Bab 14 · Turunan Parsial

14.5 Aturan Rantai

Pada satu peubah, aturan rantai berbunyi $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. Bila fungsi luar bergantung pada beberapa peubah antara yang masing-masing bergantung pada peubah lain, kita menjumlahkan lintasan perubahan.

1. Aturan rantai: satu peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 1)

Misalkan $z = f(x, y)$ terdiferensialkan, dengan $x = g(t)$, $y = h(t)$ terturunkan. Maka

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Alasan. Perubahan Δt menyebabkan Δx, Δy, dan dari keterdiferensialan (14.4) $\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$. Bagi dengan Δt dan ambil limit. Intinya: z berubah lewat dua "jalur", x dan y, dan sumbangannya dijumlahkan.

CONTOH 1 — RANTAI LANGSUNG

$z = x^2 y + 3xy^4$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t$. Di $t = 0$: $x = 0$, $y = 1$. $z_x = 2xy + 3y^4 = 3$, $z_y = x^2 + 12xy^3 = 0$, $x' = 2\cos 2t = 2$, $y' = -\sin t = 0$. $\dfrac{dz}{dt} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 6$.

CONTOH 2 — KERUCUT YANG BERUBAH

Volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Jari-jari bertambah 2 cm/s dan tinggi berkurang 3 cm/s. Pada saat $r = 10, h = 15$: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2\pi r h}{3}\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\pi r^2}{3}\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{2\pi \cdot 150}{3}(2) + \dfrac{100\pi}{3}(-3) = 200\pi - 100\pi = 100\pi \approx 314{,}2 \text{ cm}^3/\text{s}$. Volume bertambah.

CONTOH 3 — GERAK SEPANJANG KURVA

Suhu $T(x, y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ dan partikel bergerak sepanjang $x = t, y = t$. Pada $t = 1$: $T_x = -12{,}5$, $T_y = -25$ (14.3), $x' = y' = 1$. $\dfrac{dT}{dt} = -12{,}5 - 25 = -37{,}5$ derajat per satuan waktu: partikel merasakan suhu yang menurun.

2. Aturan rantai: dua peubah bebas

ATURAN RANTAI (KASUS 2)

Bila $z = f(x,y)$ dengan $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

DIAGRAM POHON

Gambarkan z di atas, cabang ke x dan y (turunan $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$), lalu dari tiap x, y cabang ke s, t. Turunan $\partial z/\partial s$ adalah jumlah hasil kali sepanjang semua lintasan dari z ke s.

CONTOH 4 — DUA PEUBAH BEBAS

$z = e^x \sin y$, $x = st^2$, $y = s^2 t$. $z_x = e^x \sin y$, $z_y = e^x \cos y$; $x_s = t^2$, $x_t = 2st$, $y_s = 2st$, $y_t = s^2$.

$$z_s = e^x \sin y\, t^2 + e^x \cos y\, 2st, \qquad z_t = e^x \sin y\, 2st + e^x \cos y\, s^2.$$

Di $s = 1, t = 2$: $x = 4$, $y = 2$; $z_s = e^4(4\sin 2 + 4\cos 2) \approx 107{,}7$ dan $z_t = e^4(4\sin 2 + \cos 2) \approx 175{,}9$.

CONTOH 5 — TIGA PEUBAH ANTARA

$w = x^2 + yz$, $x = u + v$, $y = uv$, $z = u - v$. Aturan rantai: $w_u = 2x \cdot 1 + z \cdot v + y \cdot 1$. Di $u = 1, v = 2$: $x = 3, y = 2, z = -1$: $w_u = 6 - 2 + 2 = 6$. Cek langsung: $w = (u+v)^2 + u^2 v - uv^2$, $w_u = 2(u+v) + 2uv - v^2 = 6 + 4 - 4 = 6$. Juga $w_v = 2x + zu - y = 6 - 1 - 2 = 3$.

