Bab 15 · Integral Ganda

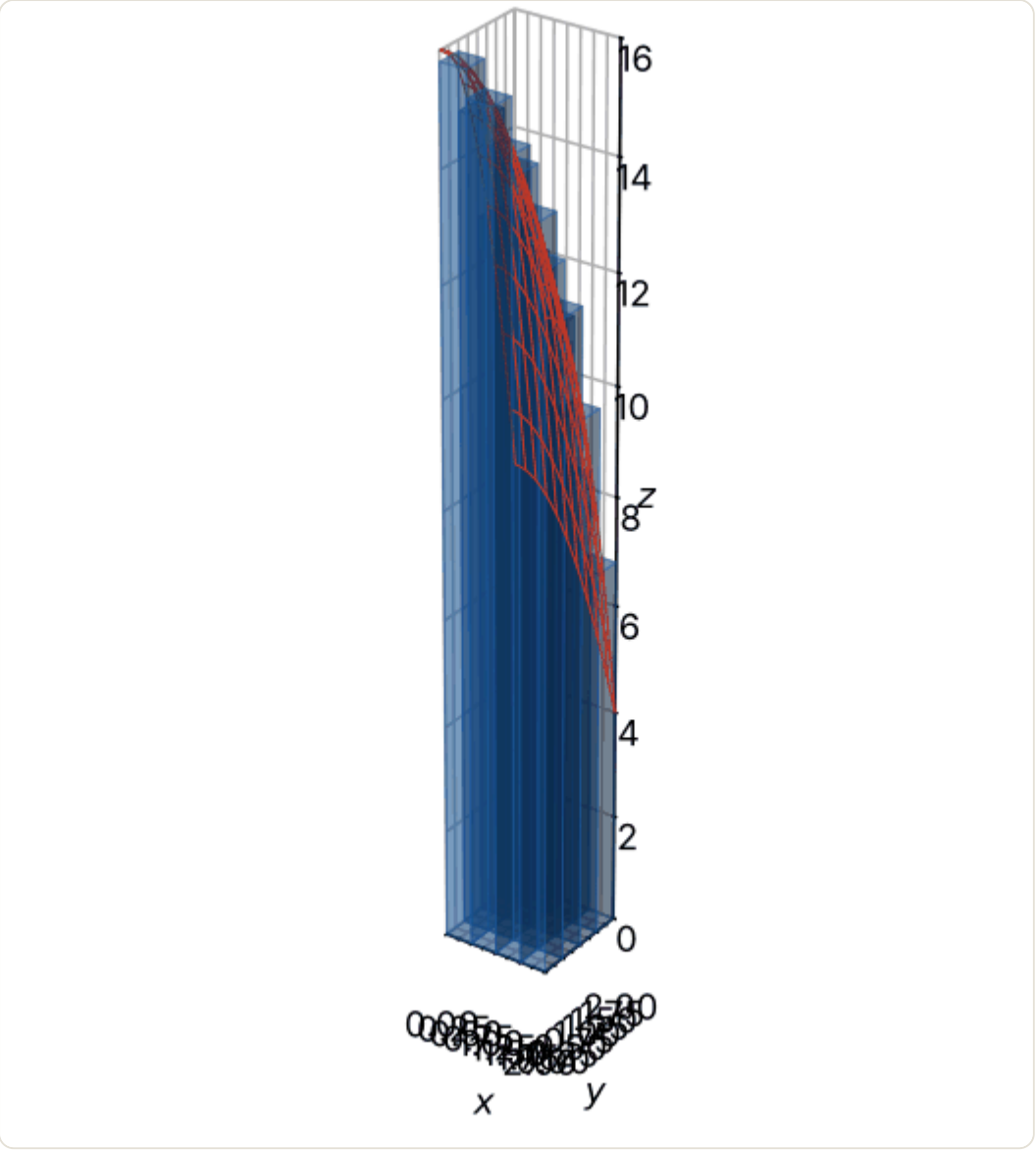
15.1 Integral Ganda Dua atas Persegi Panjang

Integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ menjumlahkan nilai f di sepanjang selang, dan mengukur luas di bawah kurva. Integral ganda dua menjumlahkan nilai $f(x,y)$ di atas sebuah daerah di bidang dan mengukur **volume** di bawah permukaan.

1. Volume dan jumlah Riemann

Misalkan $f(x,y) \geq 0$ pada persegi panjang tertutup $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Padatan S yang terletak di atas R dan di bawah grafik $z = f(x,y)$ kita hampiri sebagai berikut:

1. Bagi $[a,b]$ menjadi m selang lebar $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ dan $[c,d]$ menjadi n selang lebar $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Ini membagi R menjadi mn persegi panjang kecil R_{ij} dengan luas $\Delta A = \Delta x \Delta y$.
2. Pilih titik contoh (x_{ij}^*, y_{ij}^*) di tiap R_{ij}. Balok di atas R_{ij} berketinggian $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ mempunyai volume $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.
3. Jumlahkan: $V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$ (*jumlah Riemann ganda*).



