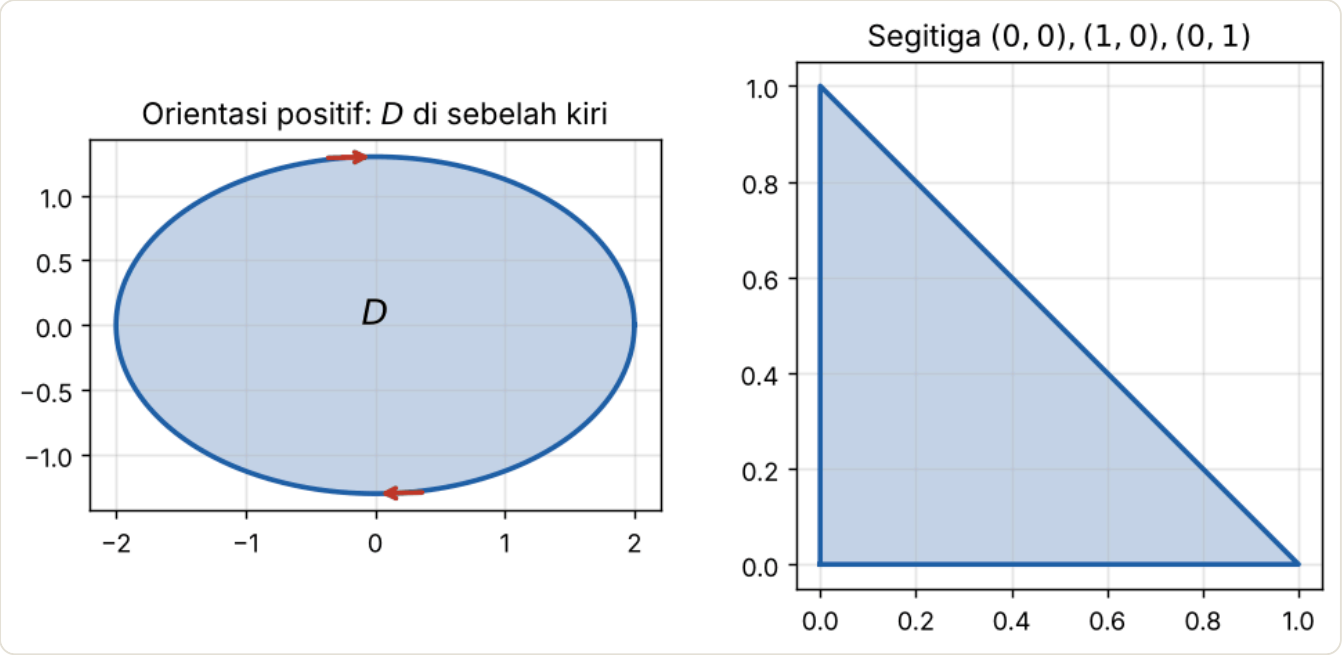
Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.4 Teorema Green

Teorema Dasar Kalkulus mengubah integral pada selang menjadi nilai pada *batas* selang. **Teorema Green** melakukan hal serupa pada bidang: ia menghubungkan integral garis sepanjang *kurva tertutup* dengan integral ganda dua pada *daerah* yang dikurungnya.

1. Orientasi

Kurva tertutup sederhana C (tidak memotong dirinya sendiri) mempunyai dua arah. **Orientasi positif** adalah arah berlawanan jarum jam, yaitu arah dengan daerah D yang dikurung selalu berada di *sebelah kiri* penelusur.



Orientasi positif: berlawanan arah jarum jam, daerah di kiri.

2. Teorema Green

TEOREMA GREEN

Misalkan C kurva tertutup sederhana, mulus sebagian-sebagian, berorientasi positif, yang membatasi daerah D. Jika P dan Q mempunyai turunan parsial kontinu pada daerah terbuka yang memuat D, maka

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA.$$

Notasi lain untuk ruas kiri: $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$, dan ∂D untuk batas D.

Bukti (untuk daerah yang sekaligus tipe I dan tipe II). Tunjukkan $\oint_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Tulis $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$. Maka $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \big[P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\big]\,dx$. Di sisi lain, $C = C_1 \cup C_2 \cup$(dua ruas vertikal, tempat $dx = 0$), dengan C_1 (bawah, dari kiri ke kanan): $\int_{C_1} P\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$, dan C_2 (atas, dari kanan ke kiri): $\int_{C_2} P\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$. Jumlahnya $\oint_C P\,dx = -\int_a^b \big[P(x,g_2) - P(x,g_1)\big]\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$. Dengan memandang D sebagai tipe II diperoleh $\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$. Jumlahkan. Daerah umum dipotong menjadi potongan sederhana; integral garis pada potongan pembatas dalam saling menghapus karena dilalui dua arah. ■

3. Contoh

CONTOH 1 — SEGITIGA

$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$, C segitiga $(0,0),(1,0),(0,1)$ berlawanan arah jarum jam. $P = x^4$, $Q = xy$: $Q_x - P_y = y - 0 = y$. $\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} y\,dx\,dy = \int_0^1 y(1-y)\,dy = \frac{1}{6}$. Cek langsung: ruas $(0,0)\to(1,0)$: $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$; ruas $(1,0)\to(0,1)$: $x = 1-s, y = s$: $\int_0^1 \big[-(1-s)^4 + (1-s)s\big]\,ds = -\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; ruas $(0,1)\to(0,0)$: $x = 0$, integral 0. Jumlah $\frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Cocok.

