Bab 15 · Integral Ganda

15.3 Integral Ganda Dua atas Daerah Umum

Daerah yang kita integrasikan jarang berupa persegi panjang. Di sini kita memperluas integral ganda ke daerah terbatas D berbentuk umum dengan menggunakan batas yang bergantung pada peubah lain.

1. Integral atas daerah umum

Untuk daerah terbatas D, kurung D dalam persegi panjang R dan definisikan $F(x,y) = f(x,y)$ bila $(x,y) \in D$ dan $F = 0$ di luar D. Maka $\iint_D f\,dA := \iint_R F\,dA$. Dalam praktik kita memakai dua jenis daerah.

DAERAH TIPE I (BATAS ATAS DAN BAWAH BERUPA FUNGSI X)

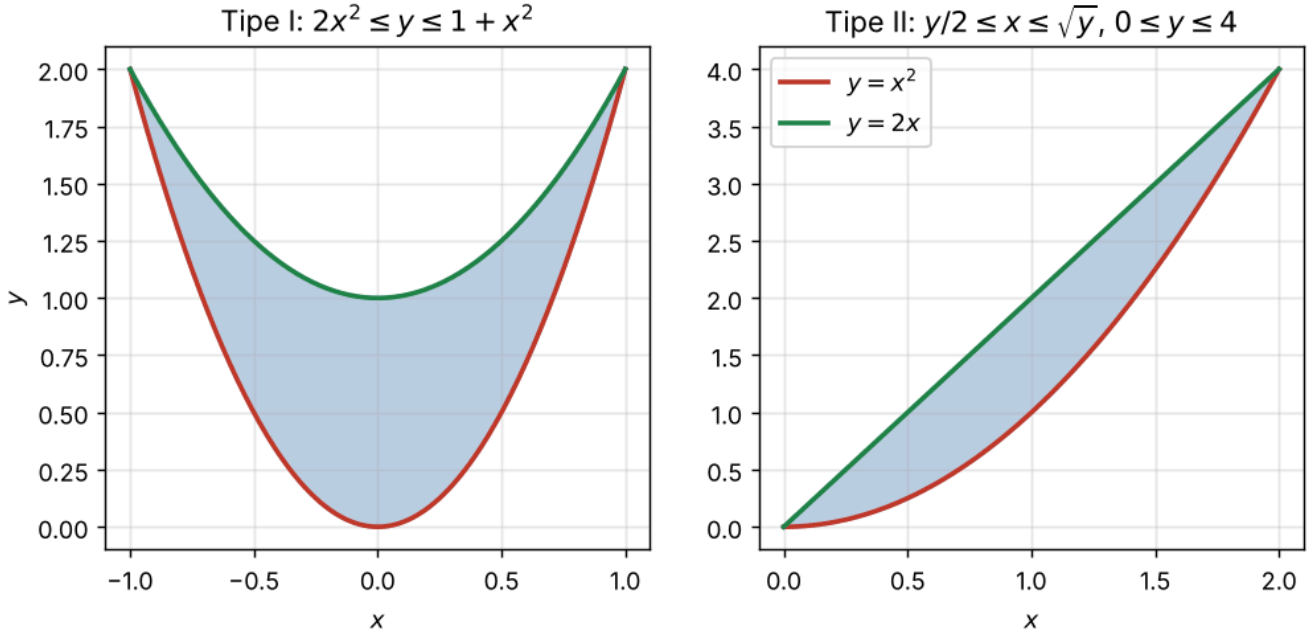
$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ dengan g_1, g_2 kontinu. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

DAERAH TIPE II (BATAS KIRI DAN KANAN BERUPA FUNGSI Y)

$D = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$. Maka

$$\iint_D f\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



Kiri: tipe I, dibatasi parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Kanan: tipe II, daerah di antara $y = x^2$ dan $y = 2x$.

CARA MENYUSUN BATAS

1. Gambar daerah D.
2. Untuk tipe I: gambar anak panah vertikal melalui D dari batas bawah ke batas atas; itulah batas y. Batas x adalah ujung kiri dan kanan seluruh daerah.
3. Untuk tipe II: anak panah horizontal; batas x dari kiri ke kanan, batas y adalah ujung bawah dan atas.

Batas integral dalam boleh memuat peubah luar; batas integral luar harus konstanta.

2. Contoh

CONTOH 1 — TIPE I

$\iint_D (x + 2y)\,dA$, D antara parabola $y = 2x^2$ dan $y = 1 + x^2$. Perpotongan: $2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$. Untuk $-1 \le x \le 1$, $2x^2 \le y \le 1 + x^2$.

