Bab 14 · Turunan Parsial

14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear

Pada fungsi satu peubah, garis singgung memberi hampiran linear terbaik di dekat sebuah titik. Untuk fungsi dua peubah, objek yang sepadan adalah **bidang singgung**.

1. Bidang singgung

PERSAMAAN BIDANG SINGGUNG

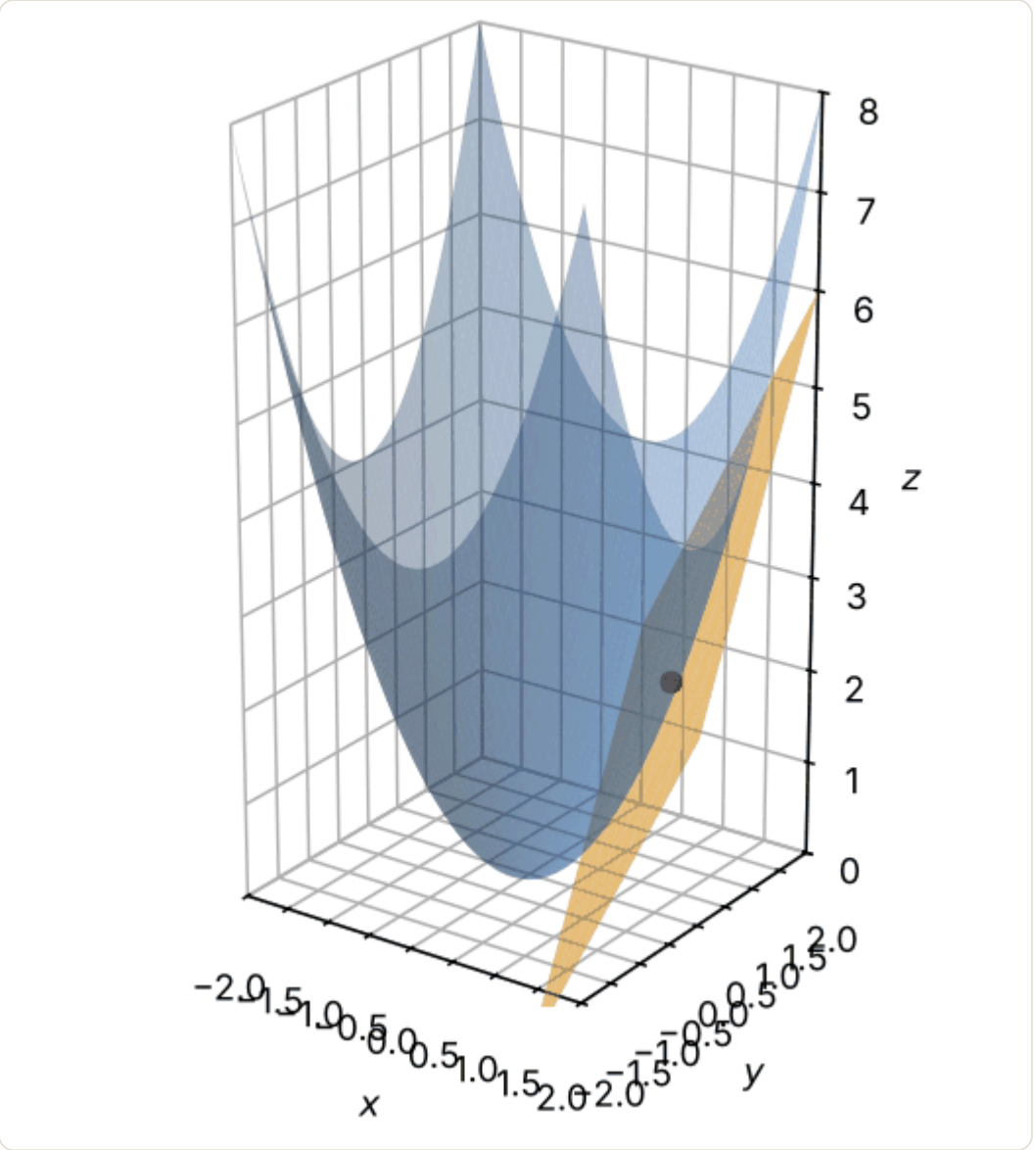
Misalkan f mempunyai turunan parsial kontinu. Bidang singgung pada permukaan $z = f(x, y)$ di titik $P(a, b, c)$, $c = f(a, b)$, adalah

$$z - c = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b).$$

Penurunan. Garis singgung irisan $y = b$ di P berarah $\mathbf{u} = \langle 1, 0, f_x \rangle$; garis singgung irisan $x = a$ berarah $\mathbf{v} = \langle 0, 1, f_y \rangle$. Normal bidang yang memuat keduanya: $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle$. Persamaan bidang melalui P: $-f_x(x - a) - f_y(y - b) + (z - c) = 0$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 1 — PARABOLOID

$z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$: $f_x = 2x = 2$, $f_y = 2y = 2$. Bidang singgung: $z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$, yaitu $z = 2x + 2y - 2$.



Bidang singgung $z = 2x + 2y - 2$ pada paraboloid $z = x^2 + y^2$ di $(1, 1, 2)$.

CONTOH 2 — PARABOLOID LAIN

$z = 2x^2 + y^2$ di $(1, 1, 3)$: $f_x = 4x = 4$, $f_y = 2y = 2$. $z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. Vektor normalnya $\langle 4, 2, -1 \rangle$ (atau $\langle -4, -2, 1 \rangle$).

