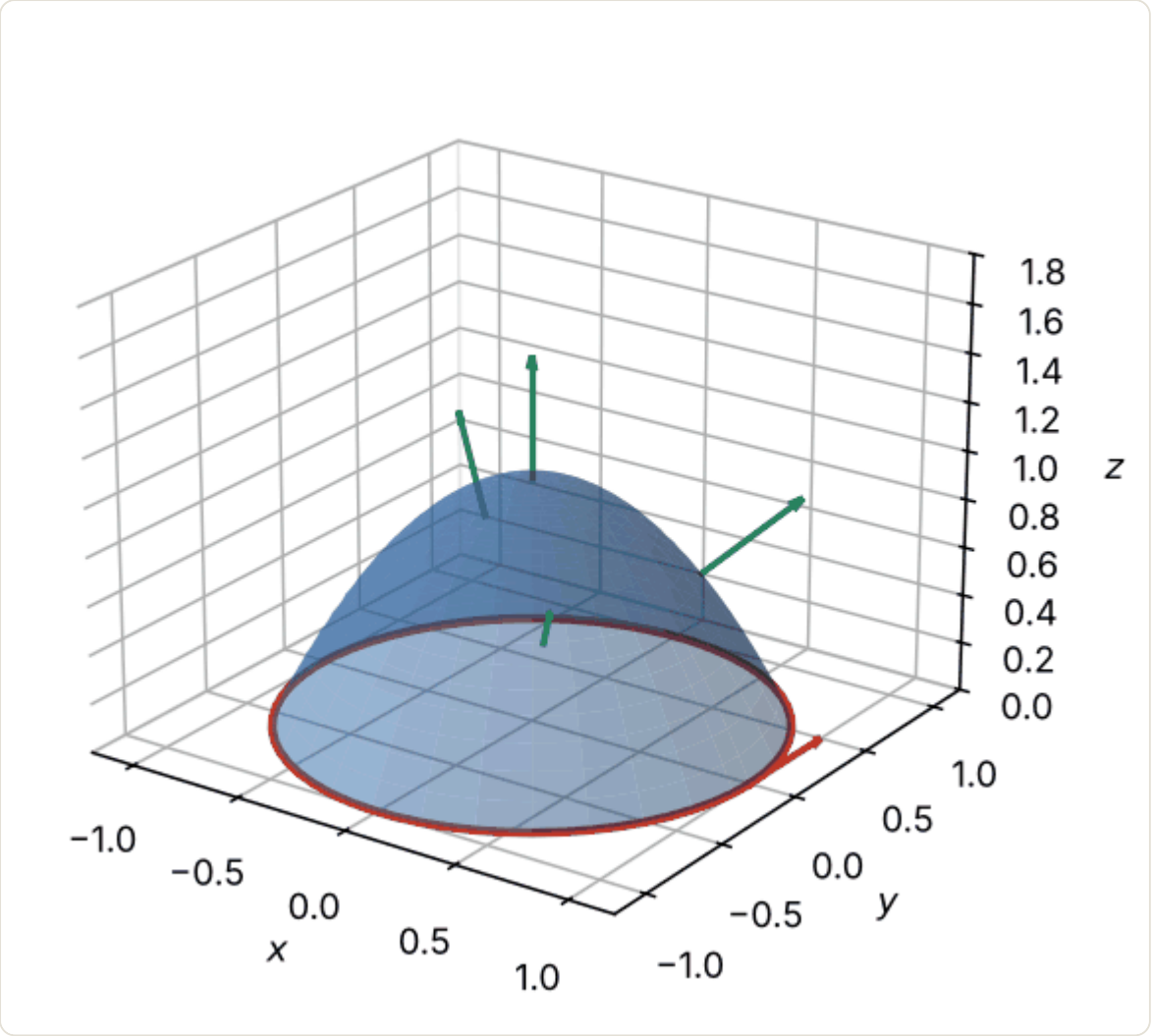
Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.8 Teorema Stokes

Teorema Green mengubah integral garis pada kurva tertutup di bidang menjadi integral ganda pada daerah di dalamnya. **Teorema Stokes** melakukan hal yang sama di ruang: sirkulasi medan vektor sepanjang kurva tertutup sama dengan fluks *curl* medan itu melalui permukaan yang dibatasi kurva.

1. Pernyataan

Misalkan S permukaan berorientasi mulus sebagian-sebagian, dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C. Orientasi C harus **sesuai** dengan orientasi S: bila berjalan sepanjang C dengan kepala searah normal $\mathbf{n}$, permukaan berada di sebelah kiri (aturan tangan kanan: jari melengkung searah C, ibu jari searah $\mathbf{n}$).



Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ dengan normal ke atas (hijau) dan batas lingkaran C berlawanan arah jarum jam (merah).

TEOREMA STOKES

Jika $\mathbf{F}$ mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada daerah terbuka di $\mathbb{R}^3$ yang memuat S, maka

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Bila S rata di bidang xy dengan $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$ dan Stokes menjadi teorema Green. Jadi Green adalah kasus khusus Stokes.

Gagasan bukti (grafik $z = g(x, y)$). Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ pada grafik ke atas, ruas kanan menjadi $\iint_D \big[-(R_y - Q_z)g_x - (P_z - R_x)g_y + (Q_x - P_y)\big]\, dA$. Ruas kiri: substitusi $z = g(x, y)$, $dz = g_x dx + g_y dy$, integral garis berubah menjadi integral garis pada ∂D di bidang xy dengan komponen $\big(P + Rg_x\big)$ dan $\big(Q + Rg_y\big)$; teorema Green dan aturan rantai pada $R(x, y, g(x, y))$ menyamakan keduanya. Permukaan umum dipecah menjadi potongan grafik; integral garis pada batas dalam saling menghapus.

