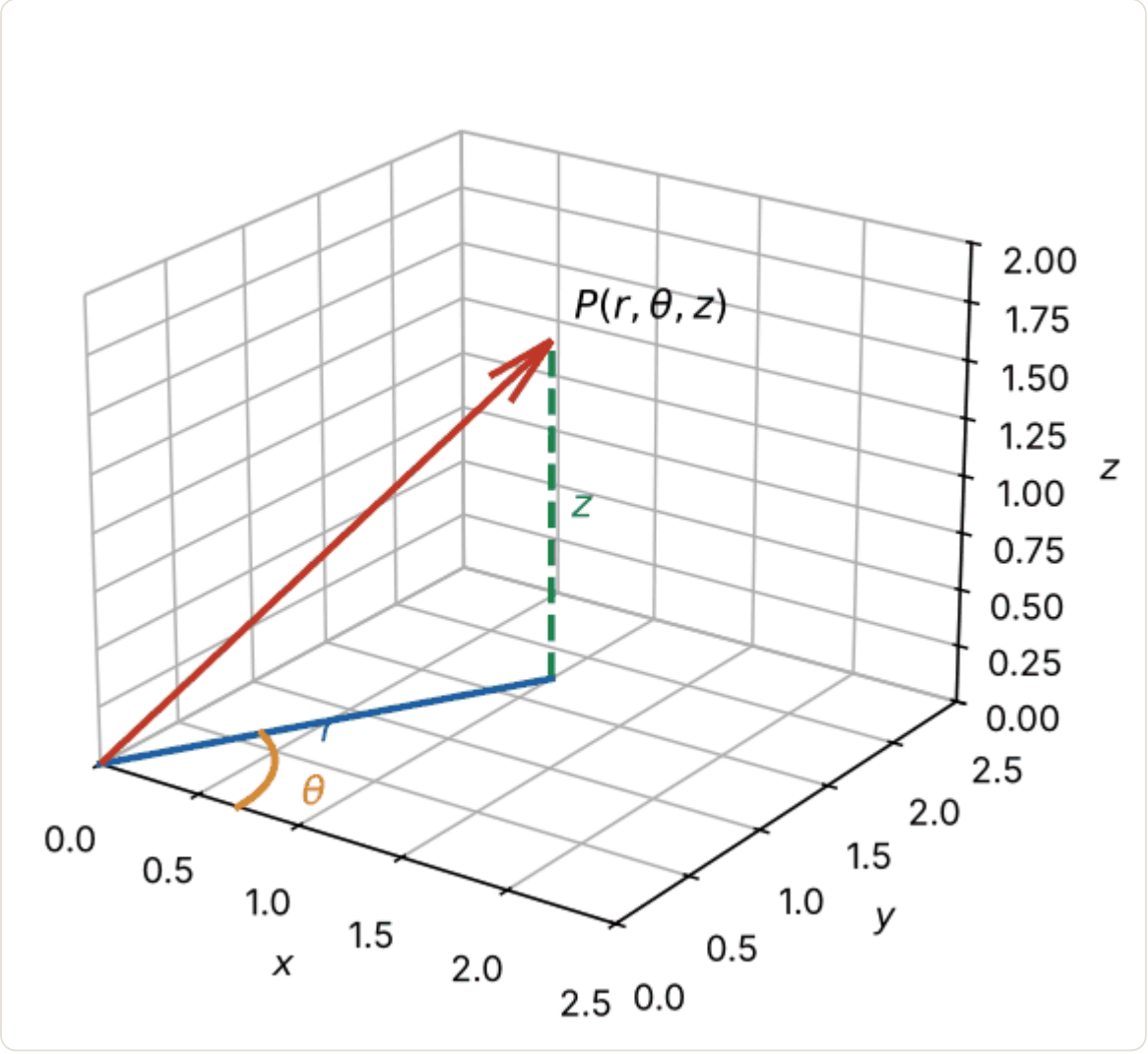
Bab 15 · Integral Ganda

15.8 Integral Rangkap Tiga dalam Koordinat Tabung

Seperti koordinat kutub memudahkan integral ganda atas cakram, **koordinat tabung** (silinder) memudahkan integral rangkap tiga atas padatan yang mempunyai sumbu simetri.

1. Koordinat tabung

Titik P di ruang dinyatakan oleh (r, θ, z): (r, θ) adalah koordinat kutub proyeksi P pada bidang xy, dan z adalah ketinggian.



Koordinat tabung (r, θ, z).

