Bab 15 · Integral Ganda

15.9 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Bola

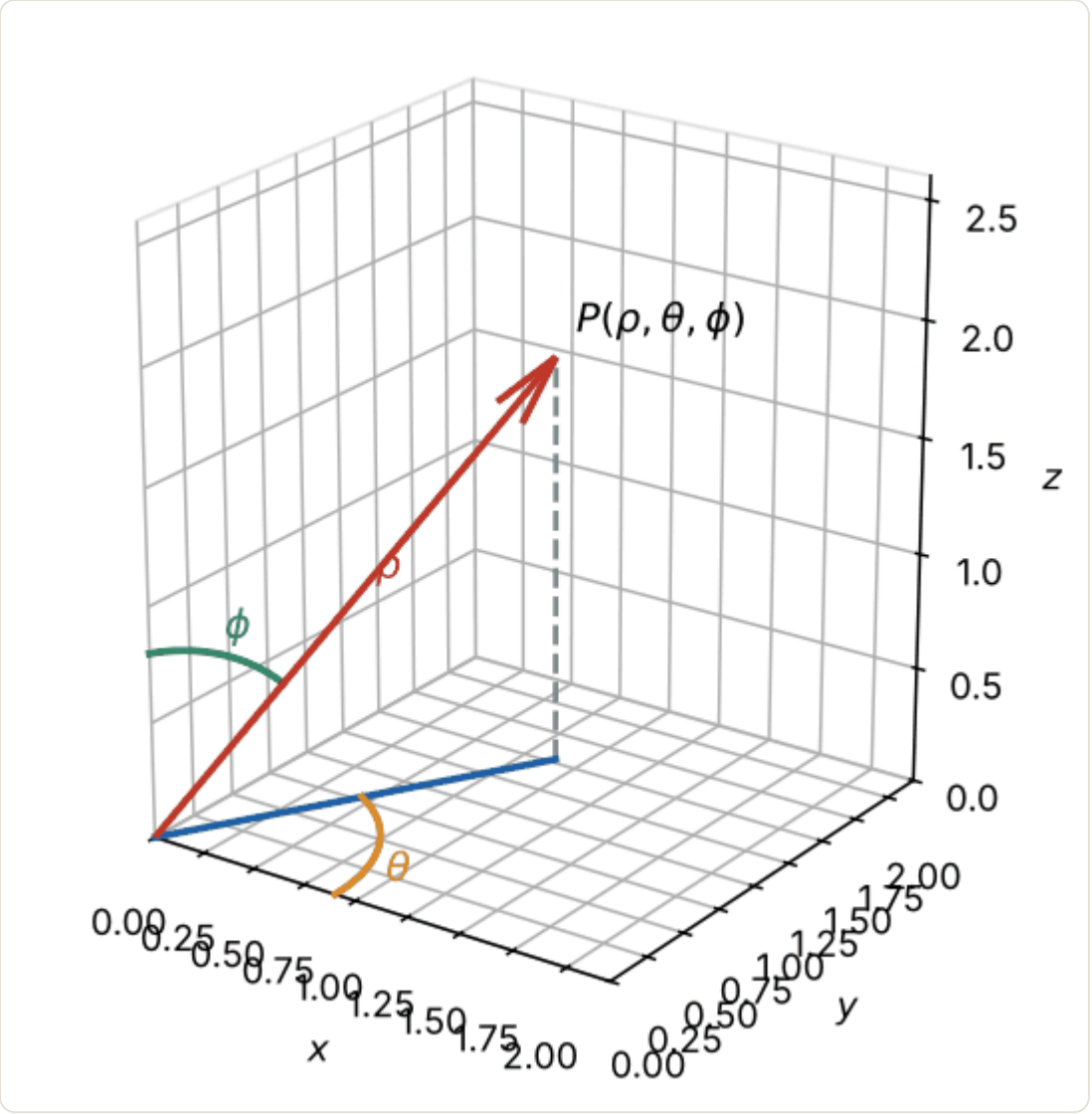
Untuk padatan yang simetris terhadap sebuah titik (bola, kerucut berpusat di titik asal, bagian bola), **koordinat bola** adalah pilihan terbaik.

1. Koordinat bola

DEFINISI

Titik P dinyatakan oleh (ρ, θ, ϕ):

- $\rho = |OP| \geq 0$: jarak dari titik asal,
- θ: sudut azimut, sama seperti pada koordinat tabung (diukur dari sumbu x positif di bidang xy),
- $\phi \in [0, \pi]$: sudut antara sumbu z positif dan ruas garis OP.



Koordinat bola (ρ, θ, ϕ).

KONVERSI

Dari segitiga siku-siku OPQ dengan Q proyeksi P di bidang xy: $|OQ| = r = \rho \sin\phi$ dan $z = \rho\cos\phi$. Maka

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Permukaan: $\rho = c$ bola berpusat di asal; $\theta = c$ setengah bidang vertikal; $\phi = c$ kerucut (setengah kerucut) dengan puncak di asal; $\phi = \frac{\pi}{2}$ bidang xy.