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2 \Big]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + x - x^3 + 2x^2 - 3x^4\right) d$$

Suku ganjil x dan $-x^3$ saling menghapus pada selang simetris: $2\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{32}{15} \approx 2{,}133$.

CONTOH 2 — TIPE II

$\iint_D (x+y)\,dA$, D antara $y = x^2$ dan $y = 2x$ (titik potong $(0,0)$ dan $(2,4)$). Sebagai tipe II: $0 \le y \le 4$, $\frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$. Sebagai tipe I: $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 2x$: $\int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2x} dx$. Di $y = 2x$ suku dalam kurung bernilai $2x^2 + 2x^2 = 4x^2$; di $y = x^2$ bernilai $x^3 + \frac{x^4}{2}$. Jadi integralnya $\int_0^2 \left(4x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx$ dan hasilnya $\frac{32}{3} - 4 - \frac{16}{5} = \frac{160 - 60 - 48}{15} = \frac{52}{15} \approx 3{,}467$.

CONTOH 3 — DAERAH DI ANTARA $Y = X$ DAN $Y = X^2$

D: $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$. $\iint_D (x+y)\,dA = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$.

CONTOH 4 — VOLUME TETRAHEDRON

Padatan dibatasi bidang $x + 2y + z = 2$ dan bidang-bidang koordinat (oktan pertama). Alas: segitiga di bidang xy dengan $z = 0$: $x + 2y = 2$, jadi $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$. Tinggi $z = 2 - x - 2y$.

$$V = \int_0^2 \int_0^{1 - x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \left[-\tfrac{2}{3}\left(1 - \tfrac{x}{2}\right)^3\right]_0^2 = \tfrac{2}{3}.$$

Cek geometris: $V = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$ (tetrahedron dengan rusuk saling tegak lurus 2, 1, 2).

CONTOH 5 — LUAS DARI INTEGRAL GANDA

$A(D) = \iint_D 1\,dA$. Untuk daerah Contoh 1: $\int_{-1}^{1} \left[(1 + x^2) - 2x^2\right] dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Untuk daerah Contoh 2: $\int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$. Kebetulan sama.

3. Membalik urutan integrasi

Kadang integral berulang hanya dapat dihitung bila urutannya dibalik: gambar daerah dari batas yang diberikan, lalu tulis ulang sebagai tipe lain.

CONTOH 6 — ANTITURUNAN TIDAK ELEMENTER

$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$. $\int e^{y^2}\,dy$ tidak punya antiturunan elementer. Daerahnya $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$: segitiga dengan titik $(0,0), (0,1), (1,1)$. Sebagai tipe II: $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.
$\int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \approx 0{,}859$.

CONTOH 7 — PEMBALIKAN DENGAN COSINUS

$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dx\,dy$. Daerah: $0 \le y \le 2$, $y^2 \le x \le 4$, yaitu $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le \sqrt{x}$.
Balik: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^2)\Big|_0^4 = \frac{\sin 16}{4} \approx -0{,}072$.

4. Sifat tambahan

- Jika $D = D_1 \cup D_2$ dan D_1, D_2 tidak tumpang tindih kecuali di batas: $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$.
- $m\,A(D) \le \iint_D f\,dA \le M\,A(D)$ bila $m \le f \le M$.
- Nilai rata-rata: $f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(D)}\iint_D f\,dA$.

CONTOH 8 — TAKSIRAN

$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dA$ untuk D cakram $x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$ (luas $\frac{\pi}{4}$). Pada D: $0 \le \sin(x^2+y^2) \le \sin\frac{1}{4} \approx 0{,}247$. Maka $0 \le \iint \le 0{,}247 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 0{,}194$.

5. Kesalahan umum

- Batas luar yang memuat peubah. Batas luar harus konstanta.
- Tidak menggambar daerah, sehingga batas tertukar.
- Pada pembalikan urutan, lupa bahwa batas lama menjadi batas yang berbeda: gambar dulu.
- Salah tanda ketika kurva atas dan bawah tertukar (hasil luas negatif).

6. Ringkasan

- Tipe I: $a \le x \le b$, $g_1 \le y \le g_2$. Tipe II: $c \le y \le d$, $h_1 \le x \le h_2$.
- Gambar daerah, tulis batas, hitung dari dalam ke luar.

- Membalik urutan dapat menghindari antiturunan yang tak elementer.

Berikutnya 15.4: koordinat kutub.