Bab 17 · Persamaan Diferensial Orde Dua

17.2 Persamaan Linear Takhomogen

Sekarang kita menyelesaikan persamaan yang ruas kanannya tidak nol:

$$ay'' + by' + cy = G(x). \tag{1}$$

Ruas kanan G mewakili gaya luar atau masukan. Ada dua metode utama: **koefisien tak tentu** dan **variasi parameter**.

1. Struktur penyelesaian

TEOREMA

Penyelesaian umum (1) adalah

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x),$$

dengan y_p satu penyelesaian khusus (partikular) (1) dan y_c penyelesaian umum persamaan homogen terkait $ay'' + by' + cy = 0$ (disebut *penyelesaian komplementer*, 17.1).

Bukti. Misalkan y penyelesaian apa saja dan y_p satu penyelesaian khusus. Maka $a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) = G - G = 0$, sehingga $y - y_p$ memenuhi persamaan homogen, yaitu $y - y_p = y_c$ untuk suatu pilihan c_1, c_2. ■

2. Koefisien tak tentu

Bila G berupa polinomial, eksponensial, sinus/cosinus, atau hasil kali/jumlah keduanya, kita menebak bentuk y_p dengan koefisien yang dicari.

TEBAKAN Y_P

$G(X)$	**TEBAKAN** Y_P
$P_N(X)$ **(POLINOMIAL DERAJAT** N**)**	$A_N X^N + \cdots + A_1 X + A_0$
E^{SX}	AE^{SX}
$\mathrm{COS}\,\Omega X$ **ATAU** $\mathrm{SIN}\,\Omega X$	$A\,\mathrm{COS}\,\Omega X + B\,\mathrm{SIN}\,\Omega X$
$P_N(X)E^{SX}$	$Q_N(X)E^{SX}$ **(POLINOMIAL UMUM DERAJAT** N**)**
$E^{SX}\,\mathrm{COS}\,\Omega X$ **ATAU** $E^{SX}\,\mathrm{SIN}\,\Omega X$	$E^{SX}(A\,\mathrm{COS}\,\Omega X + B\,\mathrm{SIN}\,\Omega X)$

Aturan modifikasi: bila ada suku tebakan yang juga merupakan penyelesaian homogen (muncul dalam y_c), kalikan seluruh tebakan dengan x (atau x^2 bila akar ganda) sampai tidak ada suku yang sama dengan suku y_c.

CONTOH 1 — POLINOMIAL

$y'' + 3y' + 2y = x^2$. Homogen: $r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$. Tebakan $y_p = Ax^2 + Bx + C$: $2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$. Samakan koefisien: x^2: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; x: $6A + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$; konstanta: $2A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$. $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Dengan $y(0) = 1, y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = -\frac{3}{4}$, $-c_1 - 2c_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0$. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} - \frac{3}{4}e^{-2x}$.

CONTOH 2 — EKSPONENSIAL

$y'' + 4y = e^{3x}$. $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Tebakan $y_p = Ae^{3x}$: $9A + 4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{13}$. $y = \frac{1}{13}e^{3x} + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

CONTOH 3 — SINUS

$y'' - 3y' + 2y = \sin x$. $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Tebakan $y_p = A\cos x + B\sin x$ (kedua suku walau ruas kanan hanya sinus, karena y' membawa cosinus). $y_p' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$. Substitusi: $\cos x$: $-A - 3B + 2A = A - 3B = 0$; $\sin x$: $-B + 3A + 2B = 3A + B = 1$. Jadi $A = 3B$, $10B = 1$: $y_p = \dfrac{3\cos x + \sin x}{10}$.

CONTOH 4 — RESONANSI (ATURAN MODIFIKASI)

$y'' + y = \cos x$. $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Tebakan $A\cos x + B \sin x$ sama dengan y_c dan menghasilkan 0. Kalikan dengan x: $y_p = x(A\cos x + B \sin x)$. $y_p'' = 2(-A \sin x + B\cos x) + x(-A\cos x - B \sin x)$, jadi $y_p'' + y_p = -2A \sin x + 2B \cos x = \cos x \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{2}$. $y_p = \frac{1}{2} x \sin x$. Amplitudo tumbuh tanpa batas: gejala *resonansi* (17.3).