CONTOH 1 — KONVERSI TITIK

- $(\rho, \theta, \phi) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$: $x = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.
- Titik $(0, 2, -2)$: $\rho = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$, $\cos\phi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

CONTOH 2 — PERSAMAAN PERMUKAAN

- $z = \sqrt{x^2+y^2}$: $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ (kerucut).
- $x^2+y^2+z^2 = 2z$: $\rho^2 = 2\rho\cos\phi \Rightarrow \rho = 2\cos\phi$, bola $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.
- $x^2+y^2 = 1$: $\rho\sin\phi = 1$, silinder (kurang cocok di koordinat bola).

2. Elemen volume

Potongan kecil padatan dibatasi ρ sampai $\rho+\Delta\rho$, ϕ sampai $\phi+\Delta\phi$, θ sampai $\theta+\Delta\theta$. Ia hampir berupa balok dengan rusuk: $\Delta\rho$ (arah radial), $\rho\Delta\phi$ (busur lingkaran besar), dan $\rho\sin\phi\,\Delta\theta$ (busur sejajar bidang xy, jari-jari $\rho\sin\phi$). Volume $\approx \rho^2\sin\phi\,\Delta\rho\Delta\phi\Delta\theta$.

INTEGRAL RANGKAP TIGA DALAM KOORDINAT BOLA

$$\iiint_E f\,dV = \int_\alpha^\beta \int_c^d \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

untuk $E = \{a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ c \le \phi \le d\}$ ("baji bola"). $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.

3. Contoh

CONTOH 3 — VOLUME BOLA

$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

CONTOH 4 — EKSPONENSIAL

$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, B bola satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{3}(e-1) = \frac{4\pi}{3}(e-1) \approx 7{,}198$.

CONTOH 5 — KERUCUT ES KRIM

Padatan di dalam bola $\rho \le 2$ dan di atas kerucut $\phi = \frac{\pi}{4}$ (yaitu $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{2}) \approx 4{,}907$. Sama dengan hasil 15.8 Contoh 6, tetapi jauh lebih singkat. Rumus umum untuk bola jari-jari a dengan sudut setengah puncak ϕ_0: $V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$.

CONTOH 6 — ANTARA DUA BOLA

Padatan $1 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$: $V = 2\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{8-1}{3} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}33$.

CONTOH 7 — BELAHAN BOLA

$\iiint_H z \, dV$, H belahan bola atas jari-jari a: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}$. Volume $H = \frac{2}{3}\pi a^3$. Maka $\bar{z} = \dfrac{\pi a^4/4}{2\pi a^3/3} = \dfrac{3a}{8}$: pusat massa belahan bola homogen berada di $\frac{3}{8}a$ di atas pusatnya.

CONTOH 8 — MOMEN INERSIA BOLA

Bola padat homogen (kerapatan ρ_0, massa $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$): $I_z = \rho_0 \iiint (x^2 + y^2)\, dV = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \rho_0 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi\rho_0 a^5}{15} = \frac{2}{5}ma^2$. (Gunakan $\int_0^{\pi} \sin^3\phi \, d\phi = \frac{4}{3}$.)

CONTOH 9 — JARAK RATA-RATA DARI PUSAT

Jarak rata-rata titik di dalam bola jari-jari a dari pusatnya: $\dfrac{\iiint \rho \, dV}{V} = \dfrac{4\pi \cdot a^4/4}{4\pi a^3/3} = \frac{3}{4}a$ (lebih besar dari $\frac{a}{2}$ karena volume lebih banyak di dekat permukaan).

CONTOH 10 — BOLA YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

Bola $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$ berpersamaan $\rho \le 2\cos\phi, 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. Volume $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos\phi)^3}{3} \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4\pi}{3}$. Benar untuk bola jari-jari 1.

4. Memilih koordinat

Bentuk padatan / integran	Koordinat
Persegi panjang, tetrahedron, bidang	Kartesius
Silinder, paraboloid putar, memuat $x^2 + y^2$	Tabung
Bola, kerucut berpuncak di asal, memuat $x^2 + y^2 + z^2$	Bola

5. Kesalahan umum

- Memakai ϕ untuk sudut di bidang xy dan θ untuk sudut dari sumbu z (tertukar dengan konvensi di sini).
- Lupa faktor $\rho^2 \sin\phi$ (bukan hanya ρ^2).
- ϕ berada pada $[0, \pi]$, bukan $[0, 2\pi]$.
- Lupa mengubah $z = \rho\cos\phi$ pada integran.

6. Ringkasan

- $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$.
- $dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$.
- Cocok untuk bola dan kerucut berpusat di titik asal.

Berikutnya 15.10: perubahan peubah secara umum.