Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.3 Teorema Dasar Integral Garis

Teorema Dasar Kalkulus berkata $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$: integral turunan hanya bergantung pada nilai di *ujung-ujung*. Untuk integral garis ada analog yang sama indahnya, berlaku untuk medan gradien.

1. Teorema dasar untuk integral garis

TEOREMA

Misalkan C kurva mulus yang diberikan oleh $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, dan f fungsi terdiferensialkan dengan ∇f kontinu pada C. Maka

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(b)\big) - f\big(\mathbf{r}(a)\big).$$

Bukti. Dengan aturan rantai (14.5), $\dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Maka $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \dfrac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\,dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ oleh Teorema Dasar Kalkulus satu peubah. ■

CONTOH 1 — HITUNG TANPA PARAMETRISASI

$\mathbf{F} = \langle 2xy + \cos y,\ x^2 - x\sin y\rangle = \nabla f$ dengan $f = x^2 y + x\cos y$. Untuk kurva C apa pun dari $(0,0)$ ke $(1,\pi)$: $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(1,\pi) - f(0,0) = \pi + \cos\pi - 0 = \pi - 1 \approx 2{,}142$.

CONTOH 2 — GRAVITASI

Medan gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{k}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \nabla \dfrac{k}{|\mathbf{r}|}$. Usaha yang dilakukan gravitasi untuk memindahkan benda dari jarak 2 ke jarak 1 dari pusat, lewat lintasan apa pun yang tidak melewati pusat: $\dfrac{k}{1} - \dfrac{k}{2} = \dfrac{k}{2}$. Hanya jarak awal dan akhir yang berpengaruh.

2. Bebas lintasan dan medan konservatif

BEBAS LINTASAN

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **bebas lintasan** di D bila untuk dua titik A, B di D, integralnya sama untuk semua lintasan C dari A ke B di D.

TEOREMA (KESETARAAN)

Misalkan $\mathbf{F}$ kontinu pada daerah terbuka dan terhubung D. Tiga pernyataan berikut setara:

1. $\mathbf{F}$ konservatif: $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu f.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bebas lintasan di D.
3. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk setiap kurva tertutup C di D.

Gagasan bukti. (1)⇒(2): teorema dasar di atas. (2)⇔(3): kurva tertutup C adalah lintasan C_1 dari A ke B diikuti kebalikan lintasan C_2 dari A ke B; $\oint_C = \int_{C_1} - \int_{C_2}$, jadi nol tepat bila $\int_{C_1} = \int_{C_2}$. (2)⇒(1): tetapkan titik A dan definisikan $f(x,y) = \int_A^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (terdefinisi karena bebas lintasan); menghitung f_x dengan lintasan horizontal terakhir menghasilkan $f_x = P$, serupa $f_y = Q$.

CONTOH YANG MENUNJUKKAN PERBEDAAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$ (16.2, Contoh 4 dan 6): sirkulasi di lingkaran satuan $= 2\pi \neq 0$, jadi tidak bebas lintasan dan bukan konservatif.

3. Menguji apakah medan konservatif

SYARAT PERLU

Jika $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif dan P, Q mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada D, maka

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{di seluruh } D.$$

Di ruang, $\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle$: $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$, $Q_z = R_y$ (yaitu $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 16.5).

Bukti: bila $P = f_x$, $Q = f_y$, maka $P_y = f_{xy}$, $Q_x = f_{yx}$, sama oleh Clairaut.

SYARAT CUKUP

Jika $P_y = Q_x$ pada daerah D yang **terbuka dan sederhana terhubung** (terhubung dan tanpa "lubang"; setiap kurva tertutup dapat dikecilkan menjadi satu titik di dalam D), maka $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif. Hal serupa berlaku di ruang.

CONTOH 3 — UJI SEDERHANA

- $\mathbf{F} = \langle xy, x^2 \rangle$: $P_y = x$, $Q_x = 2x$: tidak sama, *tidak konservatif*.
- $\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$: $P_y = 2x = Q_x$ di seluruh $\mathbb{R}^2$ (sederhana terhubung): konservatif.
- $\mathbf{F} = \langle ye^x + \sin y,\ e^x + x\cos y \rangle$: $P_y = e^x + \cos y = Q_x$: konservatif.

