Bab 16 · Kalkulus Vektor

16.1 Medan Vektor

Di Bab 14 setiap titik di bidang diberi sebuah *bilangan* (suhu, tinggi). Sekarang setiap titik diberi sebuah *vektor*: arah dan kecepatan angin, kuat dan arah gaya gravitasi, medan listrik. Objek seperti ini disebut **medan vektor**, dan subbab-subbab Bab 16 membangun kalkulus untuknya.

1. Definisi

MEDAN VEKTOR

Misalkan $D \subseteq \mathbb{R}^2$. **Medan vektor pada** D adalah fungsi $\mathbf{F}$ yang mengaitkan setiap titik $(x, y) \in D$ dengan vektor dua dimensi $\mathbf{F}(x, y)$:

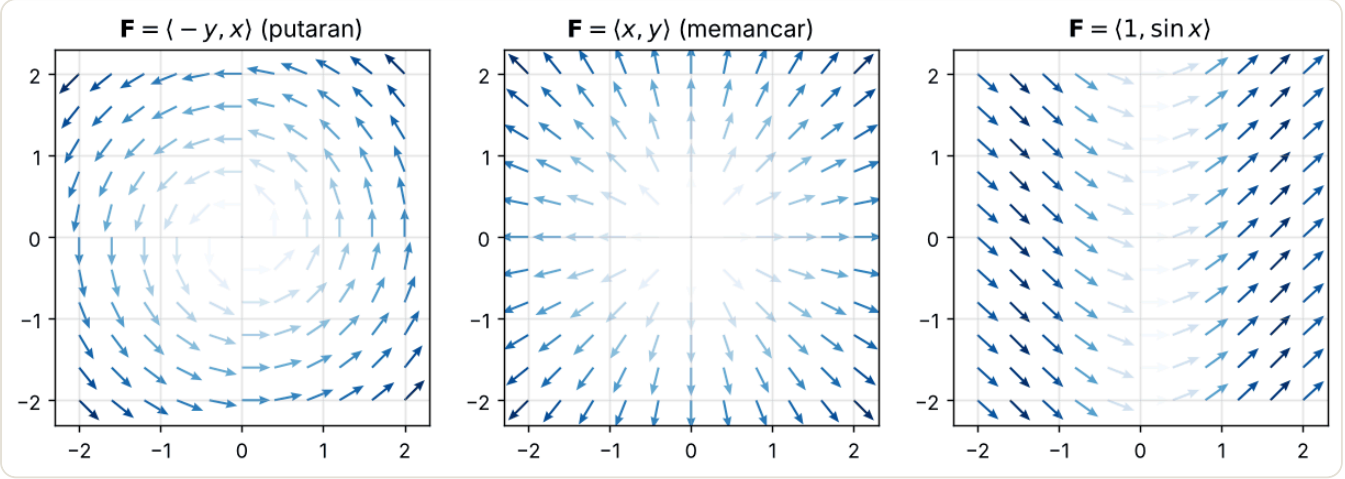
$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle.$$

Di ruang, untuk $E \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z) \rangle.$$

P, Q, R disebut *fungsi komponen* (fungsi skalar). $\mathbf{F}$ kontinu atau terdiferensialkan bila semua komponennya demikian.

Cara menggambarnya: pilih beberapa titik, dan gambar panah $\mathbf{F}(x, y)$ dengan titik awal di (x, y) (tidak harus panjang sebenarnya; sering dinormalkan atau diskalakan).



Tiga medan vektor bidang: putaran, memancar, dan medan $\langle 1, \sin x \rangle$. Warna menunjukkan besar vektor.

CONTOH 1 — MEMBACA MEDAN

- $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: di $(1, 0)$ vektor $\langle 0, 1 \rangle$; di $(0, 1)$ vektor $\langle -1, 0 \rangle$; di $(-1, 0)$ vektor $\langle 0, -1 \rangle$. Vektor selalu tegak lurus $\langle x, y \rangle$ dan panjangnya $\sqrt{x^2 + y^2}$: medan putaran berlawanan arah jarum jam, makin cepat di tepi. (Kecepatan sebuah cakram yang berputar dengan kecepatan sudut 1.)
- $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: vektor posisi; menunjuk ke luar dari titik asal dengan panjang $|\mathbf{r}|$.
- $\mathbf{F} = \langle y, 0 \rangle$: aliran horizontal ke kanan di atas sumbu x, ke kiri di bawahnya, panjang bertambah dengan $|y|$: *geseran* (aliran sungai yang lajunya bervariasi dari tengah ke tepi).