Hampiran volume di bawah $z = 16 - x^2 - 2y^2$ dengan 4×4 balok (titik tengah).

DEFINISI INTEGRAL GANDA DUA

Integral ganda dua f atas persegi panjang R:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A,$$

bila limit ada. Bila f kontinu (atau terbatas dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga kurva mulus), limit ada dan tidak bergantung pada pilihan titik contoh. Bila $f \geq 0$, $\iint_R f\,dA$ adalah volume padatan di bawah grafik f dan di atas R.

CONTOH 1 — JUMLAH RIEMANN BEBERAPA PILIHAN

$f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ pada $R = [0,2] \times [0,2]$, $m = n = 2$ ($\Delta A = 1$).
Titik sudut kiri-bawah: $f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) = 16 + 14 + 15 + 13 = 58$.
Titik tengah $(0{,}5;0{,}5), (0{,}5;1{,}5), (1{,}5;0{,}5), (1{,}5;1{,}5)$: $15{,}25 + 11{,}25 + 13{,}25 + 9{,}25 = 49$.
Nilai sebenarnya $\iint_R f\,dA = 48$ (dihitung di 15.2). Aturan titik tengah (49) jauh lebih dekat dari sudut kiri-bawah (58), karena f turun ke arah kanan dan atas sehingga sudut kiri-bawah selalu melebih-lebihkan.

CONTOH 2 — HAMPIRAN TABEL

Curah hujan (cm) di empat titik tengah sebuah daerah 4×4 km dibagi 2×2: $1{,}2;\ 0{,}8;\ 1{,}5;\ 1{,}1$. Tiap persegi 2×2 km luasnya 4 km². Total volume air $\approx 4(1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}5 + 1{,}1) = 4(4{,}6) = 18{,}4$ km²·cm. Rata-rata curah hujan $= 18{,}4/16 = 1{,}15$ cm.

2. Nilai rata-rata

NILAI RATA-RATA

$$f_{\text{rata}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Untuk contoh di atas: $\frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

3. Sifat-sifat

- $\iint_R [f + g]\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA$.
- $\iint_R cf\,dA = c\iint_R f\,dA$.
- Bila $f \geq g$ pada R, maka $\iint_R f\,dA \geq \iint_R g\,dA$.
- Bila $R = R_1 \cup R_2$ tidak tumpang tindih (kecuali di batas), $\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$.
- $m\,A(R) \leq \iint_R f\,dA \leq M\,A(R)$ bila $m \leq f \leq M$ pada R.
- $\iint_R 1\,dA = A(R)$.

CONTOH 3 — MEMAKAI KESIMETRIAN

$\iint_R \dfrac{\sin x}{1+y^2}\,dA$ dengan $R=[-\pi,\pi]\times[0,1]$. Karena $\sin x$ fungsi ganjil terhadap x dan R simetris terhadap $x=0$, integralnya $=0$ tanpa perhitungan panjang.

CONTOH 4 — BATAS NILAI INTEGRAL

Pada $R=[0,1]\times[0,2]$, $1\le x^2+y^2+1\le 6$. Maka $2\le \iint_R (x^2+y^2+1)\,dA\le 12$ (luas $R=2$).

CONTOH 5 — VOLUME DARI GEOMETRI

$\iint_R \sqrt{1-x^2}\,dA$ dengan $R=[-1,1]\times[-2,2]$: grafik $z=\sqrt{1-x^2}$ adalah setengah silinder lingkaran jari-jari 1 sepanjang sumbu y (panjang 4). Volume $=\frac{1}{2}\pi(1)^2\cdot 4=2\pi$.

4. Kesalahan umum

- Mengartikan integral ganda sebagai luas. $\iint_R f\,dA$ adalah volume (bila $f\ge 0$); luas R adalah $\iint_R 1\,dA$.
- Menghitung jumlah Riemann tanpa mengalikan dengan ΔA.
- Mengabaikan nilai negatif: bagian di bawah bidang xy menyumbang volume bertanda negatif.

5. Ringkasan

- $\iint_R f\,dA=\lim \sum f(x_{ij}^*,y_{ij}^*)\Delta A$; volume bila $f\ge 0$.
- Aturan titik tengah memberi hampiran yang baik.
- Sifat linear, aditif, monoton; nilai rata-rata $=\frac{1}{A}\iint f\,dA$.

Berikutnya 15.2: cara menghitungnya dengan integral berulang.