CONTOH 4 — JEBAKAN DAERAH BERLUBANG

$\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$ pada $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $P_y = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q_x$, tetapi sirkulasi di lingkaran satuan: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\oint = 2\pi \neq 0$. D tidak sederhana terhubung (lubang di titik asal), maka syarat cukup tidak berlaku: $\mathbf{F}$ tidak konservatif pada D. (Ia adalah $\nabla\theta$, gradien sudut kutub, yang bukan fungsi bernilai tunggal di D.)

4. Mencari fungsi potensial

CONTOH 5 — DUA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle 3 + 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Telah diuji konservatif. Cari f dengan $f_x = 3 + 2xy$, $f_y = x^2 - 3y^2$. Integrasikan f_x terhadap x: $f = 3x + x^2y + g(y)$. Turunkan terhadap y: $f_y = x^2 + g'(y)$, samakan dengan $x^2 - 3y^2$: $g' = -3y^2$, $g = -y^3$. $f = 3x + x^2y - y^3 + C$. Usaha dari $(1,2)$ ke $(3,1)$: $f(3,1) - f(1,2) = (9 + 9 - 1) - (3 + 2 - 8) = 17 - (-3) = 20$.

CONTOH 6 — TIGA DIMENSI

$\mathbf{F} = \langle y^2,\ 2xy + e^{3z},\ 3ye^{3z} \rangle$. Uji: $P_y = 2y = Q_x$, $P_z = 0 = R_x$, $Q_z = 3e^{3z} = R_y$: konservatif. $f_x = y^2 \Rightarrow f = xy^2 + g(y,z)$. $f_y = 2xy + g_y = 2xy + e^{3z} \Rightarrow g_y = e^{3z} \Rightarrow g = ye^{3z} + h(z)$. $f_z = 3ye^{3z} + h'(z) = 3ye^{3z} \Rightarrow h' = 0$. $f = xy^2 + ye^{3z}$. Usaha dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,0)$: $f(1,2,0) - f(0,0,0) = (4 + 2) - 0 = 6$.

CONTOH 7 — USAHA MELEWATI LINTASAN RUMIT

$\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 \rangle = \nabla(x^2 y)$. Usaha sepanjang lintasan apa pun dari $(1,1)$ ke $(2,3)$: $x^2 y\Big| = 12 - 1 = 11$, tanpa parametrisasi. Bila C adalah kurva tertutup, usahanya 0.

5. Kekekalan energi

Misalkan medan gaya $\mathbf{F} = \nabla f$ menggerakkan partikel bermassa m sepanjang $\mathbf{r}(t)$. Hukum Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''$, kecepatan $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$. Usaha

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, dt = m \int_a^b \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'\, dt = \frac{m}{2}\left[|\mathbf{v}(b)|^2 - |\mathbf{v}(a)|^2 \right] = K(B) - K(A),$$

dengan $K = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$ energi kinetik (karena $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'$). Teorema dasar memberi $W = f(B) - f(A)$. Definisikan energi potensial $U = -f$; maka $K(A) + U(A) = K(B) + U(B)$: **energi mekanik kekal**. Inilah mengapa medan konservatif memakai nama itu.

CONTOH 8 — BENDA JATUH

Gravitasi dekat permukaan: $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -mg \rangle = \nabla(-mgz)$, $U = mgz$. Benda dilepas dari $z = h$ (kecepatan nol): di $z = 0$, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Dengan $h = 5$ m, $g = 9{,}8$: $v = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ m/s, tanpa memperhatikan lintasan (jatuh bebas, atau meluncur pada bidang licin).

6. Kesalahan umum

- Memakai $f(B) - f(A)$ pada medan yang tidak konservatif.
- Menyimpulkan konservatif hanya dari $P_y = Q_x$ tanpa memeriksa daerahnya sederhana terhubung (Contoh 4).
- Menghilangkan fungsi $g(y)$ pada langkah mencari potensial.
- Menyamakan $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk satu kurva dengan konservatif; syaratnya berlaku untuk *semua* kurva tertutup.

7. Ringkasan

- $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.
- Konservatif $\Leftrightarrow$ bebas lintasan $\Leftrightarrow$ sirkulasi nol pada kurva tertutup.

- Uji: $P_y = Q_x$ (dan seterusnya); cukup bila daerahnya sederhana terhubung.
- Potensial dicari dengan integrasi berurutan; energi mekanik kekal.

Berikutnya 16.4 Teorema Green.