CONTOH 2 — MEDAN DI RUANG

$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle 0, 0, z \rangle = z\,\mathbf{k}$: vektor vertikal, ke atas di atas bidang xy, ke bawah di bawahnya, panjang $|z|$. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{\langle x, y, z \rangle}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$: medan *kuadrat terbalik*, menunjuk keluar, panjang $1/|\mathbf{r}|^2$.

2. Medan fisika

CONTOH 3 — GRAVITASI DAN LISTRIK (HUKUM KUADRAT TERBALIK)

Benda bermassa M di titik asal menarik benda bermassa m di $\mathbf{r}$ dengan gaya

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}.$$

Besarnya $\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2}$, arahnya ke titik asal. Medan listrik muatan titik Q: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Struktur matematisnya identik.

CONTOH 4 — MEDAN KECEPATAN

Fluida yang mengalir dalam pipa dengan profil $\mathbf{v}(x, y) = \langle 1 - y^2, 0 \rangle$, $-1 \le y \le 1$: kecepatan maksimum 1 di tengah ($y = 0$) dan nol di dinding ($y = \pm 1$). Aliran udara $\mathbf{V}(x, y, z)$ di atmosfer adalah contoh medan kecepatan tiga dimensi yang berubah terhadap waktu.

3. Medan gradien dan medan konservatif

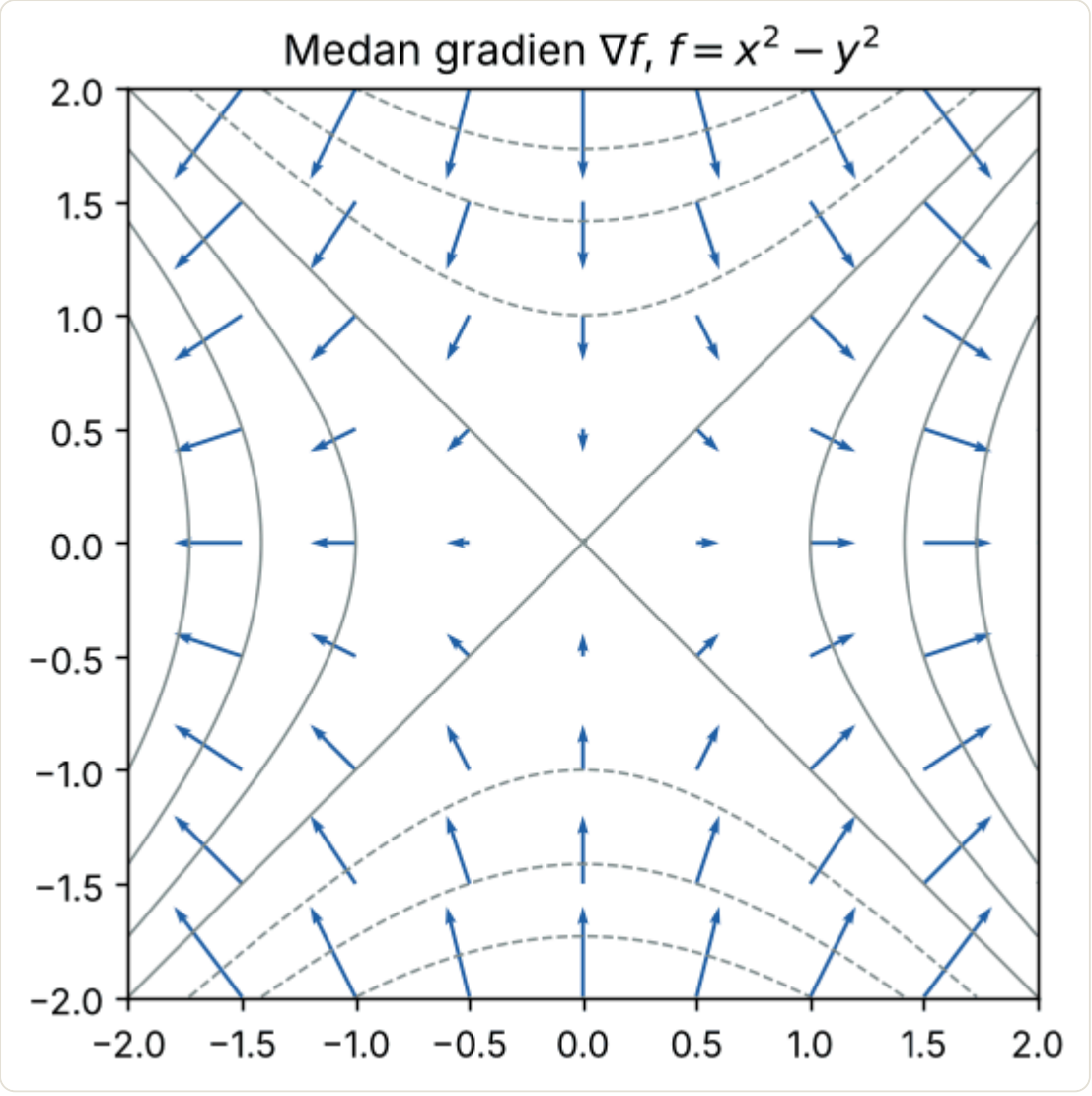
GRADIEN SEBAGAI MEDAN VEKTOR

Bila f fungsi skalar terdiferensialkan, gradiennya

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \left(\text{di ruang } \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle\right)$$

adalah medan vektor, disebut **medan gradien**. Medan $\mathbf{F}$ disebut **konservatif** bila $\mathbf{F} = \nabla f$ untuk suatu fungsi skalar f; f disebut **fungsi potensial** dari $\mathbf{F}$.

Dari 14.6, ∇f tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah f naik paling cepat. Jadi gambar medan gradien selalu "memotong tegak lurus" kontur.



$f = x^2 - y^2$: panah $\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle$ tegak lurus kurva ketinggian.

CONTOH 5 — GRADIEN

$f(x,y) = x^2y - y^3$: $\nabla f = \langle 2xy,\ x^2 - 3y^2 \rangle$. Di $(1,1)$: $\langle 2, -2 \rangle$. Medan gaya $\mathbf{F} = \langle 2xy, x^2 - 3y^2 \rangle$ dikatakan konservatif dengan potensial f.

CONTOH 6 — POTENSIAL GRAVITASI

