Bab 15 · Integral Ganda

15.10 Perubahan Peubah dalam Integral Ganda

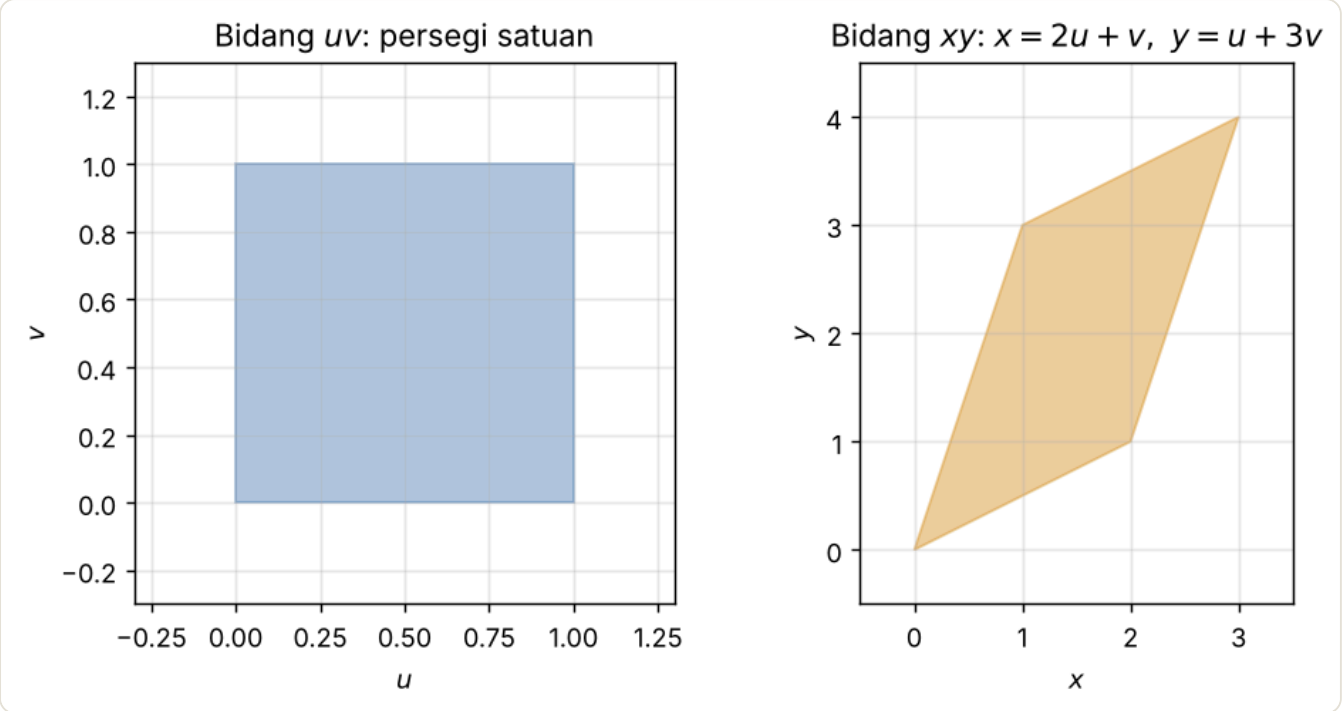
Pada integral satu peubah, substitusi $x = g(u)$ mengubah $\int f(x)\,dx$ menjadi $\int f(g(u))\,g'(u)\,du$. Koordinat kutub, tabung, dan bola adalah substitusi khusus untuk integral ganda. Subbab ini memberi aturan umumnya, dengan **Jacobian** menggantikan $g'(u)$.

1. Transformasi

Transformasi T dari bidang uv ke bidang xy: $T(u,v) = (x,y)$ dengan $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$, dengan g, h mempunyai turunan parsial kontinu. Bila T satu-satu, T memetakan daerah S di bidang uv ke daerah R di bidang xy ($R = T(S)$), dan kita dapat berpindah bolak-balik.

CONTOH 1 — TRANSFORMASI LINEAR

$T:\ x = 2u + v,\ y = u + 3v$. Persegi satuan $S = [0,1]^2$ dipetakan menjadi jajargenjang dengan titik sudut $T(0,0) = (0,0)$, $T(1,0) = (2,1)$, $T(1,1) = (3,4)$, $T(0,1) = (1,3)$. Luas jajargenjang $= |\langle 2,1\rangle \times \langle 1,3\rangle| = |6 - 1| = 5$: luas S (yaitu 1) dikalikan 5.



Persegi satuan (kiri) dipetakan ke jajargenjang berluas 5 (kanan).

2. Jacobian

DETERMINAN JACOBI

Jacobian T:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Gagasan. Persegi kecil $\Delta u \times \Delta v$ dipetakan hampir menjadi jajargenjang yang dibentangkan oleh $\mathbf{r}_u \Delta u$ dan $\mathbf{r}_v \Delta v$ (dengan $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$). Luasnya $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$. Jadi Jacobian adalah *faktor penskalaan luas* lokal.

