Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.9 Teorema Divergensi

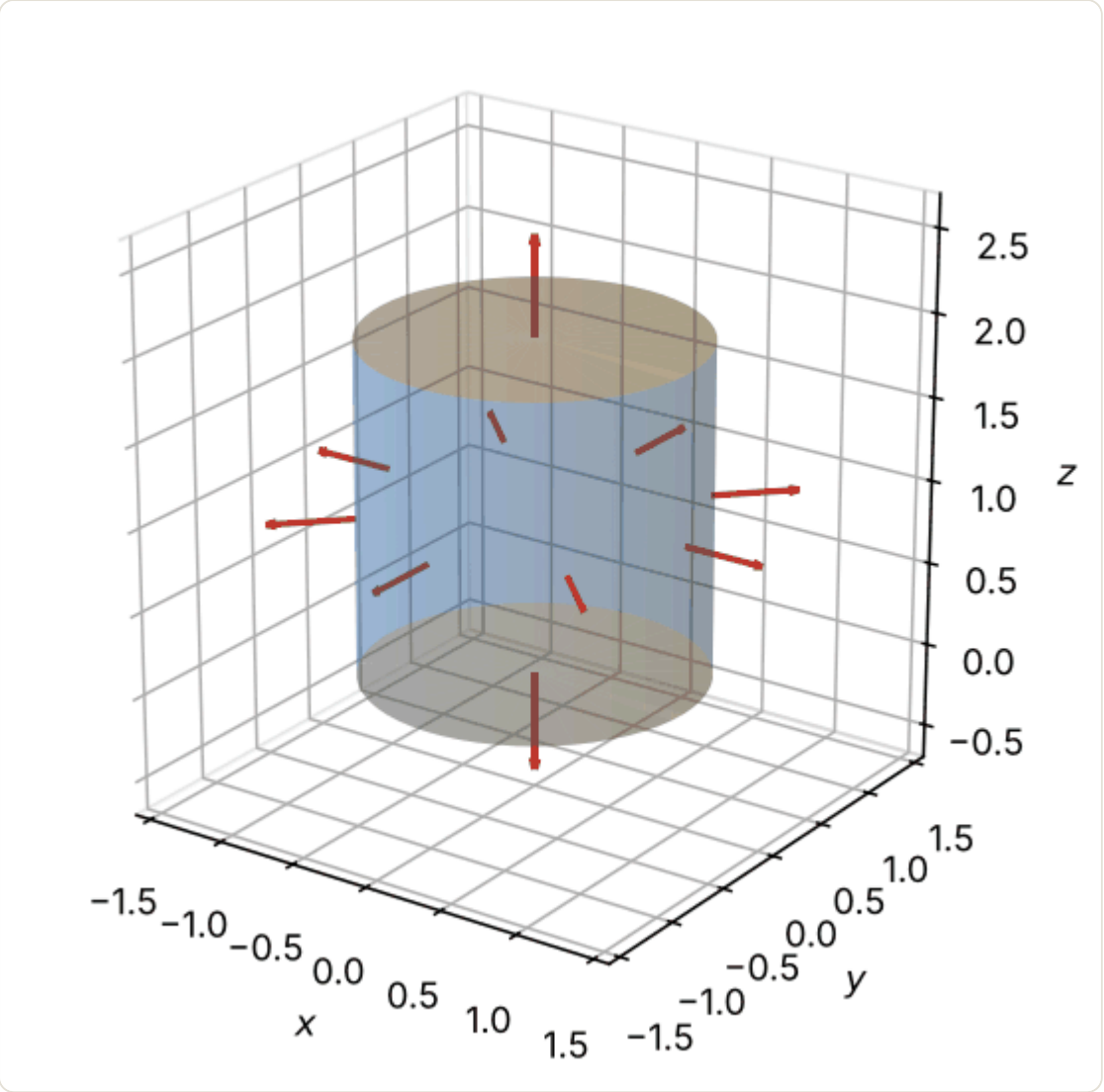
Teorema Dasar Kalkulus: integral turunan pada selang $=$ nilai pada batas. Teorema Green dan Stokes: integral "turunan" (curl) pada permukaan $=$ integral garis pada batas. **Teorema Divergensi** adalah versi tiga dimensi bentuk fluks teorema Green: integral divergensi pada *padatan* $=$ fluks melalui *permukaan* pembatasnya.

1. Pernyataan

TEOREMA DIVERGENSI (GAUSS)

Misalkan E padatan sederhana (daerah tertutup terbatas) yang dibatasi permukaan tertutup S dengan orientasi positif (normal keluar). Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka yang memuat E, maka

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$



Silinder tertutup: permukaan S terdiri dari sisi, tutup atas, dan tutup bawah, dengan normal keluar (merah).

Gagasan bukti. Tulis $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$; cukup membuktikan $\iint_S R\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$ (dua lainnya serupa). Bila $E = \{(x,y)\in D,\ u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}$: $\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \big[R(x,y,u_2) - R(x,y,u_1)\big]\,dA$ (teorema dasar). Sisi vertikal S tidak menyumbang ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}=0$). Permukaan atas $z=u_2$ (normal ke atas) menyumbang $\iint_D R(x,y,u_2)\,dA$, permukaan bawah (normal ke bawah) $-\iint_D R(x,y,u_1)\,dA$. Jumlahnya sama. Padatan umum dipotong menjadi padatan sederhana; fluks pada permukaan pemisah saling menghapus. ■

2. Contoh

CONTOH 1 — BOLA

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3\rangle$, S bola satuan. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2) = 3\rho^2$. $\iiint 3\rho^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 3\rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{12\pi}{5} \approx 7{,}540$. Menghitung fluks langsung pada bola akan jauh lebih rumit.