CONTOH 6 — KOORDINAT KUTUB

Untuk $z = f(x,y)$ dengan $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $z_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$ dan $z_\theta = -f_x r\sin\theta + f_y r\cos\theta$. Dari sini diperoleh $z_r^2 + \dfrac{1}{r^2} z_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$. Untuk $f = x^2 + y^2$ (jadi $z = r^2$): $z_r = 2r$, $z_\theta = 0$, dan memang $f_x^2 + f_y^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4r^2$.

3. Aturan rantai umum

Bila u fungsi n peubah $x_1, \ldots, x_n$, dan tiap x_i fungsi m peubah $t_1, \ldots, t_m$, maka untuk setiap j:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}.$$

Hitung per lintasan dan jumlahkan.

4. Turunan implisit

TEOREMA FUNGSI IMPLISIT (BENTUK TURUNAN)

Bila $F(x, y) = 0$ mendefinisikan y sebagai fungsi terturunkan dari x dan $F_y \neq 0$, maka

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Untuk $F(x, y, z) = 0$ mendefinisikan $z = f(x, y)$, dengan $F_z \neq 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Alasan. Turunkan $F(x, y(x)) = 0$ terhadap x dengan aturan rantai: $F_x \cdot 1 + F_y \frac{dy}{dx} = 0$.

CONTOH 7 — KURVA FOLIUM

$x^3 + y^3 = 6xy$, $F = x^3 + y^3 - 6xy$: $F_x = 3x^2 - 6y$, $F_y = 3y^2 - 6x$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = \dfrac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$. Di $(3, 3)$: $\dfrac{6 - 9}{9 - 6} = -1$. Garis singgung: $y - 3 = -(x - 3)$, yaitu $x + y = 6$.

CONTOH 8 — PERMUKAAN IMPLISIT

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$: $F_x = 3x^2 - 6yz$, $F_z = 3z^2 - 6xy$. $z_x = -\dfrac{3x^2 - 6yz}{3z^2 - 6xy} = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$, sama dengan yang diperoleh di 14.3, tetapi lebih cepat. Di $(1, 2, 3)$: $z_x = \frac{11}{5}$.

CONTOH 9 — KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian $f(x,y)=k$: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$. Untuk $f=x^2+2y^2$ di $(2,1)$: $-\dfrac{4}{4}=-1$, kemiringan garis singgung kontur -1. Bandingkan dengan gradien $\langle 4,4\rangle$, yang tegak lurus arah $\langle 1,-1\rangle$ (14.6).

5. Turunan orde dua dengan aturan rantai

CONTOH 10 — RANTAI DUA KALI

Bila $z=f(x,y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, maka $\dfrac{dz}{dt}=2tf_x+3t^2f_y$. Turunkan lagi ($f_x$, f_y sendiri fungsi t): $\dfrac{d^2z}{dt^2}=2f_x+2t\big(2t\,f_{xx}+3t^2f_{xy}\big)+6tf_y+3t^2\big(2t\,f_{yx}+3t^2f_{yy}\big)$. Untuk $f=xy$ (jadi $z=t^5$): $f_x=y=t^3$, $f_y=x=t^2$, $f_{xy}=1$, $f_{xx}=f_{yy}=0$: $2t^3+2t(3t^2)+6t\cdot t^2+3t^2(2t)=2t^3+6t^3+6t^3+6t^3=20t^3$; dan memang $(t^5)''=20t^3$.

6. Kesalahan umum

- Menghilangkan salah satu lintasan (lupa suku $f_y\,dy/dt$).
- Menulis dz/dt dengan d untuk turunan parsial, atau ∂ pada turunan fungsi satu peubah.
- Pada turunan implisit, lupa tanda minus di $-F_x/F_y$.
- Lupa mengevaluasi x,y di titik sebelum mensubstitusi ke turunan parsial.

7. Ringkasan

- $\dfrac{dz}{dt}=z_x x'+z_y y'$; untuk dua peubah bebas jumlahkan lintasan.
- Diagram pohon membantu mengorganisasi lintasan.
- Implisit: $dy/dx=-F_x/F_y$, $z_x=-F_x/F_z$.

Berikutnya 14.6 Turunan Berarah dan Vektor Gradien.