Bab 14 · Turunan Parsial

# 14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien

$f_x$ dan $f_y$ mengukur laju perubahan ke arah sumbu. Bagaimana bila kita bergerak ke arah lain? Jawabannya adalah **turunan berarah**, dan jawabannya dihitung dengan sebuah vektor yang sangat penting: **gradien**.

## 1. Turunan berarah

**DEFINISI**

Turunan berarah $f$ di $(a,b)$ pada arah vektor satuan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1,\, b + hu_2) - f(a,b)}{h}.$$

Ia adalah laju perubahan $f$ per satuan jarak bila kita bergerak dari $(a,b)$ ke arah $\mathbf{u}$. Dengan $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ diperoleh $f_x$; dengan $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ diperoleh $f_y$.

**TEOREMA**

Bila $f$ terdiferensialkan, maka $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\,u_1 + f_y(x,y)\,u_2$.

**Bukti.** Definisikan $g(h) = f(a + hu_1, b + hu_2)$. Maka $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = g'(0)$. Aturan rantai (14.5) memberi $g'(h) = f_x\,u_1 + f_y\,u_2$ dihitung di $(a + hu_1, b + hu_2)$; di $h = 0$ diperoleh rumus. $\blacksquare$

Bila $\mathbf{u}$ membentuk sudut $\theta$ dengan sumbu $x$ positif, $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ dan $D_{\mathbf{u}} f = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$.

## 2. Vektor gradien

**GRADIEN**

$$\nabla f = \langle f_x,\, f_y \rangle = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j}, \qquad \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle \text{ (tiga peubah).}$$

Maka $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.

**CONTOH 1 — TURUNAN BERARAH**

$f(x,y) = x^2y^3 - 4y$, titik $(2,1)$, arah $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ (sudut $30°$). $f_x = 2xy^3 = 4$, $f_y = 3x^2y^2 - 4 = 8$; $\nabla f(2,1) = \langle 4, 8 \rangle$. $D_{\mathbf{u}} f = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 4 \approx 7{,}464$.

**CONTOH 2 — ARAH BUKAN SATUAN**

Arah yang diberikan sebagai vektor $\mathbf{v} = \langle 3, -4 \rangle$ harus dinormalkan: $\mathbf{u} = \frac{1}{5}\langle 3, -4 \rangle$. Untuk $f$ di Contoh 1: $D_{\mathbf{u}} f = \frac{1}{5}(4 \cdot 3 + 8 \cdot (-4)) = \frac{12 - 32}{5} = -4$. Turun 4 per satuan jarak ke arah itu.

**CONTOH 3 — TIGA PEUBAH**

$f(x,y,z) = x \sin(yz)$ di $(1,3,0)$ ke arah $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$. $\nabla f = \langle \sin yz,\ xz\cos yz,\ xy\cos yz \rangle$, di titik: $\langle 0, 0, 3 \rangle$. $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\sqrt{6}$. $D_{\mathbf{u}} f = \dfrac{3(-1)}{\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{\sqrt{6}} \approx -1{,}225$.

## 3. Arah pertumbuhan tercepat

**TEOREMA**

Misalkan $f$ terdiferensialkan dan $\nabla f \neq \mathbf{0}$. Nilai maksimum $D_{\mathbf{u}} f$ adalah $|\nabla f|$, dicapai bila $\mathbf{u}$ searah $\nabla f$. Nilai minimum $-|\nabla f|$ dicapai pada arah $-\nabla f$. Pada arah tegak lurus $\nabla f$, $D_{\mathbf{u}} f = 0$.

**Bukti.** $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$, dengan $\theta$ sudut antara $\nabla f$ dan $\mathbf{u}$. Nilai maksimum $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$), minimum $-1$ ($\theta = \pi$), nol di $\theta = \pi/2$. ■

**CONTOH 4 — ARAH TERCEPAT**

Untuk $f$ di Contoh 1 di $(2,1)$: laju kenaikan maksimum $|\langle 4, 8 \rangle| = \sqrt{80} \approx 8{,}944$ pada arah $\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Laju turun paling cepat $-8{,}944$ ke arah $-\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, 2 \rangle$. Perubahan nol pada arah $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle$ (garis singgung kurva ketinggian).

