Bab 17 · Persamaan Diferensial Orde Dua

17.1 Persamaan Linear Orde Dua

Persamaan diferensial orde dua muncul di mana-mana: getaran pegas, rangkaian listrik, bandul, gelombang. Pada subbab ini kita membahas jenis yang paling penting dan dapat diselesaikan secara tuntas, yaitu persamaan **linear homogen dengan koefisien konstan**.

1. Persamaan linear orde dua

DEFINISI

Persamaan diferensial linear orde dua berbentuk

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = G(x),$$

dengan P, Q, R, G fungsi kontinu. Bila $G(x) \equiv 0$, persamaan disebut **homogen**; bila tidak, **takhomogen** (17.2). Bila P, Q, R konstanta, persamaannya *berkoefisien konstan*.

Pada subbab ini kita mempelajari

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a, b, c \text{ konstanta},\ a \neq 0. \tag{1}$$

PRINSIP SUPERPOSISI

Jika y_1 dan y_2 adalah penyelesaian persamaan linear homogen, maka $c_1 y_1 + c_2 y_2$ juga penyelesaian untuk sembarang konstanta c_1, c_2.

Bukti. $a(c_1y_1 + c_2y_2)'' + b(c_1y_1 + c_2y_2)' + c(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0.$ ■

TEOREMA

Jika y_1, y_2 penyelesaian (1) yang **bebas linear** (tidak ada yang merupakan kelipatan konstan yang lain), maka penyelesaian umum (1) adalah

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Kebebasan linear dapat diuji dengan *Wronskian* $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$.

MASALAH NILAI AWAL DAN BATAS

Masalah nilai awal: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$. Teorema eksistensi dan ketunggalan menjamin tepat satu penyelesaian. *Masalah nilai batas*: $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$; penyelesaiannya bisa tunggal, tak ada, atau tak hingga banyak.

2. Persamaan karakteristik

Coba penyelesaian $y = e^{rx}$. Maka $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, dan (1) menjadi $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Karena $e^{rx} \neq 0$:

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{persamaan karakteristik}), \qquad r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

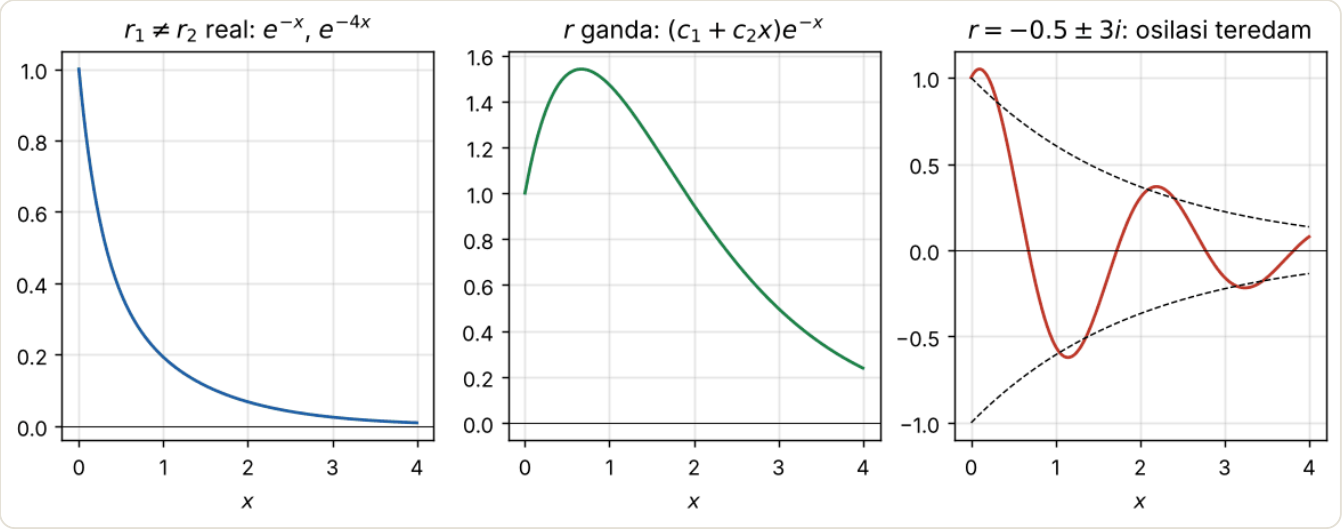
Tiga kasus bergantung pada diskriminan $D = b^2 - 4ac$.

PENYELESAIAN UMUM

AKAR KARAKTERISTIK	PENYELESAIAN UMUM
$D > 0$: **DUA AKAR REAL BERBEDA** R_1, R_2	$Y = C_1E^{R_1X} + C_2E^{R_2X}$
$D = 0$: **AKAR GANDA** R	$Y = (C_1 + C_2X)E^{RX}$
$D < 0$: **AKAR KOMPLEKS** $A \pm IB$	$Y = E^{AX}(C_1 \cos BX + C_2 \sin BX)$

Mengapa xe^{rx} pada kasus ganda? Akar ganda berarti $r = -\frac{b}{2a}$ dan $ar^2 + br + c = a(r - r_0)^2$. Uji $y = xe^{r_0x}$: $y' = (1 + r_0x)e^{r_0x}$, $y'' = (2r_0 + r_0^2x)e^{r_0x}$; $ay'' + by' + cy = e^{r_0x}\left[a(2r_0 + r_0^2x) + b(1 + r_0x) + cx\right] = e^{r_0x}\left[(2ar_0 + b) + x(ar_0^2 + br_0 + c)\right] = 0$, karena $2ar_0 + b = 0$ dan r_0 akar.