CONTOH 3 — KAPAN BIDANG SINGGUNG MENDATAR?

$z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$: $f_x = 2x - 4$, $f_y = 2y + 6$. Bidang singgung mendatar bila $f_x = f_y = 0$: $(2, -3)$, $z = 4 + 9 - 8 - 18 = -13$. Titik $(2, -3, -13)$ adalah dasar paraboloid (minimum, 14.7).

2. Hampiran linear

LINEARISASI

Fungsi

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

disebut **linearisasi** f di (a,b). Hampiran $f(x,y) \approx L(x,y)$ baik di dekat (a,b). Grafik L adalah bidang singgung.

CONTOH 4 — LINEARISASI DAN HAMPIRAN

$f(x,y) = xe^{xy}$ di $(1,0)$: $f = 1$, $f_x = e^{xy}(1+xy) = 1$, $f_y = x^2 e^{xy} = 1$. $L = 1 + (x-1) + y = x + y$. Maka $f(1{,}1, -0{,}1) \approx L = 1{,}0$; nilai sebenarnya $1{,}1e^{-0{,}11} \approx 0{,}9854$. Galat sekitar 1,5%.

CONTOH 5 — HAMPIRAN AKAR

$f = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ di $(2,1)$: $f = 3$, $f_x = -\dfrac{x}{f} = -\dfrac{2}{3}$, $f_y = -\dfrac{7y}{f} = -\dfrac{7}{3}$. $L = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1)$. Untuk $(1{,}95;\ 1{,}08)$: $L = 3 + 0{,}0333 - 0{,}1867 = 2{,}8467$. Nilai tepat $\sqrt{20 - 3{,}8025 - 8{,}1648} = \sqrt{8{,}0327} \approx 2{,}8342$. Galat $\approx 0{,}0125$, cukup kecil mengingat perubahan masukan sampai $0{,}08$.

3. Keterdiferensialan

DEFINISI

$z = f(x,y)$ **terdiferensialkan** di (a,b) bila $\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$ dapat ditulis

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

dengan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ bila $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

TEOREMA (SYARAT CUKUP)

Bila turunan parsial f_x, f_y ada di sekitar (a,b) dan kontinu di (a,b), maka f terdiferensialkan di (a,b). Jika terdiferensialkan, maka f kontinu di titik itu.

Keberadaan f_x dan f_y saja *tidak* menjamin keterdiferensialan, bahkan tidak menjamin kekontinuan: fungsi $g = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $g(0,0) = 0$ (14.2) memiliki $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$ tetapi tidak kontinu di asal.

4. Diferensial

DIFERENSIAL TOTAL

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Dengan $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, dz adalah perubahan sepanjang *bidang singgung* sedangkan Δz adalah perubahan sepanjang *permukaan*; $\Delta z \approx dz$ untuk perubahan kecil. Untuk tiga peubah, $dw = w_x\,dx + w_y\,dy + w_z\,dz$.

CONTOH 6 — VOLUME SILINDER

$V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi r h\,dr + \pi r^2\,dh$. Silinder berjari-jari $r = 5$ cm dan tinggi $h = 12$ cm diukur dengan galat maksimum 0,1 cm untuk keduanya: $dV = 2\pi(5)(12)(0{,}1) + \pi(25)(0{,}1) = 12\pi + 2{,}5\pi = 14{,}5\pi \approx 45{,}55\ \text{cm}^3$. Volume $300\pi \approx 942{,}5\ \text{cm}^3$; galat relatif $\approx 4{,}8\%$.

CONTOH 7 — BALOK

Balok berukuran $75 \times 60 \times 40$ cm dengan galat pengukuran maksimum $0{,}2$ cm per sisi. $V = xyz$, $dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = (2400 + 3000 + 4500)(0{,}2) = 1980\ \text{cm}^3$. $V = 180\,000\ \text{cm}^3$, galat relatif $\approx 1{,}1\%$. Galat relatif adalah jumlah galat relatif tiap sisi: $\frac{0{,}2}{75} + \frac{0{,}2}{60} + \frac{0{,}2}{40} = 0{,}0027 + 0{,}0033 + 0{,}005 = 0{,}011$.

CONTOH 8 — HAMBATAN PARALEL

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Untuk $R_1 = 100$, $R_2 = 300$: $R = 75\ \Omega$. $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{90000}{160000} = 0{,}5625$; $\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{10000}{160000} = 0{,}0625$. Bila tiap hambatan memiliki galat $\pm 1\ \Omega$, $dR \le (0{,}5625 + 0{,}0625)\cdot 1 = 0{,}625\ \Omega$. Hambatan yang lebih kecil lebih mempengaruhi hasil.

5. Kesalahan umum

- Memakai bidang singgung jauh dari titik singgungnya; hampiran hanya baik dekat (a, b).
- Menyamakan Δz dengan dz: sama hanya pada hampiran.
- Menganggap keberadaan f_x, f_y cukup untuk keterdiferensialan.
- Lupa mengevaluasi turunan parsial di titik singgung sebelum memasukkannya ke persamaan bidang.

6. Ringkasan

- Bidang singgung: $z - c = f_x(x-a) + f_y(y-b)$; normal $\langle f_x, f_y, -1\rangle$.
- $L(x,y)$ hampiran linear; $dz = f_x\,dx + f_y\,dy$.
- Turunan parsial kontinu $\Rightarrow$ terdiferensialkan $\Rightarrow$ kontinu.
- Diferensial dipakai untuk menaksir galat pengukuran.

Berikutnya 14.5 Aturan Rantai.