Bab 15 · Integral Ganda

15.5 Penerapan Integral Ganda Dua

Integral ganda dua mengukur lebih dari volume. Dengan memilih integran yang tepat kita menghitung massa lamina, pusat massa, momen inersia, probabilitas, dan nilai harapan.

1. Kerapatan dan massa

Lamina (keping tipis) menempati daerah D di bidang dengan **rapat massa** (massa per satuan luas) $\rho(x,y)$ kontinu. Massa potongan kecil ΔA di (x,y) adalah $\approx \rho\,\Delta A$; menjumlahkan:

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA.$$

Hal yang sama berlaku untuk muatan listrik (kerapatan muatan σ): $Q = \iint_D \sigma\,dA$.

2. Momen dan pusat massa

MOMEN DAN PUSAT MASSA

Momen terhadap sumbu x dan y:

$$M_x = \iint_D y\,\rho\,dA, \qquad M_y = \iint_D x\,\rho\,dA.$$

Pusat massa $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Bila ρ konstan, pusat massa disebut **sentroid** dan hanya bergantung pada bentuk D.

CONTOH 1 — SEGITIGA DENGAN KERAPATAN $X + Y$

Lamina segitiga $D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x$, $\rho = x + y$. $m = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. $M_y = \iint x(x+y)\, dA = \frac{1}{8}$, $M_x = \frac{1}{8}$ (simetri antara x dan y). Pusat massa: $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{1/8}{1/3} = \dfrac{3}{8}$. Bandingkan sentroid segitiga $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: massa lebih terkonsentrasi menjauhi asal karena ρ naik ke arah itu.

CONTOH 2 — SETENGAH CAKRAM

Sentroid setengah cakram $D:\ x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0$ ($\rho = 1$): $A = \frac{\pi a^2}{2}$; $\bar{x} = 0$ (simetri). $M_x = \iint y\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{a} r \sin\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{a^3}{3} \cdot 2 = \frac{2a^3}{3}$. $\bar{y} = \dfrac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \dfrac{4a}{3\pi} \approx 0{,}424a$.

3. Momen inersia

Momen inersia mengukur kesulitan memutar benda. Partikel bermassa m pada jarak d dari sumbu mempunyai momen inersia md^2. Untuk lamina:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho\, dA, \qquad I_y = \iint_D x^2 \rho\, dA, \qquad I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = I_x + I_y.$$

I_0 adalah *momen inersia polar* terhadap titik asal. **Jari-jari girasi** R terhadap sumbu: $mR^2 = I$, jadi $R = \sqrt{I/m}$.

CONTOH 3 — CAKRAM HOMOGEN

Cakram $x^2 + y^2 \le a^2$, ρ konstan, massa $m = \rho\pi a^2$. $I_0 = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} m a^2$. Karena simetri, $I_x = I_y = \frac{1}{4} m a^2$. Jari-jari girasi terhadap sumbu x: $R = \frac{a}{2}$.

CONTOH 4 — MOMEN INERSIA SEGITIGA CONTOH 1

Untuk lamina Contoh 1: $I_x = \iint y^2 (x + y)\, dA = \frac{1}{15}$, $I_y = \frac{1}{15}$ (simetri), $I_0 = \frac{2}{15}$. Jari-jari girasi $R_x = \sqrt{I_x / m} = \sqrt{\frac{1/15}{1/3}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0{,}447$.

4. Probabilitas

Dua peubah acak kontinu X, Y mempunyai **fungsi kerapatan gabungan** $f(x,y) \geq 0$ dengan $\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dA = 1$. Peluang titik (X,Y) jatuh di D:

$$P\big((X,Y) \in D\big) = \iint_D f(x,y)\,dA.$$

Nilai harapan: $\mu_1 = E[X] = \iint x f\,dA$, $\mu_2 = E[Y] = \iint y f\,dA$.

CONTOH 5 — KERAPATAN POLINOMIAL

$f(x,y) = x + y$ pada $[0,1]^2$ (nol di tempat lain). Cek: $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 (x + \frac{1}{2})dx = 1$. $P(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx = \frac{1}{3}$. $E[X] = \iint x(x+y)\,dA = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}583$ (sama untuk Y).

CONTOH 6 — KERAPATAN EKSPONENSIAL

$f(x,y) = 2e^{-x-2y}$ untuk $x, y \geq 0$. Cek: $\int_0^\infty e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty 2e^{-2y}dy = 1 \cdot 1$. Karena f terpisah, X dan Y bebas. $P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty 2e^{-x-2y}dx\,dy = \int_0^\infty 2e^{-3y}dy = \frac{2}{3}$. $E[X] = 1$, $E[Y] = \frac{1}{2}$.

5. Muatan dan nilai rata-rata

CONTOH 7 — MUATAN TOTAL

Muatan terdistribusi pada cakram $x^2 + y^2 \leq 1$ dengan kerapatan $\sigma = \sqrt{x^2+y^2}$ C/m². $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}094$ C.

CONTOH 8 — SUHU RATA-RATA

Suhu $T = 100 - x^2 - y^2$ pada cakram $x^2 + y^2 \leq 4$. $\iint T\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (100 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi(200 - 4) = 392\pi$. Luas 4π. Suhu rata-rata $= \dfrac{392\pi}{4\pi} = 98$.

6. Kesalahan umum

- Lupa membagi momen dengan massa saat mencari $\bar{x}, \bar{y}$.

- Menyamakan sentroid dan pusat massa saat ρ tidak konstan.
- Menulis $I_x = \iint x^2 \rho \, dA$: momen terhadap sumbu x memakai y^2.
- Kerapatan peluang yang tidak berintegral 1.

7. Ringkasan

- $m = \iint \rho \, dA$; $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$.
- $I_x = \iint y^2 \rho$, $I_y = \iint x^2 \rho$, $I_0 = I_x + I_y$.
- Peluang $= \iint_D f \, dA$; $E[X] = \iint x f \, dA$.

Berikutnya 15.6 Luas Permukaan.