Bab 15 · Integral Ganda

15.6 Luas Permukaan

Kita sudah dapat menghitung panjang kurva (10.2, 13.3) dan volume padatan (15.2). Sekarang giliran luas sebuah permukaan lengkung S di ruang.

1. Permukaan sebagai grafik $z = f(x, y)$

Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu pada D. Bagi D menjadi persegi panjang kecil R_{ij} berluas $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Di atas R_{ij}, permukaan kira-kira berupa jajargenjang bagian dari bidang singgung (14.4). Jajargenjang itu dibentangkan oleh vektor

$$\mathbf{a} = \langle \Delta x,\, 0,\, f_x \Delta x \rangle, \qquad \mathbf{b} = \langle 0,\, \Delta y,\, f_y \Delta y \rangle.$$

Luasnya $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Hitung $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Delta x \Delta y \, \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$, sehingga

$$\Delta S_{ij} \approx \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\; \Delta A.$$

Menjumlahkan dan mengambil limit memberi:

LUAS PERMUKAAN GRAFIK

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA.$$

(Ini analog dari $L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ untuk kurva.)

FAKTOR KEMIRINGAN

$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \dfrac{1}{\cos \gamma}$, dengan γ sudut antara bidang singgung dan bidang xy (sudut antara $\langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$ dan $\mathbf{k}$). Permukaan yang lebih miring mempunyai luas lebih besar daripada proyeksinya. Bila bidang datar, faktor sama dengan 1.

2. Contoh

CONTOH 1 — BIDANG

Bagian bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas persegi $[0,1]^2$: $f_x = -1$, $f_y = -2$, faktor $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Luas $= \sqrt{6} \cdot 1 \approx 2{,}449$. (Konstan karena kemiringan konstan.)

CONTOH 2 — PARABOLOID

Luas bagian paraboloid $z = x^2 + y^2$ di bawah bidang $z = 9$. Proyeksinya cakram $x^2 + y^2 \le 9$. $f_x = 2x$, $f_y = 2y$: $\sqrt{1 + 4r^2}$. Dengan kutub: $A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right) \approx 117{,}3$.

CONTOH 3 — BELAHAN BOLA

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$: $f_x = -\dfrac{x}{z}$, $f_y = -\dfrac{y}{z}$, $1 + f_x^2 + f_y^2 = \dfrac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2} = \dfrac{a^2}{z^2}$. Faktor $= \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^a \dfrac{a\, r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a = 2\pi a^2$. Seluruh bola: $4\pi a^2$. (Integralnya takwajar di $r = a$ tetapi konvergen.)

CONTOH 4 — KERUCUT

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ untuk $0 \le z \le h$: $f_x = \frac{x}{r}$, $f_y = \frac{y}{r}$, faktor $\sqrt{2}$. $A = \sqrt{2} \cdot \pi h^2$. Untuk $h = 3$: $9\sqrt{2}\pi \approx 39{,}99$. Cek: luas selimut kerucut $\pi r s$ dengan $r = h$, $s = h\sqrt{2}$: $\sqrt{2}\pi h^2$. Cocok.

CONTOH 5 — PELANA DI ATAS CAKRAM

$z = xy$ di atas $x^2 + y^2 \le 1$: $\sqrt{1 + y^2 + x^2}$. $A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \approx 3{,}829$ (cakram datar luas $\pi \approx 3{,}142$).

CONTOH 6 — INTEGRAL KARTESIUS

$z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$ di atas $[0,1]^2$: $f_x = \sqrt{x}$, $f_y = \sqrt{y}$. $A = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x + y}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\left[(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\right] dx = \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right) \approx 1{,}4066$.

3. Permukaan parametrik

Bila permukaan diberikan oleh $\mathbf{r}(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v)\rangle$, $(u,v) \in D$, vektor $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v$ menyinggung permukaan, dan

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA.$$

Grafik $z = f(x,y)$ adalah kasus khusus $\mathbf{r} = \langle x, y, f(x,y)\rangle$, $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \langle -f_x, -f_y, 1\rangle$.

CONTOH 7 — BOLA LEWAT PARAMETRISASI

Bola jari-jari a: $\mathbf{r}(\phi,\theta) = \langle a\sin\phi\cos\theta,\ a\sin\phi\sin\theta,\ a\cos\phi\rangle$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $\mathbf{r}_\phi = \langle a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\sin\theta, -a\sin\phi\rangle$, $\mathbf{r}_\theta = \langle -a\sin\phi\sin\theta, a\sin\phi\cos\theta, 0\rangle$. $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2\sin\phi\,\langle \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi\rangle$, panjang $a^2\sin\phi$. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi a^2$. Faktor $a^2\sin\phi$ ini akan muncul lagi di koordinat bola (15.9).

CONTOH 8 — SILINDER

Silinder $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le h$: $\mathbf{r}(\theta, z) = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, z\rangle$. $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \langle a\cos\theta, a\sin\theta, 0\rangle$, panjang a. $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} a\, dz\, d\theta = 2\pi a h$, yaitu keliling kali tinggi.

CONTOH 9 — PARABOLOID KEDUA

$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ untuk $x^2 + y^2 \le 3$: faktor $\sqrt{1+r^2}$. $A = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+r^2}\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\left(4^{3/2} - 1\right) = \frac{14\pi}{3} \approx 14{,}66$.

4. Kesalahan umum

- Memakai $\iint_D z\, dA$ atau luas D sebagai luas permukaan. Luas D hanya luas proyeksi.
- Lupa faktor r ketika berpindah ke kutub setelah membentuk $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.
- Menggunakan rumus grafik pada permukaan yang tidak berupa grafik terhadap D yang dipilih (mis. bola penuh): gunakan parametrisasi.

5. Ringkasan

- Grafik: $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dA$.

- Parametrik: $A = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$.
- Pengujian: bola $4\pi a^2$, silinder $2\pi a h$, kerucut $\pi r s$.

Berikutnya 15.7 Integral Rangkap Tiga.