Bab 17 · Persamaan Diferensial Orde Dua

17.3 Penerapan Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan menggambarkan banyak sistem osilasi: pegas dan peredam, bandul kecil, rangkaian listrik RLC. Matematikanya sama; hanya tafsir peubahnya berbeda.

1. Getaran pegas

Sebuah benda bermassa m digantung pada pegas. Misalkan $x(t)$ adalah simpangan dari posisi seimbang (arah ke bawah positif). Gaya yang bekerja:

- gaya pemulih pegas (hukum Hooke): $-kx$, dengan $k > 0$ konstanta pegas;
- gaya redaman (kekentalan): $-c\,x'$, dengan $c \geq 0$ koefisien redaman;
- gaya luar $F(t)$ (bila ada).

Hukum II Newton $mx'' = -kx - cx' + F(t)$ memberikan

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Getaran bebas tanpa redaman

$c = 0$, $F = 0$: $mx'' + kx = 0$, karakteristik $mr^2 + k = 0$, $r = \pm i\omega_0$ dengan $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = A\cos(\omega_0 t - \delta), \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Gerak harmonik sederhana dengan frekuensi sudut ω_0, periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, amplitudo A tetap.

CONTOH 1 — PEGAS TANPA REDAMAN

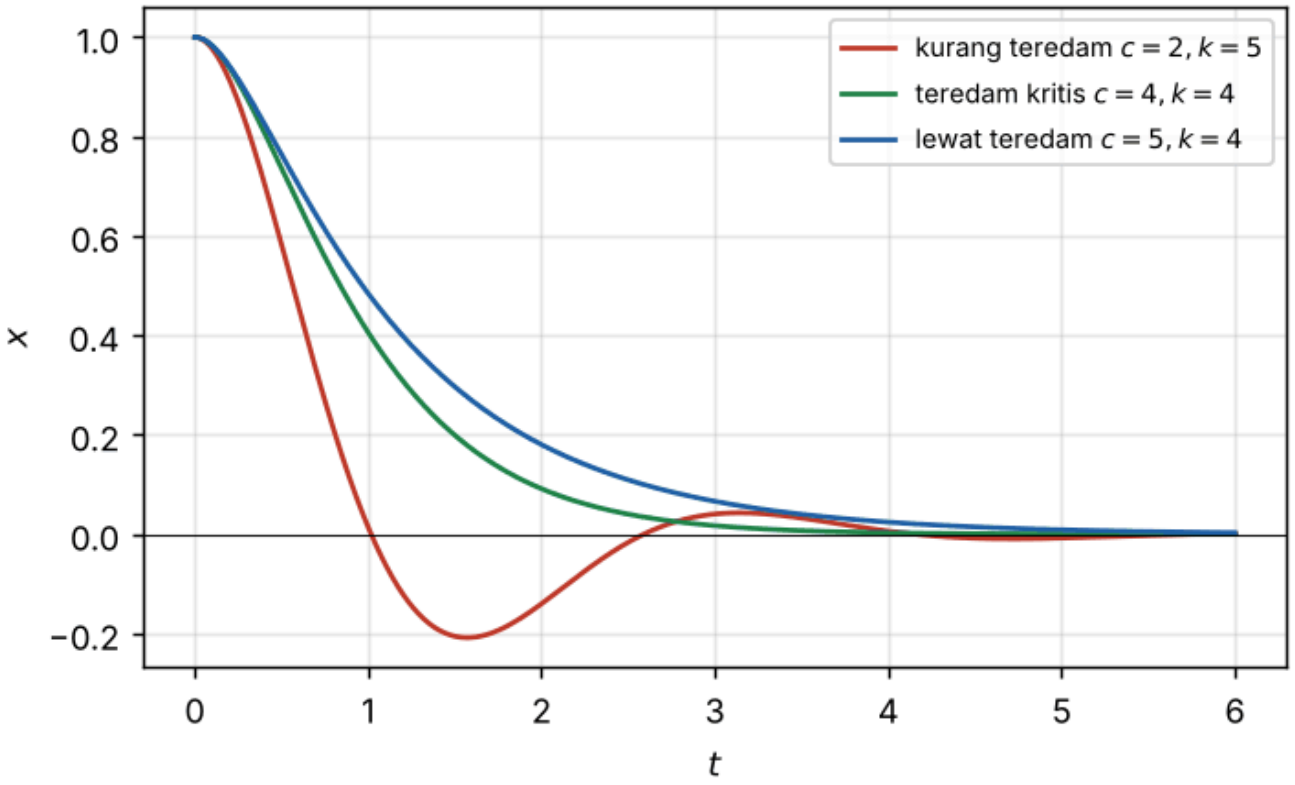
Benda 2 kg pada pegas dengan $k = 18$ N/m, ditarik 0,5 m ke bawah lalu dilepas. $\omega_0 = \sqrt{18/2} = 3$ rad/s, $T = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ s. $x(0) = 0{,}5$, $x'(0) = 0$: $x = 0{,}5\cos 3t$. Laju maksimum $A\omega_0 = 1{,}5$ m/s (terjadi di posisi seimbang).

