Bab 14 · Turunan Parsial

14.7 Nilai Maksimum dan Minimum

Salah satu penerapan terpenting turunan: mencari nilai terbesar dan terkecil. Pada dua peubah gagasan dasarnya sama dengan satu peubah, tetapi ada satu jenis titik baru: titik pelana.

1. Definisi

MAKSIMUM DAN MINIMUM

f mempunyai **maksimum lokal** di (a, b) bila $f(x, y) \leq f(a, b)$ untuk semua (x, y) dalam suatu cakram di sekitar (a, b); $f(a, b)$ disebut nilai maksimum lokal. **Minimum lokal** didefinisikan dengan $\geq$. Bila ketaksamaan berlaku untuk semua (x, y) di daerah asal, nilainya **mutlak** (global).

TEOREMA FERMAT (DUA PEUBAH)

Jika f mempunyai maksimum atau minimum lokal di (a, b) dan turunan parsial pertamanya ada di sana, maka $f_x(a, b) = 0$ dan $f_y(a, b) = 0$.

Alasannya: fungsi satu peubah $g(x) = f(x, b)$ mempunyai ekstrem lokal di $x = a$, jadi $g'(a) = f_x(a, b) = 0$; serupa untuk f_y. Titik dengan $f_x = f_y = 0$ (atau salah satu turunan tidak ada) disebut **titik kritis**. Titik kritis hanyalah *kandidat*: tidak semuanya ekstrem.

Titik kritis yang bukan maksimum maupun minimum lokal disebut **titik pelana**: di sekitarnya f naik ke beberapa arah dan turun ke arah lain (seperti $f = x^2 - y^2$ di asal).

2. Uji turunan kedua

UJI TURUNAN KEDUA

Misalkan turunan parsial kedua f kontinu di sekitar (a, b), dengan $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Definisikan

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \text{ di } (a, b).$$

- $D > 0$ dan $f_{xx} > 0$: **minimum lokal**.
- $D > 0$ dan $f_{xx} < 0$: **maksimum lokal**.
- $D < 0$: **titik pelana**.
- $D = 0$: uji tidak memberi kesimpulan.

Gagasan. Di dekat titik kritis, f menyerupai bentuk kuadrat $\frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2)$. Bentuk ini positif untuk semua $(h, k) \neq \mathbf{0}$ tepat bila $f_{xx} > 0$ dan $D > 0$ (kriteria matriks definit positif); negatif bila $f_{xx} < 0$, $D > 0$; berganda tanda bila $D < 0$.

