Bab 15 · Integral Ganda

# 15.7 Integral Rangkap Tiga

Bila integran bergantung pada tiga peubah dan daerahnya berupa padatan di ruang, kita memakai integral rangkap tiga. Gagasannya sama dengan integral ganda dua, dengan satu dimensi tambahan.

## 1. Integral rangkap tiga atas balok

Untuk balok $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, bagi menjadi $lmn$ balok kecil $B_{ijk}$ dengan volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Pilih titik contoh dan jumlahkan:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V.$$

Bila $f$ kontinu, limit ada. Teorema Fubini berlaku: integral rangkap tiga sama dengan integral berulang dalam urutan apa pun (enam kemungkinan urutan).

**CONTOH 1 — BALOK**

$\iiint_B xyz^2\,dV$, $B = [0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$. Karena integran terpisah: $\int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-1}^{2} y\,dy \cdot \int_0^3 z^2 dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{4} = 6{,}75$.

## 2. Padatan umum

Untuk padatan terbatas $E$, integral $\iiint_E f\,dV$ didefinisikan dengan memperluas $f$ menjadi nol di luar $E$. Kita menghitungnya sebagai berikut. Pandang $E$ sebagai padatan yang terletak antara dua permukaan di atas daerah $D$ di bidang $xy$.

**PADATAN TIPE 1 (ANTARA DUA GRAFIK $Z = U_1(X,Y)$ DAN $Z = U_2(X,Y)$)**

$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$. Maka

$$\iiint_E f\,dV = \iint_D \Big[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]\,dA.$$

Bila $D$ tipe I: $D = \{a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, maka

$$\iiint_E f\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f\,dz\,dy\,dx.$$

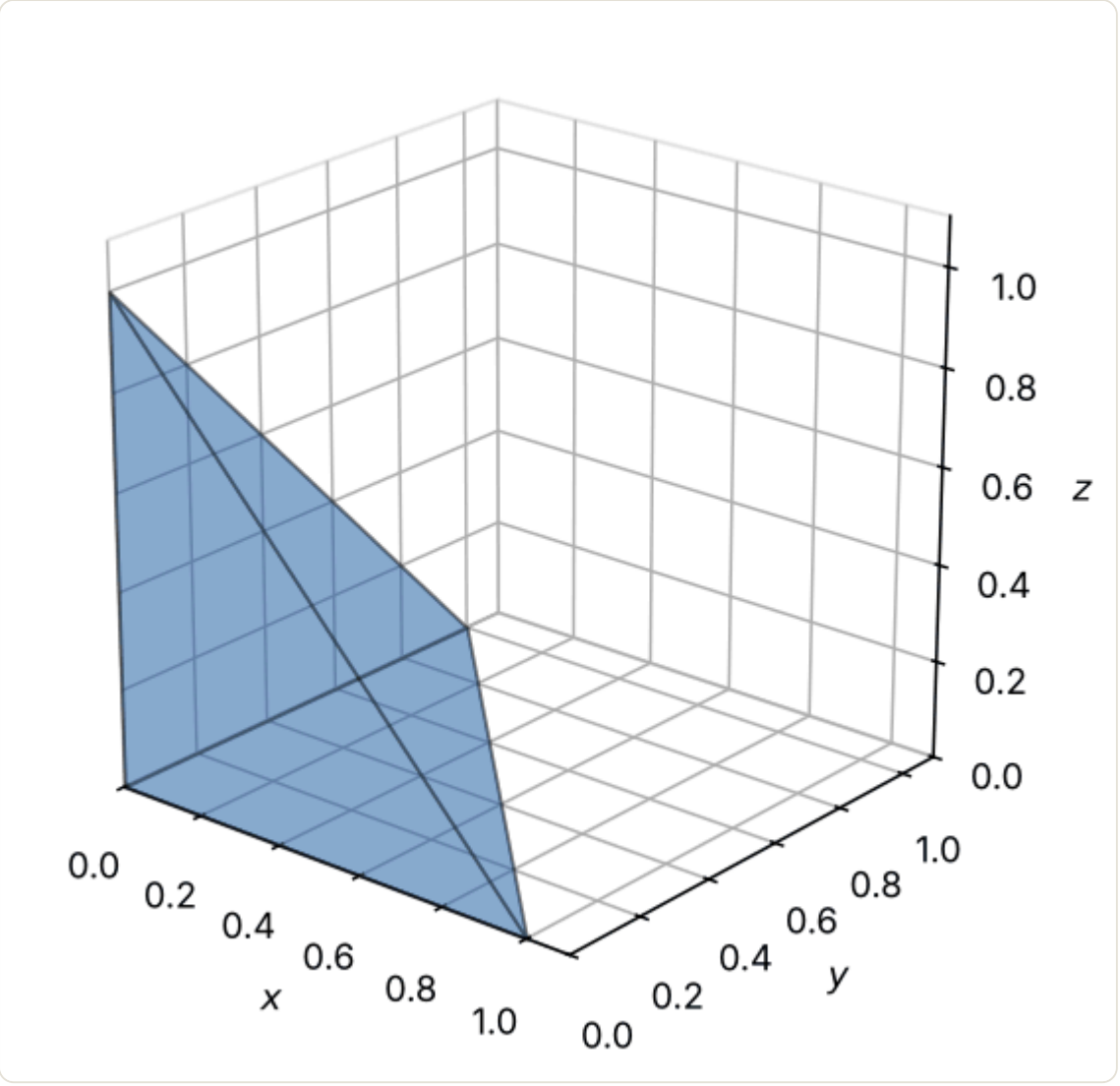
Padatan tipe 2 dan tipe 3 didefinisikan serupa dengan $D$ di bidang $yz$ atau $xz$ (batas dalam berupa $x$ atau $y$ ).

