Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.2 Integral Garis

Integral tentu menjumlahkan sepanjang sebuah selang pada sumbu. **Integral garis** menjumlahkan sepanjang sebuah *kurva* di bidang atau ruang. Ada dua jenis, tergantung apa yang dijumlahkan: besaran skalar (massa kawat) atau komponen medan vektor searah kurva (usaha).

1. Integral garis terhadap panjang busur

Misalkan C kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$, $a \le t \le b$, dan f fungsi skalar kontinu. Bagi C menjadi busur kecil dengan panjang Δs_i, pilih titik contoh (x_i^*, y_i^*), dan jumlahkan $f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$.

INTEGRAL GARIS (TERHADAP S)

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Di ruang: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$. Hasilnya tidak bergantung pada parametrisasi dan arah penelusuran.

Dengan $f \equiv 1$ kita memperoleh panjang kurva $L = \int_C ds$. Bila $f \ge 0$, $\int_C f\,ds$ adalah luas "tirai" yang berdiri di atas C setinggi f.

CONTOH 1 — SETENGAH LINGKARAN

$\int_C (2 + x^2 y)\,ds$, C bagian atas lingkaran satuan: $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t \rangle$, $0 \le t \le \pi$, $|\mathbf{r}'| = 1$.
$\int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\,dt = 2\pi + \left[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi} = 2\pi + \tfrac{2}{3} \approx 6{,}950$.

CONTOH 2 — MASSA KAWAT

Kawat berbentuk heliks $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$, dengan kerapatan linear $\rho = z$ (g/cm). $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$. Massa $= \int_C z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\cdot 2\pi^2 \approx 27{,}9$ g. Panjang kawat $= 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}886$ cm.

CONTOH 3 — KURVA SEPOTONG-SEPOTONG

$\int_C x\,ds$, C terdiri dari ruas C_1 dari $(0,0)$ ke $(1,0)$ dan ruas C_2 dari $(1,0)$ ke $(1,1)$. C_1: $x = t, y = 0$, $ds = dt$: $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. C_2: $x = 1, y = t$, $ds = dt$: $\int_0^1 1\,dt = 1$. Jumlah $\frac{3}{2}$. Integral garis atas kurva sepotong-sepotong adalah jumlah integral masing-masing potong.

2. Integral garis terhadap x dan y

TERHADAP X DAN Y

$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt, \qquad \int_C Q\,dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt,$$

dan $\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \big[P\,x'(t) + Q\,y'(t)\big]\,dt$.

Berbeda dengan ds, integral ini **berubah tanda bila arah kurva dibalik** ($\int_{-C} P\,dx = -\int_C P\,dx$), karena Δx berganti tanda.

3. Integral garis medan vektor (usaha)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja pada partikel yang bergerak sepanjang C, usaha pada busur pendek Δs_i adalah $\approx \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\Delta s_i$, dengan $\mathbf{T}$ vektor singgung satuan.

INTEGRAL GARIS MEDAN VEKTOR

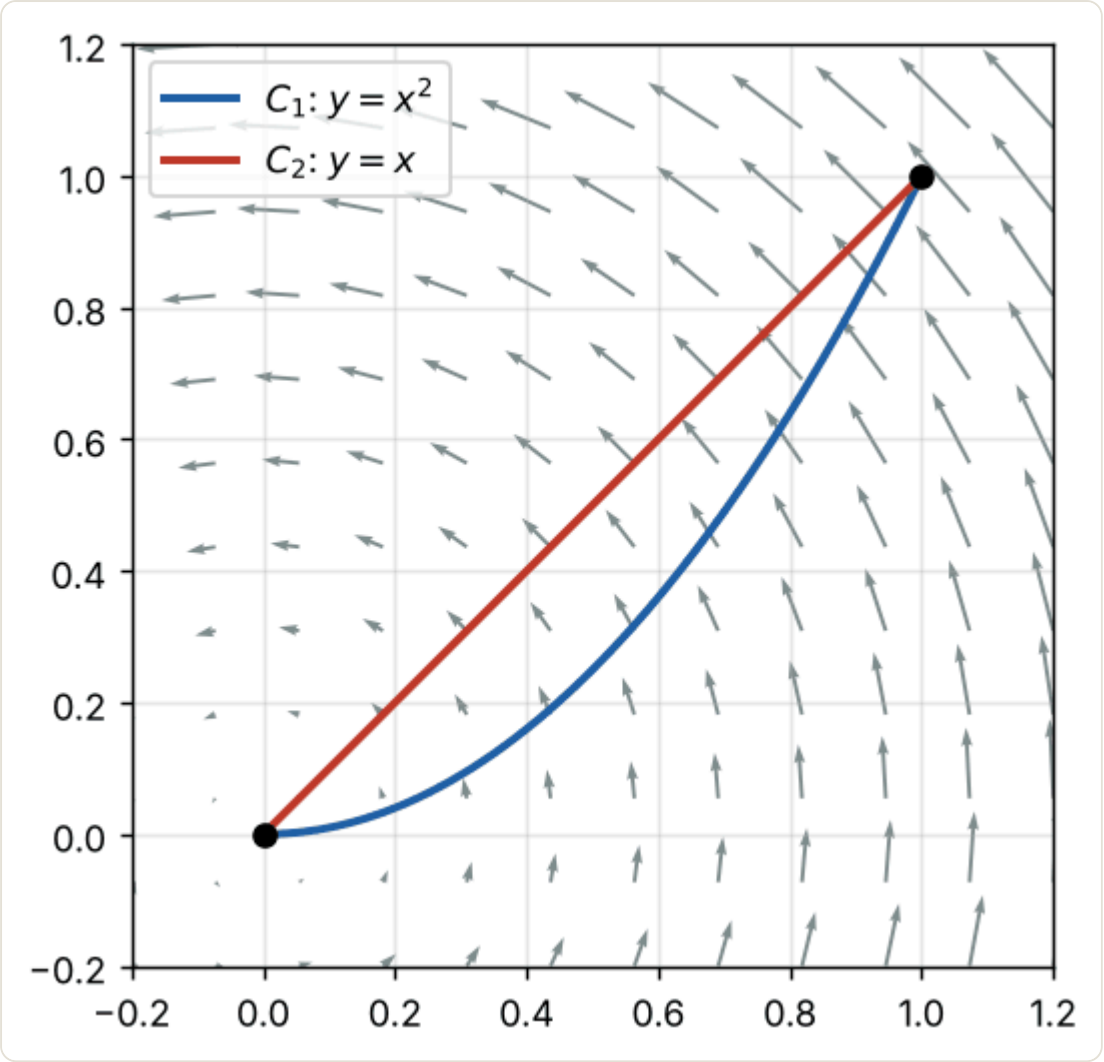
Untuk medan vektor kontinu $\mathbf{F}$ dan kurva mulus $C:\ \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds.$$