Getaran bebas teredam

$mx'' + cx' + kx = 0$. Karakteristik $mr^2 + cr + k = 0$, diskriminan $c^2 - 4mk$:

TIGA JENIS REDAMAN

- **Lewat teredam** ($c^2 > 4mk$): dua akar real negatif r_1, r_2; $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$. Tidak berosilasi; kembali ke keseimbangan perlahan (pegas dalam oli kental).
- **Teredam kritis** ($c^2 = 4mk$): $x = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$, $r = -\frac{c}{2m}$. Kembali ke keseimbangan tercepat tanpa berosilasi (peredam pintu, suspensi ideal).
- **Kurang teredam** ($c^2 < 4mk$): $r = -\frac{c}{2m} \pm i\omega$, $\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$; $x = e^{-ct/2m}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$. Berosilasi dengan amplitudo meluruh eksponensial.



Simpangan untuk tiga jenis redaman ($m = 1$).

CONTOH 2 — KURANG TEREDAM

$x'' + 2x' + 5x = 0$ ($m = 1, c = 2, k = 5$): $c^2 - 4mk = 4 - 20 < 0$. $r = -1 \pm 2i$. $x(0) = 1, x'(0) = 0$: $c_1 = 1, x'(0) = -c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$. $x = e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$. Nilai pada $t = 1$: $\approx 0{,}0142$ (meluruh cepat). Frekuensi sudut teredam 2, lebih kecil dari frekuensi alami $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

CONTOH 3 — TEREDAM KRITIS DAN LEWAT TEREDAM

- $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -2$ ganda, $x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$, $c_1 = 1$, $c_2 - 2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$. $x = (1 + 2t)e^{-2t}$, selalu positif; tidak melewati keseimbangan.
- $x'' + 5x' + 4x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$: $r = -1, -4$; $c_1 + c_2 = 1$, $-c_1 - 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$. $x = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$.

2. Getaran paksa dan resonansi

Bila gaya luar periodik $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

Tanpa redaman

$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t$, penyelesaian $x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + x_p$. Untuk $\omega \neq \omega_0$: $x_p = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$. Bila $\omega = \omega_0$ terjadi **resonansi**: $x_p = \dfrac{F_0}{2m\omega_0}\, t \sin \omega_0 t$, amplitudo tumbuh linear tanpa batas.

CONTOH 4 — RESONANSI

$x'' + 9x = \cos 3t$ ($m = 1$, $\omega_0 = 3$, $F_0 = 1$). Tebakan $x_p = t(A \cos 3t + B \sin 3t)$; hasilnya $x_p = \frac{t}{6} \sin 3t$. Dengan $x(0) = x'(0) = 0$: $x = \frac{t}{6} \sin 3t$. Amplitudo $\frac{t}{6}$ tumbuh tanpa batas (pada $t = 30$ s sudah 5 m). Pada sistem nyata, redaman atau kegagalan struktural membatasinya (jembatan, gelas yang pecah oleh nada).

Dengan redaman

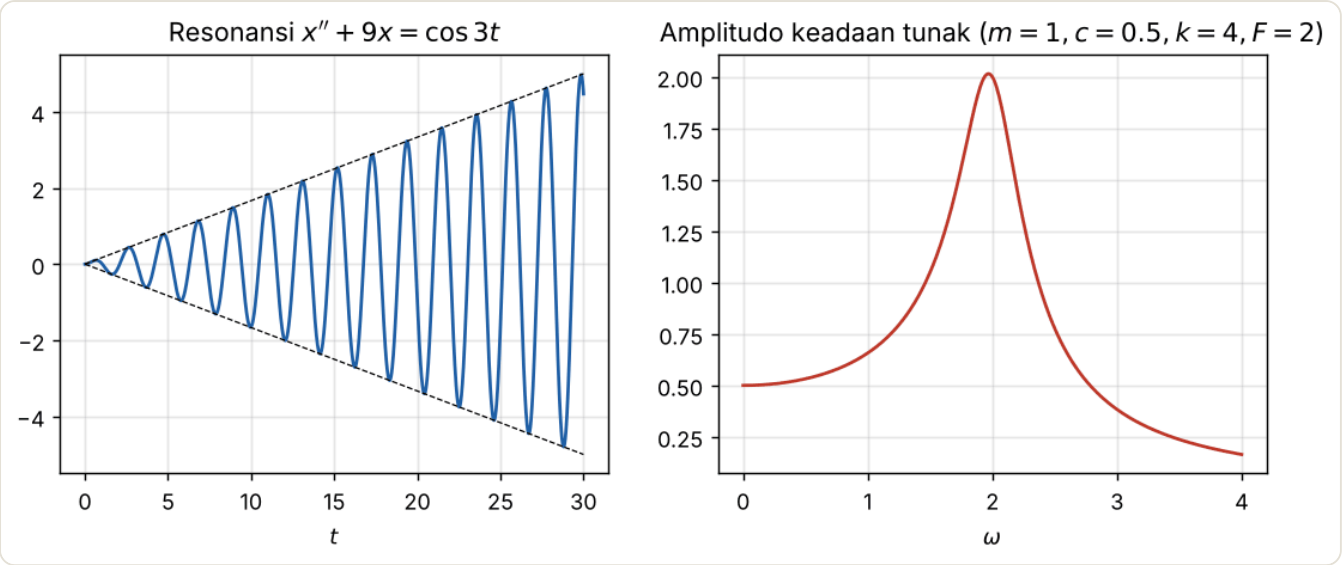
Untuk $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$, bagian komplementer meluruh (*transien*) dan yang bertahan adalah *keadaan tunak* $x_p = A \cos(\omega t - \alpha)$ dengan amplitudo