**CONTOH 5 — PENDAKI DI BUKIT**

Tinggi bukit $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$ (meter). Di $(60, 40)$: $\nabla z = \langle -0{,}01x, -0{,}02y\rangle = \langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$, $|\nabla z| = 1$. Tanjakan paling curam: arah $\langle -0{,}6, -0{,}8\rangle$ dengan kemiringan 1 (sudut $45^\circ$). Bila pendaki berjalan ke arah $\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 1\rangle$: $D_{\mathbf{u}} z = \dfrac{-0{,}6 - 0{,}8}{\sqrt{2}} \approx -0{,}99$, turun hampir 1 meter per meter. Untuk berjalan mendatar ia harus mengikuti arah $\pm\langle 0{,}8, -0{,}6\rangle$.

**CONTOH 6 — SUHU DAN SEMUT**

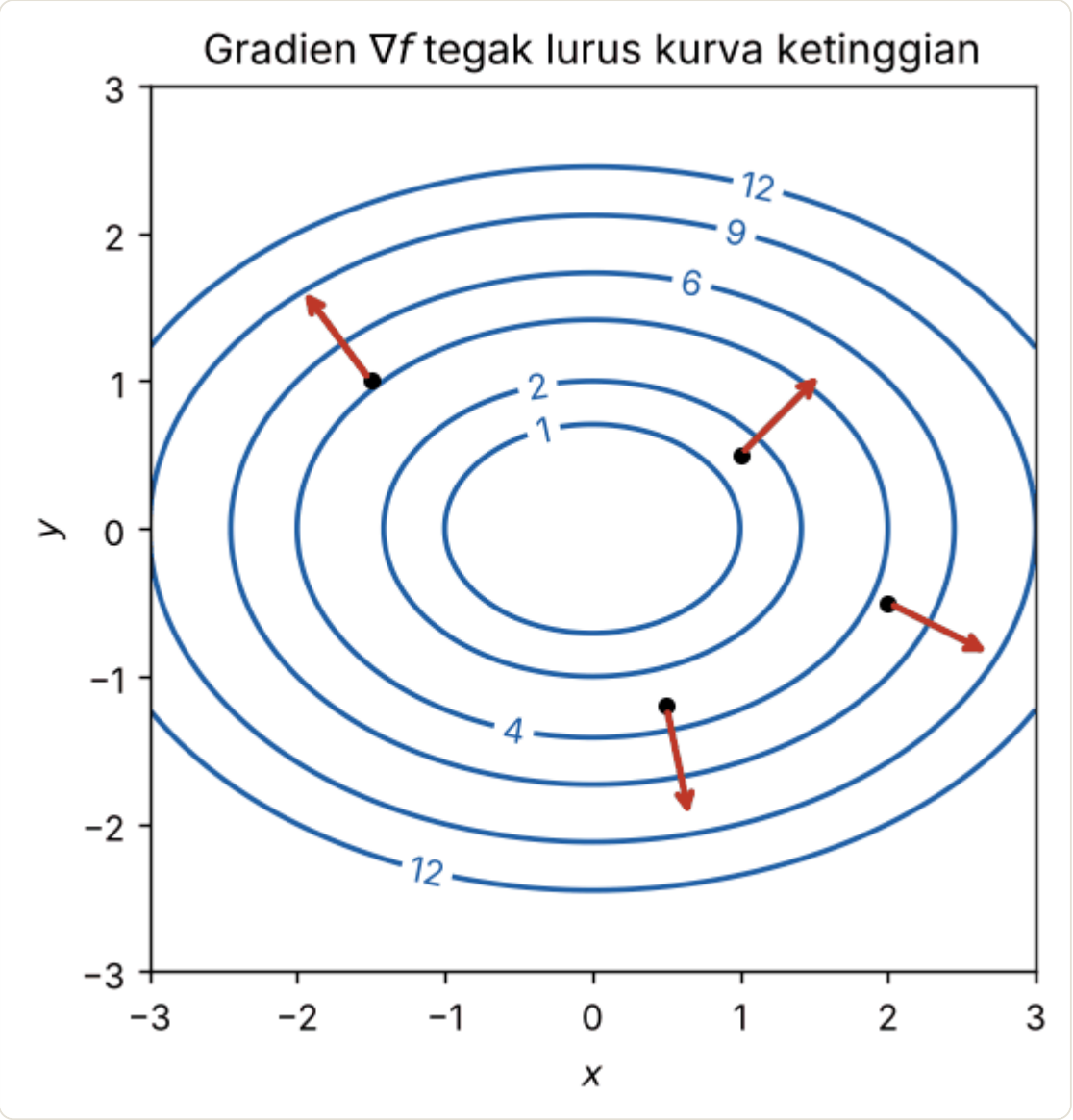
Suhu $T = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ di $(1, 1)$: $\nabla T = \langle -12{,}5, -25\rangle$. Semut yang ingin menghangat secepat mungkin bergerak ke arah $\nabla T \propto \langle -1, -2\rangle$ (menuju asal, tempat panas); yang ingin mendingin bergerak ke $\langle 1, 2\rangle$. Laju maksimum $|\nabla T| = \sqrt{12{,}5^2 + 25^2} \approx 27{,}95$ derajat per satuan jarak.

