Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.7 Integral Permukaan

Integral garis menjumlahkan sepanjang kurva. Integral permukaan menjumlahkan di atas *permukaan*. Sama seperti sebelumnya ada dua jenis: integral fungsi skalar (massa, muatan) dan integral medan vektor (fluks).

1. Integral permukaan fungsi skalar

Bagi permukaan S menjadi potongan kecil S_{ij} berluas ΔS_{ij}, pilih titik contoh P_{ij}^*, dan jumlahkan $f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij}$.

INTEGRAL PERMUKAAN

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim \sum f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij} = \iint_D f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA.$$

Untuk grafik $z = g(x,y)$ di atas D:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dA.$$

Dengan $f \equiv 1$: $\iint_S dS = A(S)$ (luas permukaan, 16.6).

CONTOH 1 — $\iint Y^2\,DS$ PADA BOLA

Bola jari-jari a: $dS = a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$, $y = a\sin\phi\sin\theta$. $\iint y^2\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin^2\phi\sin^2\theta\cdot a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = a^4\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{4\pi a^4}{3}$. Karena simetri, $\iint x^2dS = \iint y^2dS = \iint z^2dS$; jumlahnya $\iint a^2dS = 4\pi a^4$, jadi masing-masing $\frac{4\pi a^4}{3}$. Cocok.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA

$\iint_S z\,dS$, S belahan atas bola jari-jari 2: $z = 2\cos\phi$, $dS = 4\sin\phi\,d\phi\,d\theta$. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\cos\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 8\pi \approx 25{,}13$. Bila S kulit tipis dengan kerapatan $\sigma = z$, maka 8π adalah massanya.

CONTOH 3 — BIDANG

$\iint_S x\,dS$, S bagian bidang $x+y+z=1$ di oktan pertama. $z=1-x-y$: $\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$. D: segitiga $x,y\ge 0, x+y\le 1$. $\sqrt{3}\iint_D x\,dA=\sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}\approx 0{,}289$.

CONTOH 4 — SILINDER

$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, S: silinder $x^2+y^2=1, 0\le z\le 2$ (tanpa tutup). $\mathbf{r}=\langle\cos\theta,\sin\theta,z\rangle$, $|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_z|=1$. $\int_0^{2\pi}\int_0^2(1+z^2)\,dz\,d\theta=2\pi\left(2+\frac{8}{3}\right)=\frac{28\pi}{3}\approx 29{,}3$.

PENERAPAN

Massa $m=\iint\sigma\,dS$; pusat massa $\bar{x}=\frac{1}{m}\iint x\sigma\,dS$ (dst.); momen inersia $I_z=\iint(x^2+y^2)\sigma\,dS$; muatan total $Q=\iint\sigma\,dS$.

2. Permukaan berorientasi

Untuk integral medan vektor kita perlu memilih **sisi** permukaan. Permukaan S **berorientasi** bila ada medan vektor normal satuan $\mathbf{n}$ yang kontinu pada S. Setiap permukaan mulus (selain Möbius) mempunyai dua orientasi: $\mathbf{n}$ dan $-\mathbf{n}$.

- Grafik $z=g(x,y)$: orientasi *ke atas*: $\mathbf{n}=\dfrac{\langle -g_x,-g_y,1\rangle}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}$.
- Permukaan tertutup (bola, kubus): orientasi *positif* adalah normal yang menunjuk *ke luar*.
- Permukaan parametrik: $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}$ (atau kebalikannya).

Pita Möbius (setengah putaran lalu disambung) hanya mempunyai satu sisi dan tidak dapat diorientasikan.

3. Fluks

INTEGRAL PERMUKAAN MEDAN VEKTOR (FLUKS)

Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ pada permukaan berorientasi S dengan normal satuan $\mathbf{n}$:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\big(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\big)\,dA,$$

dengan syarat $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ searah $\mathbf{n}$ (bila berlawanan, beri tanda minus). Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida (kerapatan 1), ini adalah **laju aliran** fluida (volume per waktu) yang melewati S pada arah $\mathbf{n}$.

UNTUK GRAFIK $Z = G(X,Y)$, ORIENTASI KE ATAS

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \big(-P\,g_x - Q\,g_y + R\big)\,dA, \qquad \mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle.$$

CONTOH 5 — FLUKS MELALUI BOLA

$\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$, bola jari-jari a, normal keluar $\mathbf{n}=\frac{\langle x,y,z\rangle}{a}$. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a}=a$. Fluks $=a\cdot 4\pi a^2=4\pi a^3$. (Sama dengan $\iiint \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3$, 16.9.)

CONTOH 6 — FLUKS MELALUI PARABOLOID

$\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$, S: $z=1-x^2-y^2$, $z\ge 0$, orientasi ke atas. $g_x=-2x$, $g_y=-2y$: $-Pg_x-Qg_y+R = 2x^2+2y^2+(1-x^2-y^2)=1+x^2+y^2$. $\iint_D (1+r^2)\,dA = 2\pi\int_0^1 (1+r^2)r\,dr = 2\pi\big(\frac12+\frac14\big)=\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}712$.

CONTOH 7 — KUBUS

Fluks $\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$ keluar dari kubus $[0,1]^3$: enam sisi. Sisi $x=1$ ($\mathbf{n}=\mathbf{i}$): $F\cdot n = x = 1$, luas 1, fluks 1. Sisi $x=0$ ($\mathbf{n}=-\mathbf{i}$): $-x=0$. Sama untuk y dan z. Total $=3$.

CONTOH 8 — KERUCUT DENGAN PARAMETRISASI

$\mathbf{F}=\langle x,y,z\rangle$, kerucut $\mathbf{r}(u,v)=\langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$, $0\le u\le 1$. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v = \langle -u\cos v, -u\sin v, u\rangle$ (menunjuk ke dalam-atas). $\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v) = -u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v + u^2 = 0$. Fluks $=0$: medan radial dari titik asal menyinggung kerucut sehingga tidak ada fluida yang menembusnya.

CONTOH 9 — FLUKS MEDAN LISTRIK

Muatan Q di titik asal: $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Fluks melalui bola jari-jari a (normal keluar): $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$; fluks $= \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot 4\pi a^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, tidak bergantung pada a (hukum Gauss).

CONTOH 10 — ALIRAN PANAS

Suhu $u(x,y,z)$, konduktivitas K; aliran panas $\mathbf{F} = -K\nabla u$. Laju aliran panas keluar melalui permukaan tertutup S adalah $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -K\iint_S \nabla u\cdot d\mathbf{S}$. Untuk $u = x^2+y^2+z^2$ pada bola jari-jari a, $\nabla u = 2\mathbf{r}$, $\nabla u\cdot\mathbf{n} = 2a$: fluks panas $= -K\cdot 2a\cdot 4\pi a^2 = -8\pi K a^3$ (negatif: panas mengalir ke dalam karena suhu makin besar ke luar).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|$ pada integral skalar, atau memakai $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ tanpa memeriksa arahnya terhadap orientasi.
- Mengabaikan orientasi: membalik normal mengubah tanda fluks.
- Memakai $\mathbf{n}$ satuan bersama $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ (nilai ganda): pakai satu saja.
- Pada permukaan tertutup bertutup, lupa memasukkan tutupnya.

5. Ringkasan

- $\iint_S f\,dS = \iint_D f(\mathbf{r})|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dA$.
- Fluks $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA$; grafik: $\iint(-Pg_x - Qg_y + R)\,dA$.
- Orientasi: ke atas untuk grafik, ke luar untuk permukaan tertutup.

Berikutnya 16.8 Teorema Stokes.