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}.$$

Amplitudo maksimum terjadi di $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}}$ (bila $c^2 < 2mk$): *resonansi praktis*. Makin kecil c, makin tinggi puncak.

CONTOH 5 — AMPLITUDO KEADAAN TUNAK

$m = 1, c = 0{,}5, k = 4, F_0 = 2$. $A(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + 0{,}25\omega^2}}$. $A(1) \approx 0{,}658$; $A(2) = \dfrac{2}{\sqrt{0+1}} = 2$; puncak di $\omega = \sqrt{4 - 0{,}125} \approx 1{,}969$ dengan $A \approx 2{,}016$. Puncak sedikit di bawah frekuensi alami $\omega_0 = 2$.



Kiri: resonansi tanpa redaman. Kanan: kurva amplitudo keadaan tunak.

3. Rangkaian listrik RLC

Rangkaian seri dengan induktor L (henry), resistor R (ohm), kapasitor C (farad), dan sumber tegangan $E(t)$ (volt). Muatan $Q(t)$ pada kapasitor, arus $I = Q'$. Hukum tegangan Kirchhoff: $LI' + RI + \frac{Q}{C} = E$, yaitu

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Ini sama dengan (1) dengan $m \leftrightarrow L$, $c \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$, $x \leftrightarrow Q$, $F \leftrightarrow E$: induktor ↔ massa, resistor ↔ redaman, kapasitor ↔ pegas.

CONTOH 6 — PENGISIAN KAPASITOR

$L = 1$ H, $R = 6\ \Omega$, $C = \frac{1}{13}$ F, $E = 12$ V (konstan), $Q(0) = 0$, $I(0) = 0$. $Q'' + 6Q' + 13Q = 12$. Karakteristik $r = -3 \pm 2i$. $Q_p = \frac{12}{13}$. $Q = \frac{12}{13} + e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$. $Q(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{12}{13}$. $Q'(0) = -3c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{18}{13}$. $Q(t) = \frac{12}{13} - \frac{e^{-3t}}{13}(12\cos 2t + 18 \sin 2t)$. Muatan mendekati $\frac{12}{13} \approx 0{,}923$ C ($= CE$) setelah osilasi teredam; $Q(1) \approx 0{,}880$ C. Arus $I = Q' \to 0$.

CONTOH 7 — FREKUENSI RESONANSI RANGKAIAN

Rangkaian dengan $L = 0{,}5$ H dan $C = 2\ \mu$F beresonansi pada $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} = 1000$ rad/s, yaitu $f = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 159$ Hz. Prinsip ini dipakai untuk menala radio.

4. Bandul sederhana

CONTOH 8 — HAMPIRAN SUDUT KECIL

Bandul panjang L dengan sudut simpangan θ: $\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$. Untuk sudut kecil $\sin\theta \approx \theta$: $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, periode $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Untuk $L = 1$ m: $T = 2\pi/\sqrt{9{,}8} \approx 2{,}007$ s. Galat hampiran kecil bila amplitudo di bawah sekitar 15°.

5. Kesalahan umum

- Menganggap redaman selalu menyebabkan osilasi: hanya bila $c^2 < 4mk$.
- Menyamakan frekuensi teredam dengan frekuensi alami.
- Menerapkan syarat awal pada x_p saja, bukan pada penyelesaian lengkap.
- Satuan yang tidak konsisten (mis. C dalam μF tanpa mengubah ke F).

6. Ringkasan

- $mx'' + cx' + kx = F(t)$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- Redaman: lewat, kritis, kurang; hanya kurang yang berosilasi.
- Resonansi saat $\omega = \omega_0$ (tanpa redaman: amplitudo tak terbatas).
- RLC: $LQ'' + RQ' + Q/C = E$, analog sistem pegas.

Subbab terakhir, 17.4, memberi metode deret pangkat.