Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya

Kurva ruang kita nyatakan oleh satu parameter t: $\mathbf{r}(t)$. Permukaan mempunyai dua dimensi, sehingga memerlukan dua parameter (u, v). Representasi ini jauh lebih fleksibel daripada grafik $z = f(x, y)$: ia dapat menggambarkan bola, silinder, torus, dan permukaan lain yang bukan grafik fungsi.

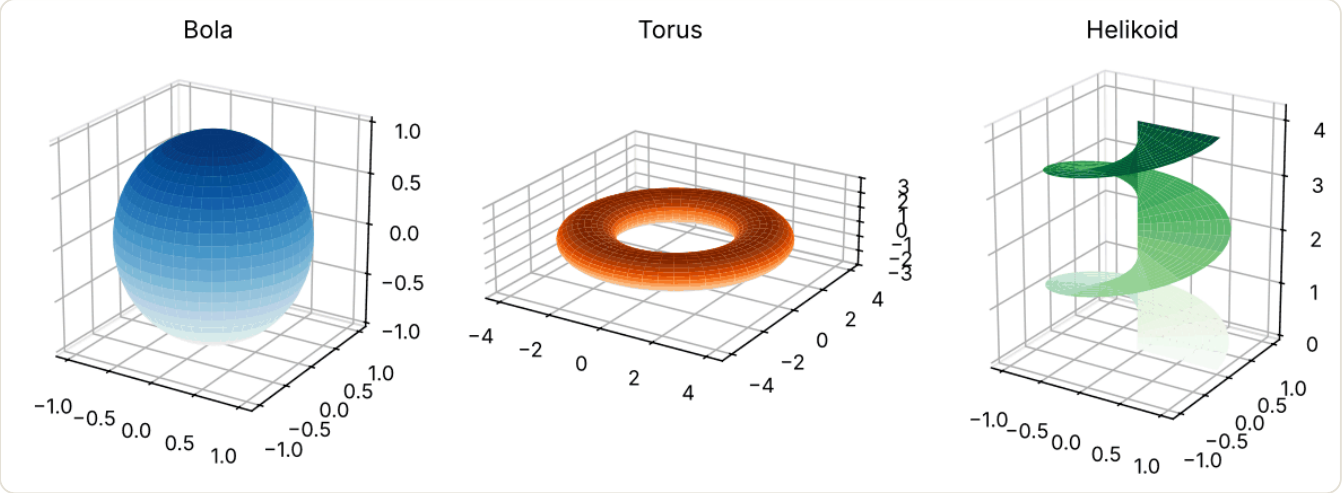
1. Permukaan parametrik

DEFINISI

Permukaan parametrik S adalah himpunan titik

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v) \rangle, \qquad (u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

D disebut daerah parameter. Kurva $u = u_0$ (dengan v berubah) dan $v = v_0$ disebut *kurva grid*; ia membentuk "jaring" yang menyelimuti permukaan.



Tiga permukaan parametrik: bola, torus, dan helikoid.

CONTOH 1 — BIDANG

Bidang melalui titik $\mathbf{r}_0$ dengan vektor sejajar $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Misalnya bidang melalui $(1, 2, 3)$ yang memuat $\langle 1, 0, 1 \rangle$ dan $\langle 0, 1, -1 \rangle$: $\mathbf{r} = \langle 1 + u,\ 2 + v,\ 3 + u - v \rangle$, yaitu $z = x - y + 4$.

CONTOH 2 — SILINDER DAN BOLA

- Silinder $x^2 + y^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$, $0 \le \theta \le 2\pi$, z selang.
- Bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ (koordinat bola, 15.9).
- Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$: $\langle a\sin\phi\cos\theta,\ b\sin\phi\sin\theta,\ c\cos\phi\rangle$.

CONTOH 3 — GRAFIK DAN PARABOLOID

Grafik $z = f(x, y)$: $\mathbf{r}(x, y) = \langle x, y, f(x, y)\rangle$ (ambil $u = x$, $v = y$). Paraboloid $z = x^2 + y^2$ dapat ditulis $\mathbf{r}(r, \theta) = \langle r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\rangle$. Kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$.

CONTOH 4 — PERMUKAAN PUTAR

Kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, diputar mengelilingi sumbu x: $\mathbf{r}(x, \theta) = \langle x,\ f(x)\cos\theta,\ f(x)\sin\theta\rangle$. Untuk $f = \sqrt{x}$ pada $0 \le x \le 1$: paraboloid $y^2 + z^2 = x$.

