Bab 17 · Persamaan Diferensial Orde Dua

17.4 Penyelesaian dengan Deret

Banyak persamaan diferensial penting, misalnya persamaan Airy dan persamaan Hermite, tidak berkoefisien konstan dan tidak punya penyelesaian dalam fungsi elementer. Gagasan: cari penyelesaian dalam bentuk **deret pangkat** $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ dan tentukan koefisien c_n dengan memasukkannya ke persamaan.

1. Metode dasar

Deret pangkat dapat diturunkan suku demi suku dalam interval kekonvergenannya (11.9):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Langkah-langkah:

1. Substitusi y, y', y'' ke persamaan.
2. Geser indeks agar semua deret memuat x^n (atau pangkat yang sama).
3. Samakan koefisien x^n pada kedua ruas sama dengan nol; ini memberi **relasi rekurensi** untuk c_n.
4. Gunakan syarat awal bila ada: $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$.

2. Contoh

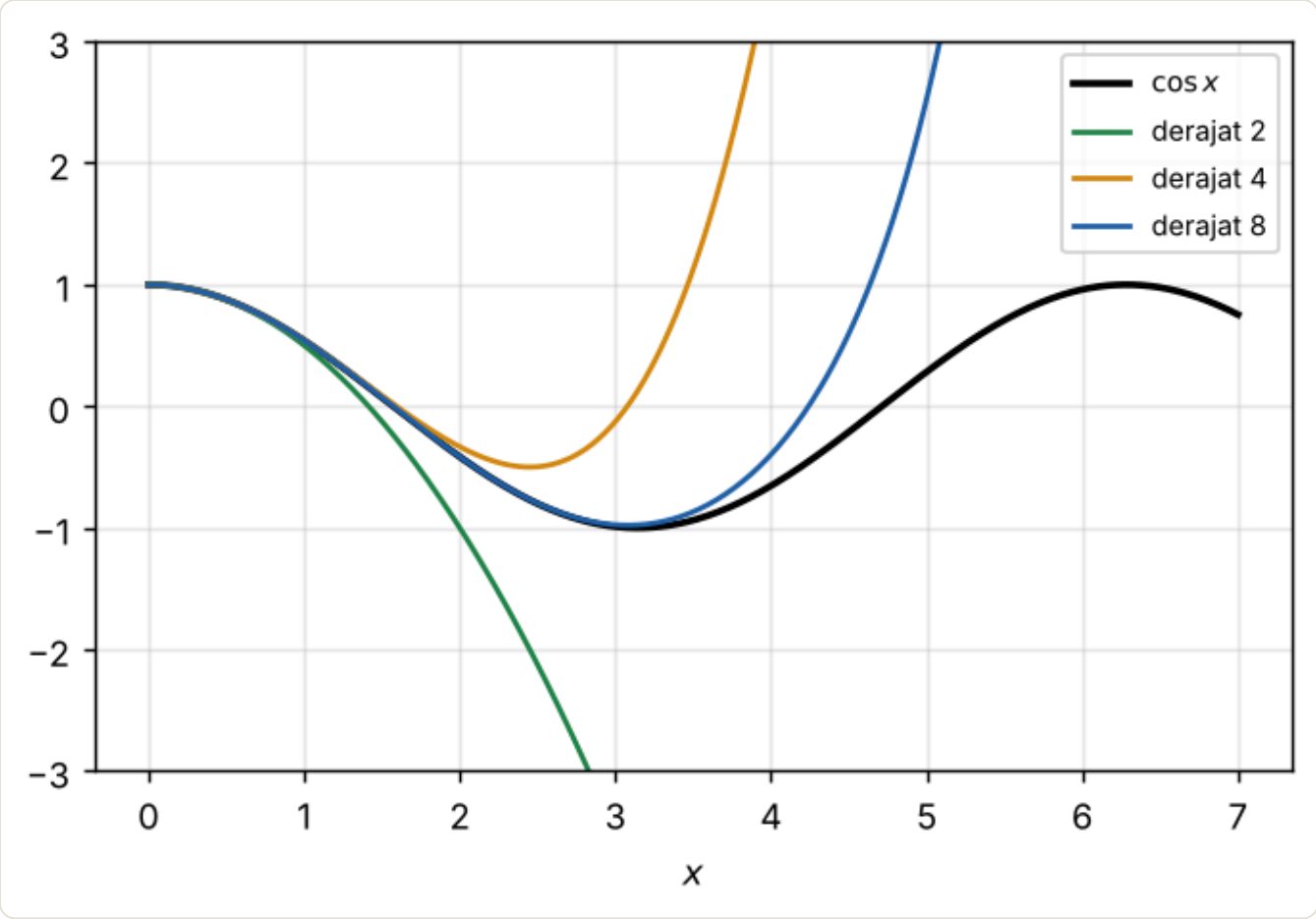
CONTOH 1 — PEMANASAN: $Y' = Y$

$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Geser ruas kiri: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$. Koefisien x^n: $(n+1)c_{n+1} = c_n \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}$, jadi $c_n = \frac{c_0}{n!}$ dan $y = c_0 \sum \frac{x^n}{n!} = c_0 e^x$. Metode mengungkap kembali penyelesaian yang kita kenal.

CONTOH 2 — $Y'' + Y = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$. Geser: $\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n\big]x^n = 0$. Rekurensi: $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{(n+2)(n+1)}$. Dari c_0: $c_2 = -\frac{c_0}{2}$, $c_4 = \frac{c_0}{24}$, $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$. Dari c_1: $c_3 = -\frac{c_1}{6}$, $c_5 = \frac{c_1}{120}$, $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$. Jadi

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$



Jumlah parsial deret $\cos x$ berderajat 2, 4, dan 8: makin banyak suku, makin lebar selang yang dihampiri.