**STRATEGI**

1. Gambar $E$ dan proyeksinya $D$ pada bidang koordinat.
2. Tentukan permukaan bawah dan atas (batas integral dalam).
3. Tentukan batas $D$ (dua integral luar).
4. Hitung dari dalam ke luar.

**CONTOH 2 — TETRAHEDRON**

$E$: padatan di oktan pertama di bawah bidang $x + y + z = 1$. $D$: segitiga $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$; $0 \le z \le 1 - x - y$. Volume: $\iiint 1\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$. Dan $\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{24}$. Maka koordinat $z$ sentroid $\bar{z} = \dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$ (dan sama untuk $\bar{x}, \bar{y}$ karena simetri).



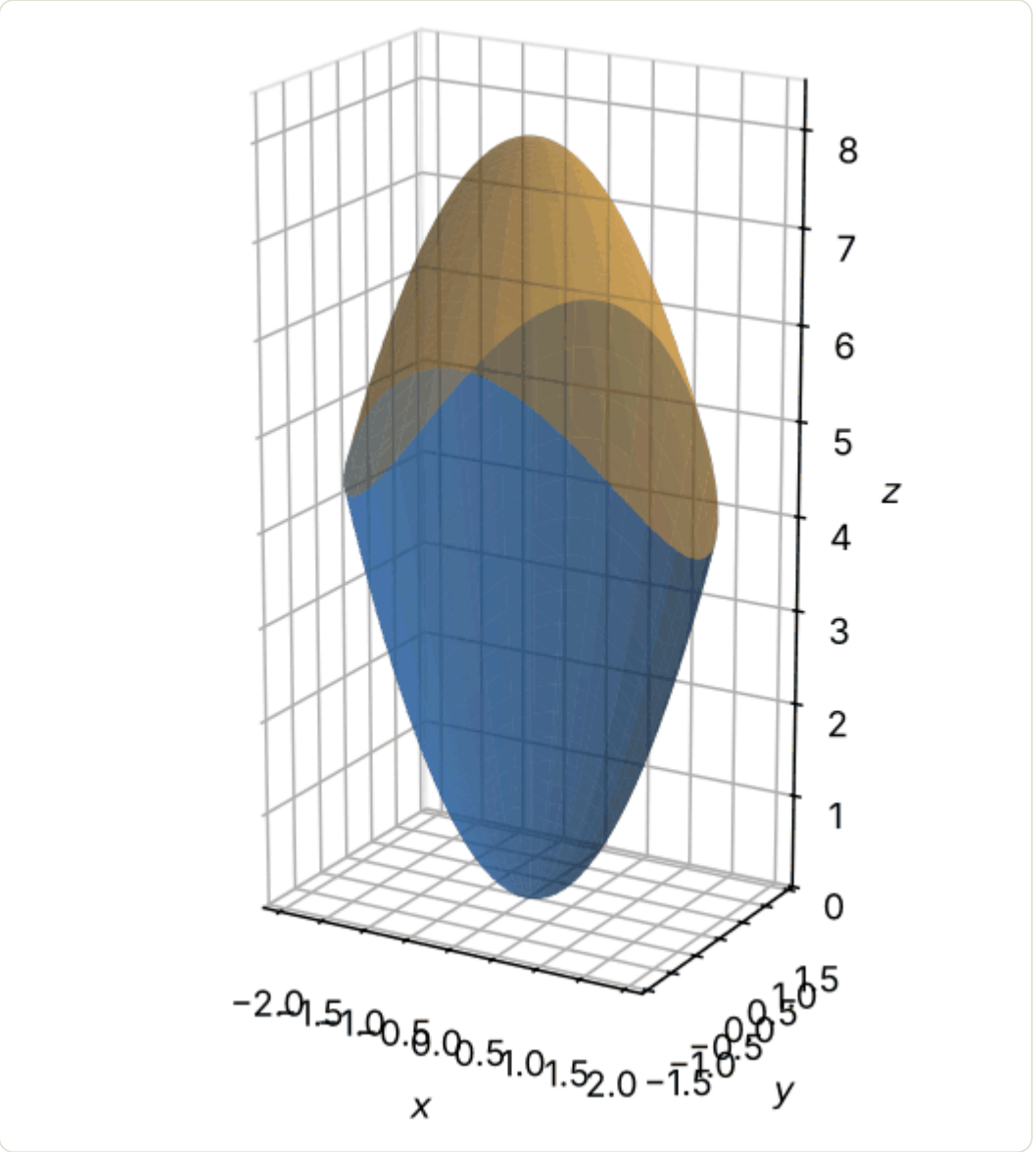

Tetrahedron dibatasi bidang koordinat dan $x + y + z = 1$.