2. Contoh

CONTOH 1 — PARABOLOID, DUA CARA

$\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$, S: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, normal ke atas; C: lingkaran satuan di bidang xy, berlawanan arah jarum jam.
Garis: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 0 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle$, $\mathbf{F} = \langle \sin t, 0, \cos t \rangle$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -\sin^2 t$. $\oint = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = -\pi$.
Permukaan: $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle$. Untuk grafik: $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \langle -g_x, -g_y, 1 \rangle = \langle -1, -1, -1 \rangle \cdot \langle 2x, 2y, 1 \rangle = -2x - 2y - 1$. $\iint_D (-2x - 2y - 1)\, dA = -\pi$ (suku ganjil lenyap). Kedua cara memberi $-\pi$.

CONTOH 2 — MENGGANTI PERMUKAAN

Untuk soal yang sama, ganti S dengan cakram datar $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = -1$, $\iint = -1 \cdot \pi = -\pi$. Hasilnya sama, karena batas C sama. *Inilah kegunaan Stokes:* pilih permukaan terdekat yang paling mudah.

CONTOH 3 — ELIPS HASIL IRISAN SILINDER DAN BIDANG

$\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$, C: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$ (13.1 Contoh 5), dilihat dari atas berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Pilih S potongan bidang $z = 2 - y$ di dalam silinder: $g_x = 0$, $g_y = -1$, normal ke atas $\langle 0, 1, 1 \rangle$. $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = 2$. $\iint_D 2 \, dA = 2\pi$. Cek langsung: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, 2 - \sin t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, -\cos t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle 2 - \sin t, \cos t, \sin t \rangle$; $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = -2\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \cos t$. $\int_0^{2\pi} = 0 + \pi + \pi - 0 = 2\pi$.

CONTOH 4 — BELAHAN BOLA

$\mathbf{F} = \langle -y, x, z^2 \rangle$, S: belahan atas bola jari-jari a, normal keluar; C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, berlawanan arah jarum jam. $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \langle 0, 0, 2 \rangle$. $\iint_S 2 \, n_z \, dS = 2 \times$(luas proyeksi pada bidang xy)$= 2\pi a^2$ (karena $n_z \, dS = dA$ proyeksi). Langsung: pada C, $z = 0$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -y \, dx + x \, dy$, $\oint = 2 \cdot$ luas cakram $= 2\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PERMUKAAN TERTUTUP

Jika S permukaan *tertutup* (tanpa batas), maka $C = \emptyset$ dan $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Misalnya fluks curl apa pun melalui seluruh bola $= 0$. Ini konsisten dengan $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0$ dan teorema divergensi (16.9): $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} \, dV = 0$.

3. Penafsiran curl

Ambil titik P dan cakram kecil S_a berjari-jari a yang tegak lurus arah $\mathbf{n}$, berpusat di P, dengan batas C_a. Karena $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ hampir konstan pada S_a, Stokes memberi

$$\oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \approx \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} \; \pi a^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{curl} \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \oint_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Jadi komponen curl pada arah $\mathbf{n}$ adalah **sirkulasi per satuan luas** pada bidang yang tegak lurus $\mathbf{n}$. Sirkulasi paling besar bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, dan nilai maksimum itu adalah $|\operatorname{curl} \mathbf{F}|$. Ini membenarkan tafsir roda dayung di 16.5.

CONTOH 6 — PUSARAN

Fluida dengan kecepatan $\mathbf{v} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$ (rotasi dengan $\omega = 3$). $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \langle 0, 0, 6 \rangle$. Sirkulasi di sekeliling lingkaran jari-jari a (berlawanan arah jarum jam): $6 \cdot \pi a^2$. Langsung: di lingkaran, kecepatan $\mathbf{v}$ searah singgung dengan besar $3a$, dan keliling lingkaran $2\pi a$, jadi sirkulasi $= 3a \cdot 2\pi a = 6\pi a^2$. Cocok.

CONTOH 7 — HUKUM FARADAY

Bila $\mathbf{E}$ medan listrik dan $\mathbf{B}$ medan magnet, Faraday: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\dfrac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Menerapkan Stokes ke ruas kiri memberi $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ untuk semua S, jadi bentuk diferensial: $\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, salah satu persamaan Maxwell.

4. Konservatif dan Stokes

Stokes menjelaskan syarat 16.3 secara lengkap. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ pada daerah sederhana terhubung D, maka untuk setiap kurva tertutup C di D, $C = \partial S$ untuk suatu permukaan $S \subset D$, sehingga $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Jadi $\mathbf{F}$ konservatif. (Pada daerah berlubang seperti 16.3 Contoh 4, S yang dimaksud mungkin harus melewati lubang, di tempat $\mathbf{F}$ tidak terdefinisi, sehingga bukti gagal.)

5. Kesalahan umum

- Tidak mencocokkan orientasi C dengan $\mathbf{n}$ (tangan kanan), sehingga tanda salah.
- Memakai curl yang salah, atau lupa mengambil produk titik dengan normal.
- Memakai Stokes pada $\mathbf{F}$ yang tidak halus di dalam S.
- Mengira nilai bergantung pada S: hanya batas C yang penting.

6. Ringkasan

- $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; orientasi C dan S dengan aturan tangan kanan.
- Green adalah kasus khusus; pilih permukaan termudah dengan batas C.
- Curl = sirkulasi per satuan luas; $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow$ konservatif (daerah sederhana terhubung).

Berikutnya 16.9 Teorema Divergensi.