluto: $4.43 \times 10^9$ dan $7.37 \times 10^9$ km. Dari $\dfrac{r_{\max}}{r_{\min}} = \dfrac{1+e}{1-e} = \dfrac{7.37}{4.43} \approx 1.664$: $1 + e = 1.664 - 1.664e \Rightarrow e = \dfrac{0.664}{2.664} \approx 0.249$.

## 4. Ringkasan

- Satu definisi menyatukan tiga konik: $|PF|/|P\ell| = e$.
- Persamaan kutub dengan fokus di kutub: $r = \dfrac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$ atau $\dfrac{ed}{1 \pm e\sin\theta}$.
- Untuk orbit elips: $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$; perihelion $a(1-e)$, aphelion $a(1+e)$.
- Rotasi sebesar $\alpha$: ganti $\theta$ dengan $\theta - \alpha$.

Dengan ini Bab 10 selesai. Lanjut ke Bab 11.1 — Barisan.