Mengapa sinus dan cosinus pada kasus kompleks? Rumus Euler $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$ (11.10). Akar $\alpha \pm i\beta$ memberi $e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$; bagian real dan imajiner masing-masing adalah penyelesaian real yang bebas linear (kombinasi linear penyelesaian kompleks).



Tiga bentuk penyelesaian: akar real berbeda, akar ganda, dan akar kompleks.

3. Contoh

CONTOH 1 — DUA AKAR REAL

$y'' - y' - 6y = 0$: $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$, $r = 3, -2$. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$: $c_1 + c_2 = 1$ dan $3c_1 - 2c_2 = 0$, jadi $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{3}{5}$: $y = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$; misalnya $y(1) \approx 8{,}115$.

CONTOH 2 — AKAR GANDA

$y'' + 6y' + 9y = 0$: $(r+3)^2 = 0$, $r = -3$. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$. Dengan $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$: $c_1 = 2$; $y' = (c_2 - 3c_1 - 3c_2x)e^{-3x}$, $y'(0) = c_2 - 6 = -1 \Rightarrow c_2 = 5$. $y = (2 + 5x)e^{-3x}$, $y(1) = 7e^{-3} \approx 0{,}3485$.

CONTOH 3 — AKAR KOMPLEKS

$y'' - 2y' + 5y = 0$: $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i$. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$. Dengan $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$: $c_1 = 1$; $y'(0) = \alpha c_1 + \beta c_2 = c_1 + 2c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 1$. $y = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$, $y(1) = e(\cos 2 + \sin 2) \approx 1{,}3405$.

CONTOH 4 — AKAR IMAJINER MURNI

$y'' + 4y = 0$: $r = \pm 2i$, $\alpha = 0$. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$: gelombang tanpa peredam. Dapat juga ditulis $y = A\cos(2x - \delta)$ dengan amplitudo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

CONTOH 5 — PERSAMAAN DENGAN KOEFISIEN UTAMA

$4y'' - 12y' + 9y = 0$: $4r^2 - 12r + 9 = (2r-3)^2 = 0$, $r = \frac{3}{2}$ ganda. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x/2}$. Persamaan $y'' - y = 0$: $r = \pm 1$, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, yang juga dapat ditulis $y = A\cosh x + B\sinh x$.

CONTOH 6 — MENYUSUN PERSAMAAN DARI AKAR

Persamaan dengan penyelesaian e^{2x} dan e^{-5x}: akar $2, -5$, karakteristik $(r-2)(r+5) = r^2 + 3r - 10$, jadi $y'' + 3y' - 10y = 0$.

CONTOH 7 — WRONSKIAN

Untuk $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$: $W = e^{3x}(-2e^{-2x}) - 3e^{3x}e^{-2x} = -5e^x \neq 0$: bebas linear. Untuk $y_1 = \cos 2x$ dan $y_2 = \sin 2x$: $W = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$.

4. Masalah nilai batas

CONTOH 8 — SATU PENYELESAIAN

$y'' + 2y = 0, y(0) = 1, y(\pi) = 2$. $y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$. $y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$.

$$y(\pi) = \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \sin\sqrt{2}\pi = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2 - \cos\sqrt{2}\pi}{\sin\sqrt{2}\pi} \approx \frac{2 + 0{,}266}{-0{,}964} \approx -2{,}351.$$

Penyelesaian tunggal.

CONTOH 9 — TAK ADA ATAU TAK HINGGA BANYAK

$y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 1$: $y = c_1\cos x + c_2 \sin x$, $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $y(\pi) = c_2 \sin\pi = 0 \neq 1$. **Tidak ada penyelesaian.** Bila $y(\pi) = 0$, maka $y = c_2 \sin x$ untuk sembarang c_2: **tak hingga banyak**. Berbeda dengan masalah nilai awal, masalah nilai batas tidak otomatis mempunyai penyelesaian tunggal.

CONTOH 10 — NILAI EIGEN

$y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(L) = 0$. Untuk $\lambda = \mu^2 > 0$: $y = c\sin\mu x$ dan $y(L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi$. Nilai $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $y_n = \sin\frac{n\pi x}{L}$: inilah mode getar senar bertepi tetap. Untuk $\lambda \leq 0$ hanya $y \equiv 0$.

5. Kesalahan umum

- Mencampur tanda pada persamaan karakteristik (mis. $y'' - y' - 6y \to r^2 - r - 6$, bukan $r^2 + r - 6$).
- Pada akar kompleks, lupa faktor $e^{\alpha x}$ atau memakai β yang salah (β adalah bagian imajiner, bukan β^2).
- Pada akar ganda, menulis $c_1 e^{rx} + c_2 e^{rx}$ (tidak bebas linear): perlu faktor x.
- Menganggap masalah nilai batas selalu mempunyai penyelesaian tunggal.

6. Ringkasan

- $ay'' + by' + cy = 0$: selesaikan $ar^2 + br + c = 0$.
- Real berbeda: $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$; ganda: $(c_1 + c_2 x)e^{rx}$; kompleks: $e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.
- Dua syarat awal menentukan c_1, c_2 secara tunggal.

Berikutnya 17.2 Persamaan Linear Takhomogen.