Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.5 Curl dan Divergensi

Dua turunan menjelaskan bagaimana sebuah medan vektor berperilaku secara lokal: **curl** mengukur kecenderungan berputar, dan **divergensi** mengukur kecenderungan memancar atau terserap. Keduanya adalah kunci untuk memperluas teorema Green ke ruang (16.8, 16.9).

1. Operator del

Definisikan operator vektor $\nabla = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right\rangle$. Ia bekerja pada fungsi skalar (gradien ∇f), dan melalui "hasil kali" titik dan silang pada medan vektor.

2. Curl

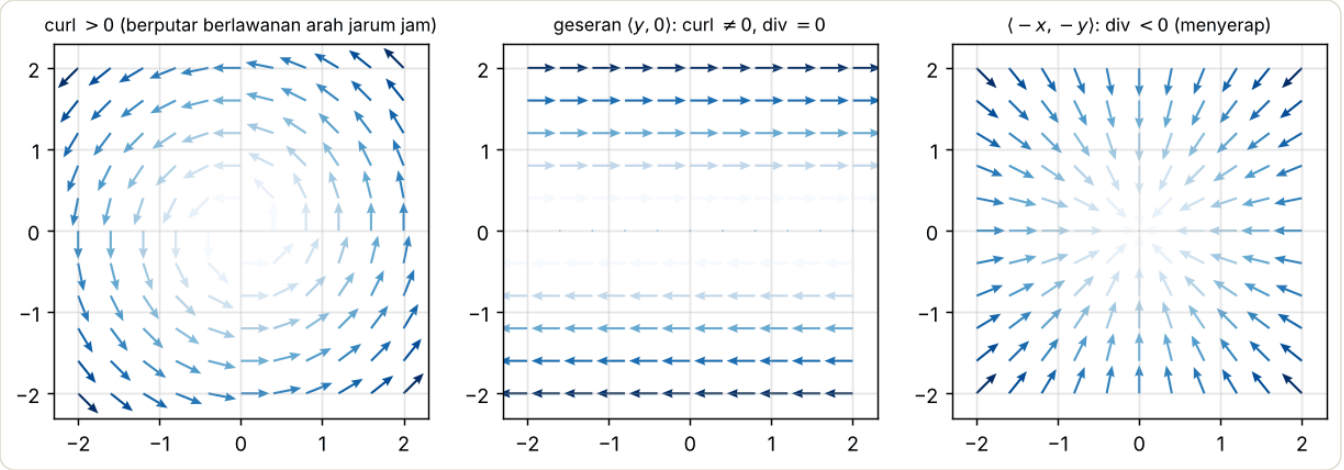
DEFINISI — CURL

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ dengan turunan parsial ada,

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \Big\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y \Big\rangle.$$

Untuk medan bidang $\langle P, Q, 0 \rangle$, curl $= \langle 0, 0, Q_x - P_y \rangle$: komponen $\mathbf{k}$ adalah integran teorema Green.

Tafsir. Letakkan roda dayung kecil di aliran fluida $\mathbf{F}$, dengan sumbu searah $\mathbf{n}$. Roda berputar paling cepat bila $\mathbf{n}$ searah $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, dengan kecepatan sudut $\frac{1}{2} |\operatorname{curl} \mathbf{F}|$. Bila $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, aliran disebut *tak berputar* (irrotasional).



Kiri: medan berputar. Tengah: geseran (curl tak nol, divergensi nol). Kanan: medan yang menyerap (divergensi negatif).

CONTOH 1 — MENGHITUNG CURL

$\mathbf{F} = \langle xz,\ xyz,\ -y^2 \rangle$. $R_y - Q_z = -2y - xy$; $P_z - R_x = x - 0 = x$; $Q_x - P_y = yz - 0 = yz$. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \langle -2y - xy,\ x,\ yz \rangle$. Di $(1,1,2)$: $\langle -3, 1, 2 \rangle$.

CONTOH 2 — ROTASI BENDA TEGAR

Benda berputar dengan kecepatan sudut $\boldsymbol{\omega} = \langle 0, 0, 3 \rangle$: kecepatan titik $\mathbf{r}$ adalah $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \langle -3y, 3x, 0 \rangle$. $\operatorname{curl}\mathbf{v} = \langle 0, 0, 3+3 \rangle = \langle 0, 0, 6 \rangle = 2\boldsymbol{\omega}$. Jadi curl kecepatan sama dengan dua kali kecepatan sudut. Medan geseran $\langle y, 0, 0 \rangle$: curl $= \langle 0, 0, -1 \rangle$, roda berputar searah jarum jam.

CONTOH 3 — CURL DAN KONSERVATIF

$\mathbf{F} = \langle yz, xz, xy \rangle$: $R_y - Q_z = x - x = 0$, $P_z - R_x = y - y = 0$, $Q_x - P_y = z - z = 0$; curl $= \mathbf{0}$. Memang $\mathbf{F} = \nabla(xyz)$. Sebaliknya $\mathbf{F} = \langle xy, yz, zx \rangle$: curl $= \langle -y, -z, -x \rangle \neq \mathbf{0}$, tidak konservatif.