CONTOH 5 — AKAR GANDA DAN EKSPONENSIAL YANG SAMA

$y'' - 2y' + y = e^x$. $y_c = (c_1 + c_2 x)e^x$. e^x dan xe^x sudah ada di y_c, jadi tebakan $y_p = Ax^2 e^x$. $y_p' = (2Ax + Ax^2)e^x$, $y_p'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$. $y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ae^x = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. $y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x$.

CONTOH 6 — JUMLAH BEBERAPA SUKU

$y'' + y' - 2y = x + e^{-x}$. Pakai superposisi: selesaikan terpisah untuk $G_1 = x$ dan $G_2 = e^{-x}$, lalu jumlahkan. Homogen: $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$, akar $-2, 1$, jadi tidak ada tabrakan. Untuk $G_1 = x$: $y_{p1} = Ax + B$, $y_{p1}' = A$, sehingga $A - 2(Ax + B) = x$: $-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$, dan $A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$. Untuk $G_2 = e^{-x}$: $y_{p2} = Ce^{-x}$, $(1 - 1 - 2)Ce^{-x} = e^{-x} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$. Jadi $y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-x}$ dan $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + y_p$.

3. Variasi parameter

Metode ini berlaku untuk sembarang G (dan bahkan koefisien tidak konstan), asalkan penyelesaian homogen diketahui.

VARIASI PARAMETER

Untuk $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ (koefisien utama 1), misalkan y_1, y_2 dua penyelesaian homogen yang bebas linear dengan Wronskian $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Maka

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2\, g}{W}\, dx + y_2 \int \frac{y_1\, g}{W}\, dx.$$

Gagasan. Cari $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ ("mengubah" konstanta menjadi fungsi). Pilih syarat $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ agar $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$. Substitusi ke persamaan memberi $u_1' y_1' + u_2' y_2' = g$. Dua persamaan linear untuk u_1', u_2' dengan determinan W menghasilkan $u_1' = -\frac{y_2 g}{W}$, $u_2' = \frac{y_1 g}{W}$ (aturan Cramer).

CONTOH 7 — $Y'' + Y = \mathrm{TAN}\, X$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $W = 1$. $u_1' = -\sin x \tan x = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x$, $u_1 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$. $u_2' = \cos x \tan x = \sin x$, $u_2 = -\cos x$. $y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x = \sin x \cos x - \cos x \ln|\sec x + \tan x| - \sin x \cos x = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$. Penyelesaian umum: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$. (Koefisien tak tentu tidak dapat dipakai untuk $\tan x$.)

CONTOH 8 — AKAR GANDA DENGAN $G = E^{-2X}/X$

$y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$, $x > 0$. $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, $W = e^{-4x}$. $u_1' = -\dfrac{xe^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = -1 \Rightarrow u_1 = -x$. $u_2' = \dfrac{e^{-2x} \cdot e^{-2x}/x}{e^{-4x}} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow u_2 = \ln x$. $y_p = -xe^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$. Suku $-xe^{-2x}$ dapat digabung ke $c_2 xe^{-2x}$, jadi $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + xe^{-2x} \ln x$.

CONTOH 9 — MEMERIKSA PENYELESAIAN

Periksa $y_p = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$ pada Contoh 7: $y_p' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x \cdot \sec x = \sin x \ln(\cdot) - 1$, $y_p'' = \cos x \ln(\cdot) + \sin x \sec x = \cos x \ln(\cdot) + \tan x$. $y_p'' + y_p = \tan x$. Cocok.

4. Memilih metode

Situasi	Metode
Koefisien konstan, G polinomial/eksponensial/trigonometri	Koefisien tak tentu (lebih cepat)
G sembarang ($\tan x$, $1/x$, $\ln x$, $\sec x$)	Variasi parameter
Koefisien tidak konstan, y_1, y_2 diketahui	Variasi parameter

5. Kesalahan umum

- Lupa bahwa syarat awal diterapkan pada $y = y_p + y_c$, bukan pada y_c saja.
- Tebakan $\cos$ hanya untuk ruas kanan $\cos$: selalu sertakan $\sin$ juga.
- Tidak memodifikasi tebakan yang bertabrakan dengan y_c.

- Memakai variasi parameter tanpa membagi persamaan sehingga koefisien y'' sama dengan 1.

6. Ringkasan

- $y = y_p + y_c$.
- Koefisien tak tentu: tebak bentuk y_p, modifikasi bila bertabrakan dengan y_c.
- Variasi parameter: $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 g}{W} + y_2 \int \frac{y_1 g}{W}$.

Berikutnya 17.3 Penerapan.