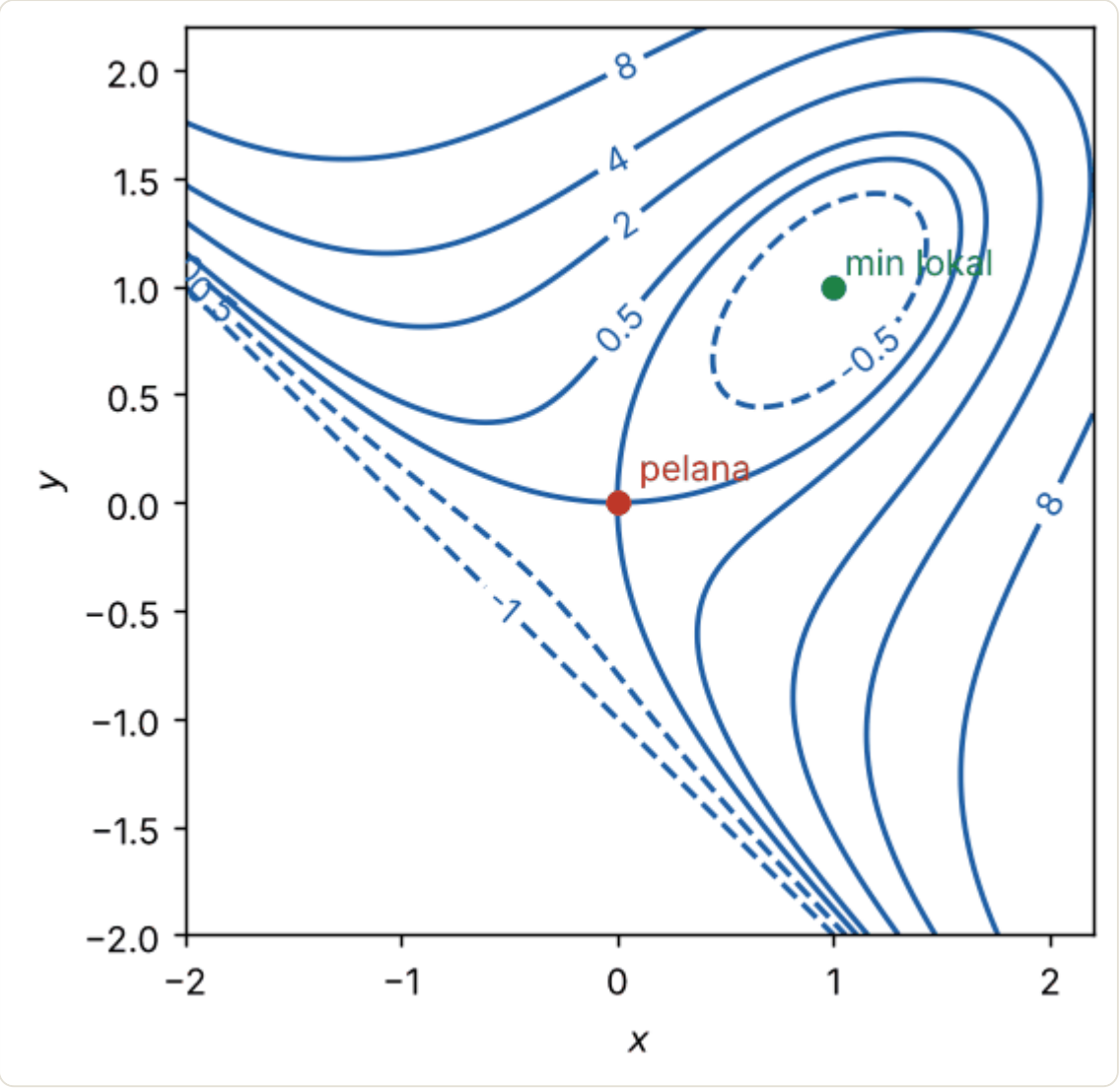
CONTOH 1 — TIGA TITIK KRITIS

$f = x^4 + y^4 - 4xy$. $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$. Dari $f_x = 0$: $y = x^3$; masukkan: $4x^9 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$. Titik kritis: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$, $D = 144x^2y^2 - 16$.

- $(0, 0)$: $D = -16 < 0$: pelana.
- $(1, 1)$: $D = 128 > 0$, $f_{xx} = 12 > 0$: minimum lokal, $f = 1 + 1 - 4 = -2$.
- $(-1, -1)$: $D = 128$, $f_{xx} = 12$: minimum lokal, $f = -2$.

CONTOH 2 — $F = X^3 + Y^3 - 3XY$

$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$; $f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, 1$. Titik: $(0, 0)$, $(1, 1)$. $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, $D = 36xy - 9$. Di $(0, 0)$: $D = -9$: pelana. Di $(1, 1)$: $D = 27 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$: minimum lokal $f = -1$.



Kontur $f = x^3 + y^3 - 3xy$: pelana di $(0, 0)$, minimum lokal di $(1, 1)$.

CONTOH 3 — $D = 0$

Untuk $f = x^4 + y^4$ di $(0, 0)$: $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$, $D = 0$: uji gagal, tetapi jelas $(0, 0)$ minimum (nilai ≥ 0). Untuk $g = x^2 + y^3$: titik kritis $(0, 0)$, $D = 0$; sepanjang sumbu y negatif $g < 0$, sepanjang sumbu x $g > 0$: bukan ekstrem (pelana). Kesimpulannya, saat $D = 0$ perlu analisis langsung.