CONTOH 2 — LINGKARAN

$\oint_C -y^3\,dx + x^3\,dy$, C: lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$. $Q_x - P_y = 3x^2 + 3y^2$. $\iint_D 3(x^2+y^2)\,dA = 3\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi a^4}{2}$. Langsung dengan parametrisasi akan melibatkan $\cos^4 + \sin^4$, lebih panjang.

CONTOH 3 — KASUS KETIKA $Q_X - P_Y$ KONSTAN

$\oint_C (y + e^{x^2})\,dx + (2x + \cos y)\,dy$, C elips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. $Q_x - P_y = 2 - 1 = 1$, jadi integral = luas elips $= \pi \cdot 3 \cdot 2 = 6\pi$. Suku-suku sulit e^{x^2} dan $\cos y$ tidak berperan.

CONTOH 4 — MENJELASKAN 16.2 CONTOH 4

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: usaha dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat parabola $y = x^2$ adalah $\frac{1}{3}$, lewat garis $y = x$ adalah 0. Kurva tertutup $C = C_1 \cup (-C_2)$ (naik di parabola, turun di garis) berorientasi positif: $\oint_C = \frac{1}{3} - 0$. Teorema Green: $Q_x - P_y = 1 - (-1) = 2$, luas antara $y = x^2$ dan $y = x$ adalah $\int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$. $\iint_D 2\,dA = \frac{1}{3}$. Cocok.

CONTOH 5 — DAERAH DENGAN LUBANG

Misalkan D adalah cincin $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, dengan batas luar C_2 (berlawanan arah jarum jam) dan batas dalam C_1 (*searah* jarum jam, agar D tetap di kiri). Green berlaku dengan $\partial D = C_2 \cup (-C_1)$: $\oint_{C_2} - \oint_{C_1} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$ dengan kedua lingkaran berlawanan arah jarum jam. Bila $Q_x = P_y$ di seluruh D (mis. medan Contoh 4 di 16.3 $\langle -y, x \rangle / (x^2 + y^2)$), maka $\oint_{C_2} = \oint_{C_1} = 2\pi$: kurva tertutup mana pun yang mengelilingi titik asal memberi sirkulasi yang sama, 2π.

4. Menghitung luas dengan integral garis

Pilih P, Q dengan $Q_x - P_y = 1$, mis. $P = 0, Q = x$ atau $P = -y, Q = 0$ atau $P = -\frac{y}{2}, Q = \frac{x}{2}$. Maka

$$A(D) = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx.$$

CONTOH 6 — LUAS ELIPS

$x = a\cos t,\ y = b\sin t, 0 \le t \le 2\pi$: $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t)\big]\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$.

CONTOH 7 — ASTROID

$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$. $x\,y' - y\,x' = \cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t = 3\sin^2 t\cos^2 t$. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}178$.

5. Bentuk vektor: sirkulasi dan fluks

DUA BENTUK VEKTOR TEOREMA GREEN

Untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad \text{(sirkulasi, "bentuk tangensial")},$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \quad \text{(fluks, "bentuk normal")},$$

dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar. Bentuk kedua diperoleh dari yang pertama dengan memakai medan $\langle -Q, P \rangle$ (karena $\mathbf{n}\, ds = \langle dy, -dx \rangle$).

CONTOH 8 — FLUKS

$\mathbf{F} = \langle x^3, y^3 \rangle$, fluks keluar melalui lingkaran jari-jari a: $\operatorname{div} = 3x^2 + 3y^2$, hasil $\iint 3r^2\, dA = \frac{3\pi a^4}{2}$. Untuk $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: div $= 2$, fluks $= 2 \cdot \pi a^2$, cocok dengan 16.2 Contoh 8 ($2\pi R^2$).

6. Kesalahan umum

- Memakai arah searah jarum jam tanpa mengganti tanda hasil.
- Menukar Q_x dan P_y (rumus: $Q_x - P_y$).
- Menerapkan Green pada medan yang tidak halus di dalam D (mis. singularitas di titik asal).
- Lupa membalik arah batas dalam pada daerah berlubang.

7. Ringkasan

- $\oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA$, C berorientasi positif.
- Luas: $A = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx$.
- Bentuk normal: $\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA$.

Berikutnya 16.5 Curl dan Divergensi.