Dalam komponen, $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$: $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Bila $\mathbf{F}$ gaya, ini **usaha** yang dilakukan $\mathbf{F}$ pada partikel sepanjang C. Bila C tertutup, ditulis $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (*sirkulasi*).

CONTOH 4 — KETERGANTUNGAN PADA LINTASAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ lewat dua lintasan (gambar).
C_1: $\mathbf{r} = \langle t, t^2 \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t^2, t \rangle$: $\int_0^1 (-t^2 + 2t^2)\, dt = \frac{1}{3}$.
C_2: $\mathbf{r} = \langle t, t \rangle$, $\mathbf{F} = \langle -t, t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 1 \rangle$: $\int_0^1 (-t + t)\, dt = 0$.
Dua lintasan berbeda, usaha berbeda: medan ini bukan konservatif (16.3).



Dua lintasan dari $(0,0)$ ke $(1,1)$ dalam medan $\langle -y, x \rangle$.

CONTOH 5 — USAHA SEPANJANG HELIKS

$\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le 2\pi$. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = \cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + t = t$. $\int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2 \approx 19{,}74$. (Hasil sama dengan $\frac{1}{2}(|\mathbf{r}(2\pi)|^2 - |\mathbf{r}(0)|^2) = \frac{1}{2}(1 + 4\pi^2 - 1)$, karena medan ini konservatif.)

CONTOH 6 — SIRKULASI PADA LINGKARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, C lingkaran satuan berlawanan arah jarum jam: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t = 1$, $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$. Searah jarum jam: -2π.

CONTOH 7 — RUAS GARIS

$\mathbf{F} = \langle xy,\ y - x,\ z \rangle$, C: ruas dari $(0,0,0)$ ke $(1,2,3)$, $\mathbf{r} = \langle t, 2t, 3t \rangle$, $\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$. $\mathbf{F} = \langle 2t^2, t, 3t \rangle$ (karena $y - x = 2t - t = t$). $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' = 2t^2 + 2t + 9t = 2t^2 + 11t$. $\int_0^1 (2t^2 + 11t)\, dt = \frac{2}{3} + \frac{11}{2} = \frac{37}{6} \approx 6{,}167$.

4. Fluks melalui kurva bidang

Untuk kurva C tertutup sederhana dan medan $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$, **fluks keluar** melalui C adalah $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ dengan $\mathbf{n}$ normal satuan keluar; sama dengan $\oint_C P\, dy - Q\, dx$ bila C berlawanan arah jarum jam.

CONTOH 8 — FLUKS KELUAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$ melalui lingkaran jari-jari R: $\mathbf{n} = \langle x, y \rangle / R$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = R$, $\oint R\, ds = R \cdot 2\pi R = 2\pi R^2$ (untuk $R = 1$, 2π). Lewat rumus $P\, dy - Q\, dx$ dengan $x = \cos t, y = \sin t$: $\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = 2\pi$.

5. Sifat-sifat

- $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (arah dibalik).
- $\int_C f\, ds$ tidak berubah bila arah dibalik.
- Nilai tidak bergantung pada parametrisasi selama arahnya sama.
- Linear: $\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.
- Kurva sepotong-sepotong: jumlahkan.

6. Kesalahan umum

- Lupa faktor $|\mathbf{r}'(t)|$ pada $\int f\, ds$.
- Mengevaluasi $\mathbf{F}$ pada titik, bukan pada $\mathbf{r}(t)$.
- Mengabaikan arah: $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ berubah tanda bila arah dibalik.

- Menganggap nilai integral garis medan hanya bergantung pada ujung-ujung kurva (benar hanya untuk medan konservatif).

7. Ringkasan

- $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt$ (skalar).
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$ (usaha, sirkulasi).
- Arah penting untuk integral medan, tidak untuk $\int f\,ds$.

Berikutnya 16.3 Teorema Dasar untuk Integral Garis.