**CONTOH 3 — TETRAHEDRON LAIN**

$\iiint_E 2x\,dV$, $E$ di oktan pertama di bawah bidang $2x + 3y + z = 6$. Proyeksi: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2 - \frac{2x}{3}$; $0 \le z \le 6 - 2x - 3y$. Integral dalam: $\int_0^{6-2x-3y} 2x\,dz = 2x(6 - 2x - 3y)$. Dengan $a = 6 - 2x$: $\int_0^{a/3}(a - 3y)\,dy = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$. Sisa: $\int_0^3 2x\dfrac{(6-2x)^2}{6}dx = \frac{4}{3}\int_0^3 x(3-x)^2 dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{4} = 9$.

**CONTOH 4 — ANTARA DUA PARABOLOID**

Volume padatan yang dibatasi $z = x^2 + 3y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas). Perpotongan: $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 4y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, elips $D$. $V = \iint_D (8 - 2x^2 - 4y^2)\,dA$. Substitusi $x = 2r\cos\theta$, $y = \sqrt{2}\,r\sin\theta$ (elips menjadi $r \le 1$), Jacobian $2\sqrt{2}\,r$ (15.10): $8 - 2x^2 - 4y^2 = 8 - 8r^2$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 8(1 - r^2)\,2\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = 16\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4} = 8\sqrt{2}\,\pi \approx 35{,}54$.




Padatan di antara $z = x^2 + 3y^2$ (biru) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (oranye).

**CONTOH 5 — MENGUBAH URUTAN**

Padatan di bawah $z = 1 - y$ dan di atas bidang $xy$, $0 \le x \le 2, y \ge 0$. $V = \int_0^2 \int_0^1 (1 - y)\, dy\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Sebagai padatan tipe 3 (proyeksi pada bidang $yz$): segitiga $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1 - y$, dan $x$ dari 0 sampai 2: $\int_0^1 \int_0^{1-y} 2\, dz\, dy = 1$.

# 3. Penerapan

**RUMUS**

Volume $V(E) = \iiint_E 1\,dV$. Nilai rata-rata $f_{\text{rata}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f\,dV$. Bila padatan mempunyai kerapatan $\rho(x,y,z)$:

$$m = \iiint_E \rho\,dV, \quad M_{yz} = \iiint x\rho\,dV,\ M_{xz} = \iiint y\rho\,dV,\ M_{xy} = \iiint z\rho\,dV,$$

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right), \qquad I_x = \iiint (y^2+z^2)\rho\,dV,\ I_y = \iiint (x^2+z^2)$$

**CONTOH 6 — MASSA DENGAN KERAPATAN VARIABEL**

Kubus $[0,1]^3$ dengan $\rho = x+y+z$: $m = 3\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy\,dz = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (karena $\iiint x = \frac{1}{2}$, sama untuk $y, z$). $M_{yz} = \iiint x(x+y+z)\,dV = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$. $\bar{x} = \dfrac{5/6}{3/2} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$; sama untuk $\bar{y}, \bar{z}$. Pusat massa bergeser ke arah sudut $(1,1,1)$, di mana kerapatan terbesar.

**CONTOH 7 — NILAI RATA-RATA**

Rata-rata $f = z$ pada tetrahedron Contoh 2: $\dfrac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$. Rata-rata $f = x$ pada kubus satuan: $\frac{1}{2}$.

**CONTOH 8 — PELUANG TIGA PEUBAH**

Kerapatan gabungan $f(x,y,z) = 6e^{-x-2y-3z}$, $x,y,z \ge 0$: $\int_0^\infty e^{-x}dx \int_0^\infty 2e^{-2y}dy \int_0^\infty 3e^{-3z}dz = 1$. $P(X\le 1, Y\le 1, Z\le 1) = (1-e^{-1})(1-e^{-2})(1-e^{-3}) \approx 0{,}632\cdot 0{,}865\cdot 0{,}950 \approx 0{,}519$.

# 4. Kesalahan umum

- Memakai batas $z$ yang salah karena tidak menggambar padatan.
- Batas integral luar tidak konstan.
- Lupa membuat $\iiint 1\,dV$ jika yang diminta volume.
- Menyamakan $\bar{x}$ dengan $M_{xz}/m$: $\bar{x}$ memakai momen terhadap bidang $yz$, $M_{yz}$.

## 5. Ringkasan

- Integral rangkap tiga $=$ integral berulang dalam tiga integral satu peubah.
- Padatan tipe 1: $(x, y) \in D, u_1 \leq z \leq u_2$.
- Volume, massa, pusat massa, momen inersia, dan peluang adalah penerapan utama.

Berikutnya 15.8: koordinat tabung.