CONTOH 4 — JARAK TITIK KE BIDANG

Cari titik pada bidang $x + 2y + z = 4$ yang terdekat dengan $(1, 0, -2)$. Substitusi $z = 4 - x - 2y$: $d^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$. $\partial_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14$; $\partial_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24$. Selesaikan: $x + y = \frac{7}{2}$, $4x + 10y = 24 \Rightarrow 6y = 10$, $y = \frac{5}{3}$, $x = \frac{11}{6}$, $z = -\frac{7}{6}$. $d^2 = \frac{25}{36} + \frac{100}{36} + \frac{25}{36} = \frac{150}{36}$, $d = \frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}041$, sama dengan $\frac{|1+0-2-4|}{\sqrt{6}}$ (12.5). Bentuk d^2 merupakan paraboloid terbuka ke atas, jadi titik kritis adalah minimum global.

CONTOH 5 — KOTAK TANPA TUTUP

Kotak persegi panjang tanpa tutup bervolume 32 m³: minimalkan luas bahan $A = xy + 2xz + 2yz$ dengan $z = \frac{32}{xy}$: $A = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$. $A_x = y - \frac{64}{x^2} = 0$, $A_y = x - \frac{64}{y^2} = 0 \Rightarrow x = y = 4$, $z = 2$, $A = 16 + 16 + 16 = 48$ m². $A_{xx} = \frac{128}{x^3} = 2 > 0$, $A_{xy} = 1$, $D = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$: minimum. Alas persegi, tinggi setengah sisi alas.

3. Nilai ekstrem mutlak pada daerah tertutup

TEOREMA NILAI EKSTREM

Jika f kontinu pada himpunan $D \subset \mathbb{R}^2$ yang tertutup dan terbatas, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak di D.

Metode (tiga langkah).

1. Cari nilai f di titik kritis di bagian dalam D.
2. Cari nilai ekstrem f pada batas D (kurangi ke fungsi satu peubah, atau pakai Lagrange, 14.8).
3. Nilai terbesar dan terkecil di antara semuanya adalah maksimum dan minimum mutlak.

CONTOH 6 — PERSEGI PANJANG

$f = x^3 - 3x + y^2$ pada $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.
Dalam: $f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, $f_y = 2y = 0$: $f(1, 0) = -2$, $f(-1, 0) = 2$.
Sisi $y = \pm 1$: $g(x) = x^3 - 3x + 1$, $g' = 0$ di $x = \pm 1$: $g(1) = -1$, $g(-1) = 3$; ujung $g(2) = 3$, $g(-2) = -1$.
Sisi $x = 2$: $2 + y^2 \in [2, 3]$; sisi $x = -2$: $-2 + y^2 \in [-2, -1]$.
Nilai-nilai kandidat: $-2,\ 2,\ -1,\ 3,\ -2,\ -1$. Maksimum mutlak 3 (di $(-1, \pm 1)$ dan $(2, \pm 1)$); minimum mutlak -2 (di $(1, 0)$ dan $(-2, 0)$).

CONTOH 7 — SEGITIGA

$f = x^2 + y^2 - 2x$ pada segitiga $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Dalam: $f_x = 2x - 2 = 0$, $f_y = 2y = 0 \Rightarrow (1, 0)$, yang berada di batas (sisi bawah). Sisi $y = 0$, $0 \le x \le 2$: $x^2 - 2x \in [-1, 0]$, min -1 di $x = 1$. Sisi $x = 0$, $0 \le y \le 2$: $y^2 \in [0, 4]$. Sisi miring $y = 2 - x$: $x^2 + (2 - x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$, minimum di $x = \frac{3}{2}$: $2 \cdot \frac{9}{4} - 9 + 4 = -\frac{1}{2}$; ujung: $x = 0$: 4; $x = 2$: 0. Maksimum mutlak 4 di $(0, 2)$; minimum mutlak -1 di $(1, 0)$.

4. Kesalahan umum

- Menganggap setiap titik kritis adalah ekstrem; pelana adalah kemungkinan ketiga.
- Lupa memeriksa batas pada daerah tertutup.
- Memakai uji turunan kedua saat $D = 0$.
- Salah tanda: $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, bukan $f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2$.

5. Ringkasan

- Ekstrem lokal $\Rightarrow f_x = f_y = 0$ (titik kritis).
- $D > 0$, $f_{xx} > 0$: min; $D > 0$, $f_{xx} < 0$: maks; $D < 0$: pelana.
- Pada daerah tertutup terbatas: bandingkan titik kritis dan nilai pada batas.

Berikutnya 14.8 Pengali Lagrange.