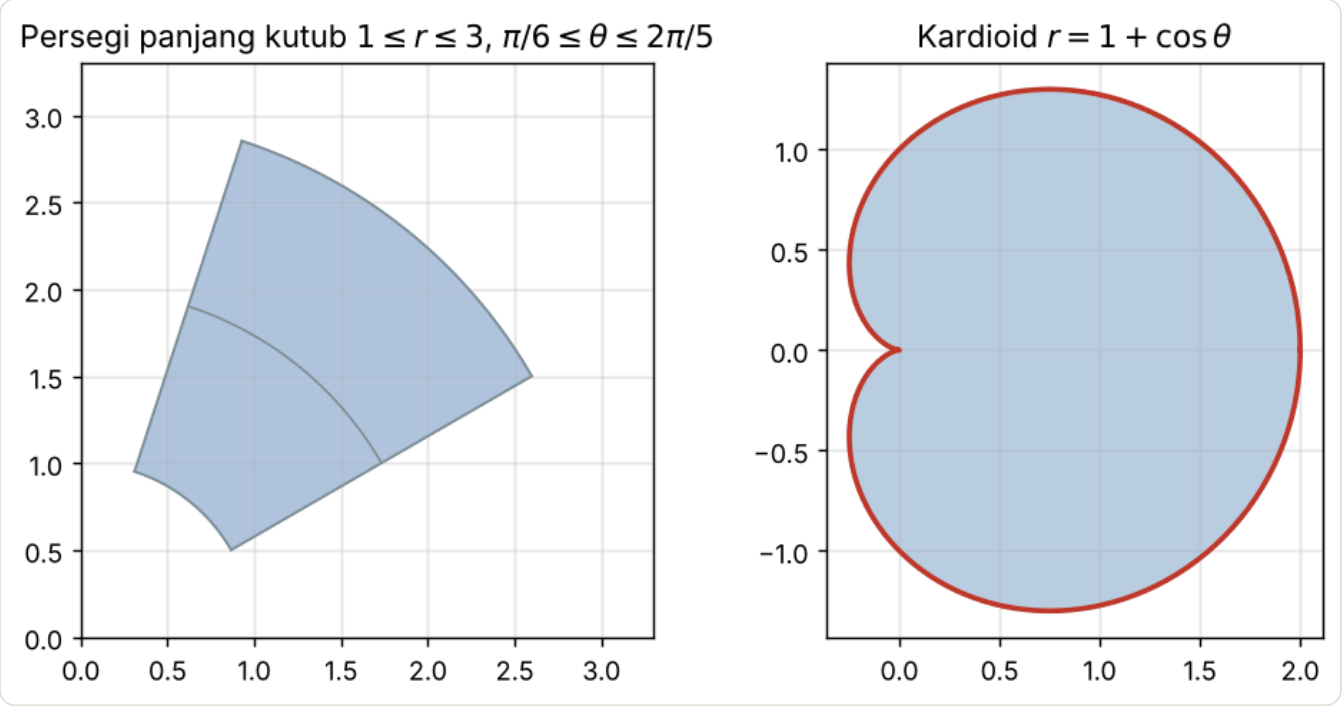
Bab 15 · Integral Ganda

15.4 Integral Ganda Dua dalam Koordinat Kutub

Bila daerah berupa lingkaran, cincin, atau juring, atau bila integran memuat $x^2 + y^2$, koordinat kutub jauh lebih cocok daripada koordinat Kartesius.

1. Persegi panjang kutub

Dalam koordinat kutub, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. **Persegi panjang kutub** adalah $R = \{(r,\theta) : a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ (dengan $0 \le a < b$, $\beta - \alpha \le 2\pi$).



Kiri: persegi panjang kutub. Kanan: daerah di dalam kardioid.

Mengapa muncul faktor r. Bagi R menjadi persegi panjang kutub kecil R_{ij} dengan lebar Δr dan sudut $\Delta\theta$. Luas sektor cincin $= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$ dengan r_i^* rata-rata jari-jari. Jadi $\Delta A_{ij} = r_i^*\Delta r\Delta\theta$: luas elemen lebih besar bila lebih jauh dari titik asal.

PERUBAHAN KE KOORDINAT KUTUB

Jika f kontinu pada persegi panjang kutub R: $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, maka

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta.$$

Bentuk $dA = r\,dr\,d\theta$. Jangan lupa faktor r.

CONTOH 1 — PARABOLOID

Volume di bawah $z = 4 - x^2 - y^2$ dan di atas bidang xy: daerah $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$.

CONTOH 2 — BELAHAN BOLA DAN KERUCUT

Belahan bola atas $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (jari-jari 3): $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{9 - r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = 18\pi$ (sesuai $\frac{2}{3}\pi \cdot 27$). Padatan di bawah kerucut $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ dan di atas bidang xy: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3 - r) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 9\pi$, sesuai rumus kerucut $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3$.

CONTOH 3 — INTEGRAN DENGAN $X^2 + Y^2$

$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, D cakram satuan: $\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2}(e - 1) = \pi(e - 1) \approx 5{,}398$. Di Kartesius integral ini tak dapat dihitung secara elementer.

2. Daerah kutub umum

DAERAH Θ-SEDERHANA

Jika $D = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$, maka

$$\iint_D f\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

Dengan $f = 1$: $A(D) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[h_2^2 - h_1^2\right] d\theta$.

CONTOH 4 — LUAS KARDIOID

$r = 1 + \cos\theta$: $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}$.

CONTOH 5 — LINGKARAN YANG TIDAK BERPUSAT DI ASAL

$\iint_D x\,dA$ dengan $D:\ x^2 + y^2 \le 2x$, yaitu $(x-1)^2 + y^2 \le 1$. Dalam kutub: $r^2 \le 2r\cos\theta \Rightarrow r \le 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi$. Cek: $\iint x\,dA = \bar{x}\cdot A = 1\cdot\pi$ (pusat massa di $x=1$, luas π).

CONTOH 6 — CINCIN

$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$ untuk $1 \le x^2+y^2 \le 9$: $\int_0^{2\pi}\int_1^3 \frac{1}{r}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$.

3. Integral Gauss

CONTOH 7 — $\int_{-\infty}^{\infty} E^{-X^2}\,DX = \sqrt{\Pi}$

Misalkan $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Maka $I^2 = \iint e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$. Jadi $I = \sqrt{\pi}$ (karena $I > 0$). Hasil ini fondasi distribusi normal dalam statistika.

4. Kapan memakai koordinat kutub?

- Daerah: lingkaran, cakram, cincin, juring, kardioid, kurva $r = f(\theta)$.
- Integran: bergantung pada $x^2 + y^2$, atau pada $y/x = \tan\theta$.
- Hindari bila daerah berbentuk persegi atau segitiga umum.

5. Kesalahan umum

- Lupa faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.

- Lupa mengubah x, y dalam integran menjadi $r\cos\theta$, $r\sin\theta$.
- Batas θ salah untuk lingkaran yang tidak berpusat di asal (mis. $r = 2\cos\theta$ hanya memakai $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- Memakai $0 \le \theta \le \pi$ untuk lingkaran penuh. Lingkaran penuh di sekitar asal perlu 2π.

6. Ringkasan

- $dA = r\,dr\,d\theta$; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
- Daerah: $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$.
- Aplikasi: volume paraboloid/bola/kerucut, integral Gauss.

Berikutnya 15.5 Penerapan Integral Ganda Dua.