TEOREMA

Jika f mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Sebaliknya, jika $\mathbf{F}$ terdefinisi pada seluruh $\mathbb{R}^3$ (atau daerah sederhana terhubung) dengan komponen berturunan parsial kontinu dan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, maka $\mathbf{F}$ konservatif.

Bukti bagian pertama: komponen pertama $\partial_y(f_z) - \partial_z(f_y) = 0$ oleh Clairaut; komponen lain serupa. Ini kelanjutan dari syarat $P_y = Q_x$ di 16.3.

3. Divergensi

DEFINISI — DIVERGENSI

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(Di bidang: $P_x + Q_y$.) Ini fungsi *skalar*.

Tafsir. Bila $\mathbf{F}$ kecepatan fluida, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ di sebuah titik adalah laju fluks keluar per satuan volume: positif bila titik itu *sumber* (fluida memancar), negatif bila *penyerap* (sink), dan nol bila aliran *tak mampat* (volume fluida tidak berubah).

CONTOH 4 — MENGHITUNG DIVERGENSI

- $\mathbf{F} = \langle xz, xyz, -y^2 \rangle$: $\operatorname{div} = z + xz + 0 = z(1+x)$.
- $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$: $\operatorname{div} = 3$ (memancar seragam).
- $\mathbf{F} = \langle x, -y \rangle$: $\operatorname{div} = 1 - 1 = 0$: aliran sudut tak mampat (di sekitar titik pelana, mengalir masuk sepanjang sumbu y dan keluar sepanjang sumbu x).
- $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: $\operatorname{div} = 0$: berputar tanpa memampat.

CONTOH 5 — MEDAN KUADRAT TERBALIK

$\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \dfrac{\langle x,y,z\rangle}{\rho^3}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{\rho^3} = \dfrac{1}{\rho^3} - \dfrac{3x^2}{\rho^5}$. Jumlahkan untuk tiga komponen: $\dfrac{3}{\rho^3} - \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{\rho^5} = 0$. Jadi $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ di mana pun kecuali di titik asal (sumber titik). Karena inilah fluks medan listrik dan gravitasi muatan titik tidak bergantung pada bentuk permukaan pengurung (16.9).

TEOREMA

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$ mempunyai turunan parsial kedua kontinu, maka

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0.$$

Bukti: $\operatorname{div}\langle R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y\rangle = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0$ oleh Clairaut. Akibatnya, medan yang merupakan curl dari medan lain pasti tak mampat (mis. medan magnet).

4. Laplacian dan identitas

Laplacian fungsi skalar: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$. Fungsi dengan $\nabla^2 f = 0$ disebut *harmonik* (persamaan Laplace, 14.3).

CONTOH 6 — LAPLACIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $\nabla^2 f = 2 + 2 + 2 = 6$.
- $f = \dfrac{1}{\rho}$: $\nabla f = -\dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3}$, $\nabla^2 f = -\operatorname{div} \dfrac{\mathbf{r}}{\rho^3} = 0$ (Contoh 5): harmonik di mana pun kecuali asal; ini potensial listrik dan gravitasi.
- $f = x^2 - y^2$: $\nabla^2 f = 2 - 2 = 0$: harmonik.

Identitas	Keterangan
$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$	gradien tak berputar
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$	curl tak mampat
$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$	aturan hasil kali
$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\,\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$	aturan hasil kali
$\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$	linear

CONTOH 7 — MEMAKAI ATURAN HASIL KALI

$\nabla \cdot (\rho^2\,\mathbf{r})$ dengan $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$: $f = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\nabla f = 2\mathbf{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$: $f\,\nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla f = 3\rho^2 + 2\rho^2 = 5\rho^2$.

5. Bentuk vektor teorema Green

Dengan notasi baru, teorema Green (16.4) berbunyi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA, \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.$$

Bentuk pertama (sirkulasi $\leftrightarrow$ curl) memperluas diri menjadi Teorema Stokes (16.8); bentuk kedua (fluks $\leftrightarrow$ divergensi) menjadi Teorema Divergensi (16.9).

6. Kesalahan umum

- Menyamakan curl dan divergensi: curl menghasilkan vektor, divergensi menghasilkan skalar.
- Salah tanda pada determinan curl (komponen $\mathbf{j}$ adalah $P_z - R_x$, bukan $R_x - P_z$).
- Menghitung curl atau divergensi dari fungsi skalar, atau gradien dari medan vektor: tipe tidak cocok.
- Menyimpulkan konservatif dari curl nol pada daerah yang tidak sederhana terhubung.

7. Ringkasan

- $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$: kecenderungan berputar; $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$: kecenderungan memancar.
- $\operatorname{curl}\nabla f = \mathbf{0}$; $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$.
- Laplacian $\nabla^2 f = \operatorname{div}\nabla f$; fungsi harmonik: $\nabla^2 f = 0$.

Berikutnya 16.6 Permukaan Parametrik dan Luasnya.