Bab 15 · Integral Ganda

15.2 Integral Berulang

Menghitung integral ganda dari definisi limit hampir mustahil. Untungnya ada teorema yang mengubahnya menjadi dua integral satu peubah berurutan.

1. Integral parsial dan integral berulang

$\int_c^d f(x,y)\,dy$ berarti integrasi terhadap y dengan x dianggap konstan; hasilnya fungsi x. Integral hasilnya terhadap x memberi **integral berulang**:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Integral dalam dihitung lebih dulu, dari dalam ke luar.

CONTOH 1 — DUA URUTAN

$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{2}$. Dengan urutan dibalik: $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 dy = \int_1^2 9y\,dy = 9\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{2}$. Hasilnya sama.

2. Teorema Fubini

TEOREMA FUBINI

Jika f kontinu pada $R = [a,b]\times[c,d]$, maka

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Berlaku juga bila f terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus, asalkan integral berulangnya ada.)

Gagasan geometris. Untuk x tetap, $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ adalah luas irisan padatan oleh bidang yang tegak lurus sumbu x. Mengintegrasikan luas irisan sepanjang x memberi volume (prinsip Cavalieri). Mengiris pada arah lain memberi urutan lain, dengan volume yang sama.

CONTOH 2 — VOLUME NYATA

$\iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA$ dengan $R = [0,2]\times[0,2]$: $\int_0^2\int_0^2 (16-x^2-2y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[16y - x^2y - \tfrac{2}{3}y^3\right]_0^2 dx = \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \tfrac{16}{3}\right)dx = \int_0^2 \left(\tfrac{80}{3} - 2x^2\right)dx = \tfrac{160}{3} - \tfrac{16}{3} = 48.$

CONTOH 3 — PILIH URUTAN YANG MUDAH

$\iint_R ye^{xy}\,dA$, $R = [0,1]\times[0,2]$. Integrasikan lebih dulu terhadap x (karena $\int ye^{xy}dx = e^{xy}$ sederhana): $\int_0^2\int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^2 (e^y - 1)\,dy = e^2 - 3 \approx 4{,}389$. Bila dibalik, integral dalam $\int ye^{xy}dy$ memerlukan integrasi parsial dan jauh lebih rumit.

CONTOH 4 — FUNGSI TERPISAH

Bila $f(x,y) = g(x)h(y)$ dan $R = [a,b]\times[c,d]$, maka $\iint_R g(x)h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$. Misalnya $\iint_{[0,\pi/2]^2} \sin x \cos y\,dA = 1\cdot 1 = 1.$

CONTOH 5 — INTEGRASI TERHADAP X LEBIH DULU

Hitung $\iint_{[1,2]\times[0,\pi]} y\sin(xy)\,dA$. Integrasi terhadap x lebih dulu: $\int_1^2 y\sin(xy)\,dx = [-\cos(xy)]_1^2 = \cos y - \cos 2y$. Lalu $\int_0^\pi (\cos y - \cos 2y)\,dy = 0 - 0 = 0.$

3. Penerapan pada volume

CONTOH 6 — PADATAN DI BAWAH BIDANG

Volume padatan di bawah bidang $z = 4 - x - 2y$ di atas $R = [0,1]\times[0,1]$: $\int_0^1\int_0^1 (4 - x - 2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (4 - x - 1)\,dx = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}.$

CONTOH 7 — VOLUME ANTARA DUA PERMUKAAN

Volume di antara $z = x^2 + y^2$ (bawah) dan $z = 8 - x^2 - y^2$ (atas) di atas $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pada R berlaku $x^2 + y^2 \le 2$, sehingga $x^2 + y^2 \le 8 - (x^2 + y^2)$ dan urutan permukaan benar. $V = \iint_R (8 - 2x^2 - 2y^2)\, dA = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 32 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \frac{80}{3} \approx 26{,}67$. (Karena $\iint_R x^2 dA = \int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.)

4. Kesalahan umum

- Salah menaruh batas: pada $dy\, dx$, batas dalam untuk y, batas luar untuk x.
- Menjadikan x variabel saat mengintegrasikan terhadap y (atau sebaliknya).
- Menganggap faktorisasi $\iint g(x)h(y)$ bekerja pada daerah bukan persegi panjang. Pada daerah umum, batas bergantung pada peubah lain.

5. Ringkasan

- Integral berulang: hitung dari dalam ke luar, menahan peubah lain konstan.
- Fubini: untuk f kontinu pada persegi panjang, urutan tidak penting.
- Pilih urutan yang membuat integral dalam termudah.

Berikutnya 15.3: daerah yang bukan persegi panjang.