CONTOH 3 — PERSAMAAN AIRY $Y'' = XY$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$. Ruas kiri dengan indeks $n \to n+2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$; ruas kanan dengan $n \to n-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$. Suku x^0: $2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Untuk $n \geq 1$: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = c_{n-1}$, yaitu

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Maka $c_3 = \frac{c_0}{6}$, $c_6 = \frac{c_3}{30} = \frac{c_0}{180}$, $c_4 = \frac{c_1}{12}$, $c_7 = \frac{c_4}{42} = \frac{c_1}{504}$, $c_5 = \frac{c_2}{20} = 0$, seluruh $c_{3k+2} = 0$. Penyelesaian umum

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right).$$

Cek numerik di $x = 1$: untuk $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ deret memberi $1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{12960} \approx 1{,}1723$, sama dengan penyelesaian numerik persamaan (Runge–Kutta) $1{,}1723$. Untuk $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$: $y(1) = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{504} + \frac{1}{45360} \approx 1{,}0853$ (suku x pertama sudah termasuk), cocok dengan penyelesaian numerik $1{,}0853$. Fungsi ini adalah fungsi Airy, dipakai dalam optika dan mekanika kuantum.

CONTOH 4 — $Y'' + XY' + Y = 0$

Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Substitusi: $\sum n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum n c_n x^n + \sum c_n x^n = 0$. Koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n = 0$, sehingga $c_{n+2} = -\dfrac{c_n}{n+2}$. $c_1 = 0 \Rightarrow$ semua suku ganjil nol. $c_0 = 1$: $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{1}{8}$, $c_6 = -\frac{1}{48}$, umum $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k k!}$. Maka $y = \sum \dfrac{(-x^2/2)^k}{k!} = e^{-x^2/2}$. Periksa: $y' = -xy$, $y'' = -y + x^2 y$; $y'' + xy' + y = -y + x^2 y - x^2 y + y = 0$. (Kurva lonceng distribusi normal.)

CONTOH 5 — PERSAMAAN HERMITE, PENYELESAIAN POLINOMIAL

$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$. Rekurensi: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = 2(n-\lambda)c_n$. Untuk $\lambda = 2$: $c_2 = \frac{2(0-2)}{2}c_0 = -2c_0$; $c_4 = \frac{2(2-2)}{12}c_2 = 0$, dan semua suku genap berikutnya nol. Dengan $c_1 = 0$ diperoleh polinomial $y = c_0(1 - 2x^2)$ (sebanding dengan polinomial Hermite $H_2 = 4x^2 - 2$). Pemeriksaan: $y = 1 - 2x^2$: $y'' = -4$, $-2xy' = -2x(-4x) = 8x^2$, $4y = 4 - 8x^2$; jumlah $-4 + 8x^2 + 4 - 8x^2 = 0$. Bila λ bilangan bulat tak negatif, rekurensi terputus dan menghasilkan polinomial.

CONTOH 6 — MASALAH NILAI AWAL DENGAN $X \neq 0$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Rekurensi dari koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 2c_n = 0$, yaitu $(n+2)(n+1)c_{n+2} = (n^2+n-2)c_n = (n+2)(n-1)c_n$. Maka $c_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1}c_n$. Untuk $c_1 = 1$: $c_3 = 0$, semua suku ganjil berikutnya nol, jadi $y = x$ (memang $y = x$ memenuhi persamaan: $0 - 2x + 2x = 0$). Untuk $c_0 = 1$: $c_2 = -1$, $c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_6 = \frac{3}{5}c_4 = -\frac{1}{5}$, umum $c_{2k} = -\frac{1}{2k-1}$: $y = 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots$.

3. Selang kekonvergenan dan titik biasa

Untuk persamaan $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, titik x_0 adalah **titik biasa** bila Q/P dan R/P analitik di sana. Maka terdapat dua penyelesaian deret pangkat di sekitar x_0 dengan jari-jari kekonvergenan minimal sejauh jarak ke titik singular (akar P) terdekat, termasuk titik kompleks. Pada Contoh 6, $P = 1 - x^2$ mempunyai akar ± 1, jadi deret konvergen untuk $|x| < 1$. Pada persamaan Airy tidak ada titik singular: konvergen untuk semua x.

TITIK SINGULAR (GAMBARAN)

Bila x_0 titik singular namun "reguler" (mis. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, persamaan Bessel), penyelesaian berbentuk $y = x^r \sum c_n x^n$ (metode Frobenius) dengan r ditentukan dari persamaan indeks. Ini di luar cakupan bab ini, tetapi memberi fungsi Bessel yang muncul pada getaran membran melingkar dan konduksi panas pada silinder.

4. Kesalahan umum

- Lupa menggeser indeks sehingga pangkat x tidak sama sebelum menyamakan koefisien.
- Melewatkan suku awal ketika batas bawah jumlah berbeda (mis. $c_2 = 0$ pada persamaan Airy).
- Menganggap c_0 dan c_1 harus ditentukan: keduanya konstanta bebas sampai syarat awal diberikan.
- Memakai deret di luar jari-jari kekonvergenannya.

5. Ringkasan

- Pakai $y = \sum c_n x^n$; samakan koefisien x^n untuk memperoleh rekurensi.
- $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$; dua konstanta bebas = dua penyelesaian.

- Hasil dapat dikenali sebagai fungsi elementer (e^x, $\cos x$, $e^{-x^2/2}$) atau fungsi khusus (Airy, Hermite, Bessel).

Subbab ini menutup Bab 17.