CONTOH 2 — JACOBIAN BEBERAPA TRANSFORMASI

- Linear di Contoh 1: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$.
- Kutub $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.
  (Inilah asal faktor r di $dA = r\,dr\,d\theta$.)
- $x = au, y = bv$: Jacobian ab.
- $x = u^2 - v^2, y = 2uv$: $\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2$.

3. Rumus perubahan peubah

PERUBAHAN PEUBAH (DUA PEUBAH)

Misalkan T transformasi C^1 satu-satu dengan Jacobian tak nol, memetakan S pada R. Untuk f kontinu,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Perhatikan tanda nilai mutlak.

STRATEGI

1. Pilih u, v sehingga daerah R menjadi sederhana (mis. persegi panjang) dan/atau integran menjadi sederhana.
2. Selesaikan x, y dalam u, v dan hitung $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (atau hitung $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ dan balik: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$).
3. Tentukan batas baru di bidang uv, lalu hitung.

CONTOH 3 — JAJARGENJANG

$\iint_R xy\,dA$ dengan $R = T(S)$, $S = [0,1]^2$, T pada Contoh 1. $xy = (2u+v)(u+3v) = 2u^2 + 7uv + 3v^2$. $\iint_R xy\,dA = 5\int_0^1\int_0^1 (2u^2+7uv+3v^2)\,du\,dv = 5\left(\frac{2}{3} + \frac{7}{4} + 1\right) = 5 \cdot \frac{41}{12} = \frac{205}{12} \approx 17{,}08$.

CONTOH 4 — ELIPS

Daerah R : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$. Substitusi $x = au$, $y = bv$, $J = ab$; S: cakram $u^2 + v^2 \le 1$. Luas $= \iint_S ab\,du\,dv = \pi ab$. Juga $\iint_R x^2\,dA = a^3 b \iint_S u^2\,du\,dv = a^3 b \cdot \frac{\pi}{4}$. Untuk $a = 2, b = 1$: $\iint x^2\,dA = 2\pi$.

CONTOH 5 — DAERAH DI ANTARA HIPERBOLA DAN GARIS

Cari luas daerah R di kuadran pertama yang dibatasi $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$. Pilih $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$: R menjadi persegi $1 \le u \le 4, 1 \le v \le 4$. Hitung $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x} = 2v$. Maka $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$. Luas $= \int_1^4\int_1^4 \dfrac{1}{2v}\,dv\,du = 3 \cdot \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{3}{2}\ln 4 = 3\ln 2 \approx 2{,}079$.

CONTOH 6 — INTEGRAN YANG RUMIT

$\iint_R \exp\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dA$, R segitiga $(0,0), (1,0), (0,1)$. Misalkan $u = x + y$, $v = x - y$; maka $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$, nilai mutlak $\frac{1}{2}$. Daerah: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$ menjadi $0 \le u \le 1$, $-u \le v \le u$. $\iint = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e - e^{-1}\right)du = \dfrac{e - e^{-1}}{4} \approx 0{,}588$.

CONTOH 7 — MEMERIKSA KUTUB

$\iint_D x\,dA$ pada cakram $(x-1)^2+y^2\le 1$: geser $x=1+u, y=v$ ($J=1$): $\iint_{u^2+v^2\le 1}(1+u)\,du\,dv = \pi + 0 = \pi$, sama dengan 15.4 Contoh 5.

4. Tiga peubah

JACOBIAN TIGA PEUBAH

Untuk $T(u,v,w)=(x,y,z)$:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}, \qquad \iiint_R f\,dV = \iiint_S f\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

CONTOH 8 — KOORDINAT TABUNG DAN BOLA

- Tabung: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$: determinan $= r$ (sama dengan kutub).
- Bola: $x=\rho\sin\phi\cos\theta, y=\rho\sin\phi\sin\theta, z=\rho\cos\phi$: determinan terhadap (ρ,ϕ,θ) bernilai mutlak $\rho^2\sin\phi$, sehingga $dV=\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ (15.9).

CONTOH 9 — TRANSFORMASI LINEAR TIGA DIMENSI

$x=u+v, y=v+w, z=w+u$: $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix} = 1(1-0)-1(0-1)+0 = 2$. Kubus satuan di uvw dipetakan ke jajaran genjang tiga dimensi (parallelepiped) bervolume 2.

CONTOH 10 — VOLUME ELIPSOID

Elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$: $x=au, y=bv, z=cw$, $J=abc$, S bola satuan: $V = abc\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc$.

5. Kesalahan umum

- Lupa nilai mutlak pada Jacobian (luas tak boleh negatif).
- Memakai $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ padahal yang dibutuhkan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ (saling berkebalikan).

- Tidak mengubah batas daerah ke koordinat baru.
- Transformasi yang tidak satu-satu (mis. $u = x^2$ pada daerah yang memuat x positif dan negatif).

6. Ringkasan

- $dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$; $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$.
- Kutub: $J = r$; tabung: $J = r$; bola: $J = \rho^2 \sin\phi$.
- Pilih transformasi yang menyederhanakan daerah atau integran.

Bab 15 berakhir di sini. Bab berikutnya, 16.1, membahas medan vektor dan integral garis.