KONVERSI

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Permukaan sederhana: $r = c$ silinder, $\theta = c$ setengah bidang vertikal, $z = c$ bidang mendatar, $z = r$ kerucut, $z = r^2$ paraboloid.

CONTOH 1 — MENGUBAH KOORDINAT

- Titik tabung $(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$: $x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$, $y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$, $z = 1$: $(-1, \sqrt{3}, 1)$.
- Titik Kartesius $(3, -3, -7)$: $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\tan\theta = -1$ dan titik di kuadran IV, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (atau $\frac{7\pi}{4}$), $z = -7$.
- Persamaan $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ menjadi $r^2 + z^2 = 4$.

2. Integral rangkap tiga dalam koordinat tabung

Bila $E = \{(r, \theta, z) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ u_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \le z \le u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)\}$, maka

$$\iiint_E f\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1}^{u_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\, dz\, dr\, d\theta.$$

Elemen volume: $dV = r\, dz\, dr\, d\theta$ (elemen luas kutub $r\, dr\, d\theta$ dikalikan dz).

CONTOH 2 — VOLUME DI ANTARA PARABOLOID DAN BIDANG

Padatan di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 4$: $r^2 \le z \le 4$, $0 \le r \le 2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^4 r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^2 (4 - r^2) r\, dr = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 3 — ANTARA DUA PARABOLOID PUTAR

Padatan antara $z = r^2$ dan $z = 8 - r^2$: perpotongan $r^2 = 8 - r^2 \Rightarrow r = 2$. $V = 2\pi\int_0^2 (8 - 2r^2) r\, dr = 2\pi(16 - 8) = 16\pi \approx 50{,}27$.

CONTOH 4 — INTEGRAN DENGAN $\sqrt{X^2+Y^2}$

$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, E di dalam silinder $x^2+y^2=9$, antara $z=-2$ dan $z=5$: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{-2}^5 r\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 9\cdot 7 = 126\pi \approx 395{,}8$.

CONTOH 5 — MOMEN INERSIA SILINDER

Silinder padat jari-jari a, tinggi h, kerapatan konstan ρ, sumbu = sumbu z. $I_z = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \rho\cdot 2\pi\cdot h\cdot \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2 h)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$.

CONTOH 6 — DI DALAM BOLA DAN DI ATAS KERUCUT

Padatan E di dalam bola $x^2+y^2+z^2\le 4$ dan di atas kerucut $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$. Dalam tabung: $r\le z\le\sqrt{4-r^2}$, dan $r\le\sqrt{4-r^2}\Rightarrow r\le\sqrt{2}$. $V = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-r^2}-r\right)r\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\approx 4{,}907$.
(Bentuk "kerucut es krim"; ulangi dengan koordinat bola di 15.9.)

CONTOH 7 — PUSAT MASSA KERUCUT

Kerucut padat $r\le z\le h$, kerapatan konstan. Volume: $\int_0^{2\pi}\int_0^h\int_r^h r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^h(h-r)r\,dr = 2\pi\frac{h^3}{6} = \frac{\pi h^3}{3}$. $\iiint z\,dV = 2\pi\int_0^h\int_r^h zr\,dz\,dr = 2\pi\int_0^h\frac{h^2-r^2}{2}r\,dr = 2\pi\cdot\frac{h^4}{8} = \frac{\pi h^4}{4}$. $\bar{z} = \dfrac{\pi h^4/4}{\pi h^3/3} = \dfrac{3h}{4}$, diukur dari titik puncak (yaitu $\frac{h}{4}$ dari alas).

3. Kapan memakai koordinat tabung?

- Padatan: silinder, paraboloid putar, kerucut berporos sumbu z, padatan yang proyeksinya pada bidang xy adalah cakram atau cincin.
- Integran memuat x^2+y^2.
- Bila sumbu simetri adalah sumbu lain, tukar peran peubah (mis. $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ dan x sebagai tinggi).

4. Kesalahan umum

- Lupa faktor r.

- Salah menentukan batas r dari proyeksi: batas r harus dari proyeksi padatan pada bidang xy, bukan dari satu permukaan saja.
- Lupa mengubah $z = x^2 + y^2$ menjadi $z = r^2$, atau $x^2 + y^2 + z^2$ menjadi $r^2 + z^2$.

5. Ringkasan

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.
- Cocok untuk padatan yang berporos pada satu sumbu.
- Penerapan: volume, massa, pusat massa, momen inersia.

Berikutnya 15.9 Koordinat Bola.