CONTOH 5 — TORUS

Torus (donat) dengan jari-jari pusat tabung R dan jari-jari tabung r ($R > r$): $\mathbf{r}(u, v) = \langle (R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v\rangle$, $0 \le u, v \le 2\pi$.

CONTOH 6 — HELIKOID

$\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$: setiap kurva $u = \text{konstan}$ adalah heliks, setiap $v = \text{konstan}$ adalah garis horizontal yang memotong sumbu z: seperti ulir tangga spiral.

2. Bidang singgung

Turunan parsial $\mathbf{r}_u = \langle x_u, y_u, z_u\rangle$ dan $\mathbf{r}_v$ di titik (u_0, v_0) adalah vektor singgung pada kurva grid, jadi keduanya terletak pada bidang singgung. Permukaan disebut **mulus** bila $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ (di titik dalam D); vektor ini adalah **normal**.

CONTOH 7 — BIDANG SINGGUNG

$\mathbf{r}(u,v) = \langle u^2, v^2, u+2v\rangle$, di titik $(1,1,3)$ ($u=v=1$). $\mathbf{r}_u = \langle 2u, 0, 1\rangle = \langle 2,0,1\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle 0, 2v, 2\rangle = \langle 0,2,2\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle 0\cdot 2 - 1\cdot 2,\ 1\cdot 0 - 2\cdot 2,\ 2\cdot 2 - 0\rangle = \langle -2,-4,4\rangle$. Bidang: $-2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$, yaitu $x + 2y - 2z = -3$. (Periksa titik: $1 + 2 - 6 = -3$.)

3. Luas permukaan

Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ di D dipetakan menjadi jajargenjang hampir yang dibentangkan $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$, luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$ (bandingkan dengan Jacobian, 15.10).

LUAS PERMUKAAN PARAMETRIK

Bila S mulus dan dilalui tepat satu kali ketika (u,v) menjelajahi D,

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA.$$

CONTOH 8 — BOLA

$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \sin\phi$ (15.6), $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$.

CONTOH 9 — TORUS

$\mathbf{r}_u = \langle -(R + r\cos v)\sin u,\ (R + r\cos v)\cos u,\ 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -r\sin v\cos u,\ -r\sin v\sin u,\ r\cos v\rangle$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = r(R + r\cos v)$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\, dv\, du = 2\pi \cdot 2\pi r R = 4\pi^2 r R$. Untuk $R = 3, r = 1$: $12\pi^2 \approx 118{,}4$. (Luas = keliling lingkaran tabung $2\pi r$ kali keliling lintasan pusatnya $2\pi R$, teorema Pappus.)

CONTOH 10 — HELIKOID

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, v\rangle$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$. $\mathbf{r}_u = \langle \cos v, \sin v, 0\rangle$, $\mathbf{r}_v = \langle -u\sin v, u\cos v, 1\rangle$. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle \sin v,\ -\cos v,\ u\rangle$, panjang $\sqrt{1+u^2}$. $A = \pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\, du = \dfrac{\pi}{2}\left[\sqrt{2} + \sinh^{-1} 1\right] \approx 3{,}606$.

CONTOH 11 — KERUCUT

$\mathbf{r} = \langle u\cos v, u\sin v, u\rangle$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$. $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{2}\,u$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{2}u\,du\,dv = 4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77$, sama dengan $\pi r s$ dengan $r = 2$, $s = 2\sqrt{2}$.

KASUS KHUSUS

- Grafik $z = f(x,y)$: $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$, $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dA$ (15.6).
- Permukaan putar $y = f(x)$ di sekitar sumbu x: $|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = f\sqrt{1+f'^2}$, $A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ (10.2).

CONTOH 12 — PARABOLOID PUTAR

$f = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$: $f\sqrt{1+f'^2} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}} = \sqrt{x+\frac{1}{4}}$. $A = 2\pi\int_0^1 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \approx 5{,}33$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $|\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v|$ sebagai elemen luas; yang benar $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ (hanya sama bila kedua vektor tegak lurus).
- Batas u, v yang membuat permukaan terlewati dua kali (mis. bola dengan $\theta \in [0, 4\pi]$).
- Menganggap parametrisasi tunggal: satu permukaan punya banyak parametrisasi.

5. Ringkasan

- $\mathbf{r}(u,v)$; $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ adalah normal bidang singgung.
- $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$.
- Contoh: bola $4\pi a^2$, torus $4\pi^2 r R$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 16.7 Integral Permukaan.