CONTOH 2 — SILINDER, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle x, y, z^2 \rangle$, E: $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 2$. $\operatorname{div} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$. $\iiint = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^2 (2 + 2z)\, r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 + 4) = 8\pi$.
Langsung: tutup atas $z = 2$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = z^2 = 4$, luas π: 4π. Tutup bawah $z = 0$, $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$: $-z^2 = 0$. Sisi $\mathbf{n} = \langle x, y, 0 \rangle$: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y^2 = 1$, luas sisi $2\pi \cdot 2 = 4\pi$: 4π. Total 8π. Cocok.

CONTOH 3 — KUBUS

$\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$, $E = [0, 1]^3$. $\operatorname{div} = y + z + x$. $\iiint (x + y + z)\, dV = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
Fluks keluar dari kubus $= \frac{3}{2}$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN TERBUKA DENGAN MENUTUPNYA

Fluks $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$ melalui paraboloid $S_1 :\ z = 1 - x^2 - y^2, z \ge 0$, ke atas (16.7 Contoh 6 memberi $\frac{3\pi}{2}$ dengan hitung langsung). Tutup dengan cakram S_2: $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$, normal $-\mathbf{k}$. $\iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \iiint_E 3\, dV = 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ (volume bawah paraboloid $2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r\, dr = \frac{\pi}{2}$). Pada S_2: $\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) = -z = 0$. Jadi $\iint_{S_1} = \frac{3\pi}{2}$, sama dengan hasil langsung.

3. Menghitung volume dengan fluks

Pilih $\mathbf{F}$ dengan $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$, mis. $\mathbf{F} = \frac{1}{3}\langle x, y, z \rangle$ atau $\langle x, 0, 0 \rangle$:

$$V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S x\, dy\, dz.$$

CONTOH 5 — VOLUME BOLA

Pada bola jari-jari a: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = a$. $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

4. Hukum Gauss dan medan kuadrat terbalik

CONTOH 6 — FLUKS SEMBARANG PERMUKAAN PENGURUNG TITIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ mempunyai $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ untuk $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ (16.5). Misalkan S permukaan tertutup apa pun yang mengurung titik asal. Ambil bola kecil S_a berjari-jari a di dalam S; padatan E di antara S dan S_a tidak memuat asal. Teorema divergensi (normal keluar dari E, yaitu ke dalam pada S_a): $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 0\,dV = 0$. Pada S_a, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{a^2}$, fluks $= \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$. Jadi $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ untuk *setiap* permukaan yang mengurung asal.

CONTOH 7 — HUKUM GAUSS UNTUK LISTRIK

Dari Contoh 6, medan muatan titik Q, $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, memberi fluks $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ melalui permukaan tertutup apa pun yang mengurungnya. Untuk distribusi muatan dengan kerapatan ρ: $\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$. Dengan teorema divergensi, $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_E \rho\,dV$ untuk semua E, jadi $\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (persamaan Maxwell).

5. Tafsir divergensi dan aliran fluida

Ambil bola kecil B_a berpusat di P, dengan permukaan S_a. Karena $\operatorname{div}\mathbf{F}$ hampir konstan di dalamnya,

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(P)\cdot V(B_a) \;\Rightarrow\; \operatorname{div}\mathbf{F}(P) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}.$$

Jadi divergensi adalah **fluks keluar per satuan volume**: $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$ di sumber, < 0 di penyerap.

CONTOH 8 — PERSAMAAN KONTINUITAS

Fluida dengan kerapatan $\rho(x,y,z,t)$ dan kecepatan $\mathbf{v}$. Massa dalam E: $\iiint_E \rho\,dV$. Laju perubahannya sama dengan negatif fluks keluar: $\frac{d}{dt}\iiint_E \rho\,dV = -\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_E \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\,dV$. Untuk semua E: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$. Fluida tak mampat ($\rho$ konstan) memberi $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

CONTOH 9 — PANAS

Aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju panas keluar dari E adalah $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}(-K\nabla u)\,dV = -K\iiint_E \nabla^2 u\,dV$. Dengan kapasitas panas $c\rho$: $c\rho\,u_t = K\nabla^2 u$ (persamaan panas, 14.3).

6. Hubungan keempat teorema

Teorema	Ruas satu	Ruas lain
Dasar Kalkulus	$\int_a^b F'(x)\,dx$	$F(b) - F(a)$
Dasar integral garis	$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$	$f(B) - f(A)$
Green	$\iint_D (Q_x - P_y)\,dA$	$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$
Stokes	$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$	$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
Divergensi	$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$	$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Pola yang sama: integral "turunan" atas suatu daerah sama dengan integral fungsi aslinya pada *batas* daerah itu.

7. Kesalahan umum

- Memakai teorema pada permukaan yang tidak tertutup tanpa menambah tutupnya.
- Normal ke dalam alih-alih ke luar sehingga tanda terbalik.
- Menerapkan teorema bila $\mathbf{F}$ punya singularitas di dalam E (seperti medan kuadrat terbalik pada permukaan yang mengurung asal): perlu langkah seperti Contoh 6.
- Lupa menjumlahkan fluks semua bagian permukaan saat menghitung langsung.

8. Ringkasan

- $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$, S tertutup, normal keluar.
- Divergensi $=$ fluks keluar per satuan volume; $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ berarti tak mampat.
- Hukum Gauss: fluks medan kuadrat terbalik melalui permukaan pengurung $= 4\pi$ (atau Q/ε_0).

Bab 16 berakhir di sini, dan dengan itu semua bab buku ini tersedia.