## 4. Gradien tegak lurus kurva ketinggian

**TEOREMA**

Di setiap titik $P$ pada kurva ketinggian $f(x, y) = k$ (atau permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$), vektor $\nabla f(P)$ tegak lurus garis singgung (atau bidang singgung) kurva (permukaan) tersebut di $P$.

**Bukti (kurva).** Misalkan $\mathbf{r}(t)$ parametrisasi kurva ketinggian. Karena $f(\mathbf{r}(t)) = k$, aturan rantai memberi $\nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, yaitu $\nabla f \perp \mathbf{r}'$, vektor singgung. Argumen sama berlaku untuk setiap kurva pada permukaan ketinggian, jadi $\nabla f$ tegak lurus semua singgung di $P$. $\blacksquare$




Gradien (panah merah) tegak lurus kurva ketinggian dan menunjuk ke arah $f$ naik.

**BIDANG SINGGUNG DAN GARIS NORMAL PERMUKAAN KETINGGIAN**

Untuk permukaan $F(x,y,z)=k$ di $P(x_0,y_0,z_0)$ dengan $\nabla F(P)\neq\mathbf{0}$:

$$F_x(P)(x-x_0)+F_y(P)(y-y_0)+F_z(P)(z-z_0)=0,$$

dan garis normal $\dfrac{x-x_0}{F_x}=\dfrac{y-y_0}{F_y}=\dfrac{z-z_0}{F_z}$.

**CONTOH 7 — ELIPSOID**

$F=\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=3$ di $(-2,1,-3)$ (periksa: $1+1+1=3$). $\nabla F=\langle\frac{x}{2},2y,\frac{2z}{9}\rangle=\langle-1,2,-\frac{2}{3}\rangle$. Bidang singgung: $-(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$. Kalikan $-3$: $3x-6y+2z=-18$. Garis normal: $\langle-2-s,\ 1+2s,\ -3-\frac{2}{3}s\rangle$.

**CONTOH 8 — GRAFIK SEBAGAI PERMUKAAN KETINGGIAN**

Grafik $z = f(x, y)$ adalah permukaan ketinggian $F = f(x, y) - z = 0$, dengan $\nabla F = \langle f_x, f_y, -1 \rangle$ normalnya, sesuai 14.4. Untuk $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $\langle 2, 2, -1 \rangle$, bidang $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$, sama dengan $z = 2x + 2y - 2$.

**CONTOH 9 — SINGGUNG KONTUR**

Kontur $x^2 + 2y^2 = 3$ di $(1, 1)$: $\nabla f = \langle 2, 4 \rangle$. Garis singgung kontur: $2(x - 1) + 4(y - 1) = 0$, yaitu $x + 2y = 3$.

## 5. Kesalahan umum

- Memakai vektor arah yang bukan satuan. Normalkan dulu.
- Mengira $|\nabla f|$ adalah laju pada arah tertentu: itu laju *maksimum*.
- Menyamakan $\nabla f$ dengan arah kurva ketinggian: ia *tegak lurus*.
- Menghitung gradien sebelum mengevaluasinya di titik yang diminta.

## 6. Ringkasan

- $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ satuan.
- Maksimum $|\nabla f|$ pada arah $\nabla f$; minimum pada $-\nabla f$; nol tegak lurus $\nabla f$.
- $\nabla f$ tegak lurus kurva/permukaan ketinggian; dipakai untuk bidang singgung dan garis normal.

Berikutnya 14.7 Nilai Maksimum dan Minimum.