$f(\mathbf{r}) = \dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|}$. Maka $\nabla \dfrac{1}{|\mathbf{r}|} = -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ (turunkan $(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$), jadi $\nabla f = -\dfrac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}$: medan gravitasi konservatif. Dalam fisika, energi potensial adalah $-f$.

TIDAK SEMUA MEDAN ADALAH GRADIEN

Medan putaran $\langle -y, x \rangle$ bukan gradien: bila $f_x = -y$ dan $f_y = x$ maka $f_{xy} = -1$ tetapi $f_{yx} = 1$, bertentangan dengan Clairaut (14.3). Di 16.3 kita turunkan syarat umumnya: untuk $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservatif harus $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

4. Garis aliran

Garis aliran (garis arus) medan $\mathbf{F}$ adalah kurva $\mathbf{r}(t)$ yang vektor singgungnya di setiap titik sama dengan $\mathbf{F}$: $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. Ini adalah lintasan partikel yang terbawa fluida.

CONTOH 7 — GARIS ALIRAN MEDAN PUTARAN

$\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$: $x' = -y$, $y' = x$. Maka $x'' = -y' = -x$, $x = c_1\cos t + c_2 \sin t$, $y = -x' = c_1 \sin t - c_2 \cos t$. Misalnya $x(0) = 1, y(0) = 0$: $x = \cos t, y = \sin t$, lingkaran satuan. Garis aliran adalah lingkaran berpusat di asal.

CONTOH 8 — GARIS ALIRAN MEDAN MEMANCAR

$\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$: $x' = x,\ y' = y \Rightarrow x = ae^t,\ y = be^t$: garis lurus dari titik asal ke luar, $y = \frac{b}{a}x$.

5. Kesalahan umum

- Menyamakan medan vektor dengan medan skalar. $\mathbf{F}$ mempunyai arah di setiap titik.

- Menggambar semua panah dengan panjang sebenarnya sehingga saling menutupi: normalkan atau skalakan.
- Menganggap setiap medan adalah gradien.

6. Ringkasan

- $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ atau $\langle P, Q, R \rangle$: vektor di tiap titik.
- Contoh fisika: gravitasi, listrik, kecepatan fluida, angin.
- ∇f adalah medan gradien; $\mathbf{F} = \nabla f$ konservatif dengan potensial f.
- Garis aliran: $\mathbf{r}' = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Berikutnya 16.2 Integral Garis.