Bab 14 · Turunan Parsial

# 14.3 Turunan Parsial

Pada fungsi satu peubah, turunan mengukur laju perubahan. Pada fungsi dua peubah, laju perubahan bergantung pada arah. Langkah pertama yang paling sederhana: menggerakkan satu peubah saja dan menahan yang lain tetap.

## 1. Definisi dan notasi

**TURUNAN PARSIAL**

Untuk $f(x,y)$:

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},\qquad f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

bila limitnya ada. Notasi lain: $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}=D_x f$.

**Cara menghitung.** Untuk $f_x$: anggap $y$ konstanta dan turunkan terhadap $x$ dengan aturan biasa. Untuk $f_y$: anggap $x$ konstanta.

**CONTOH 1 — TURUNAN POLINOMIAL**

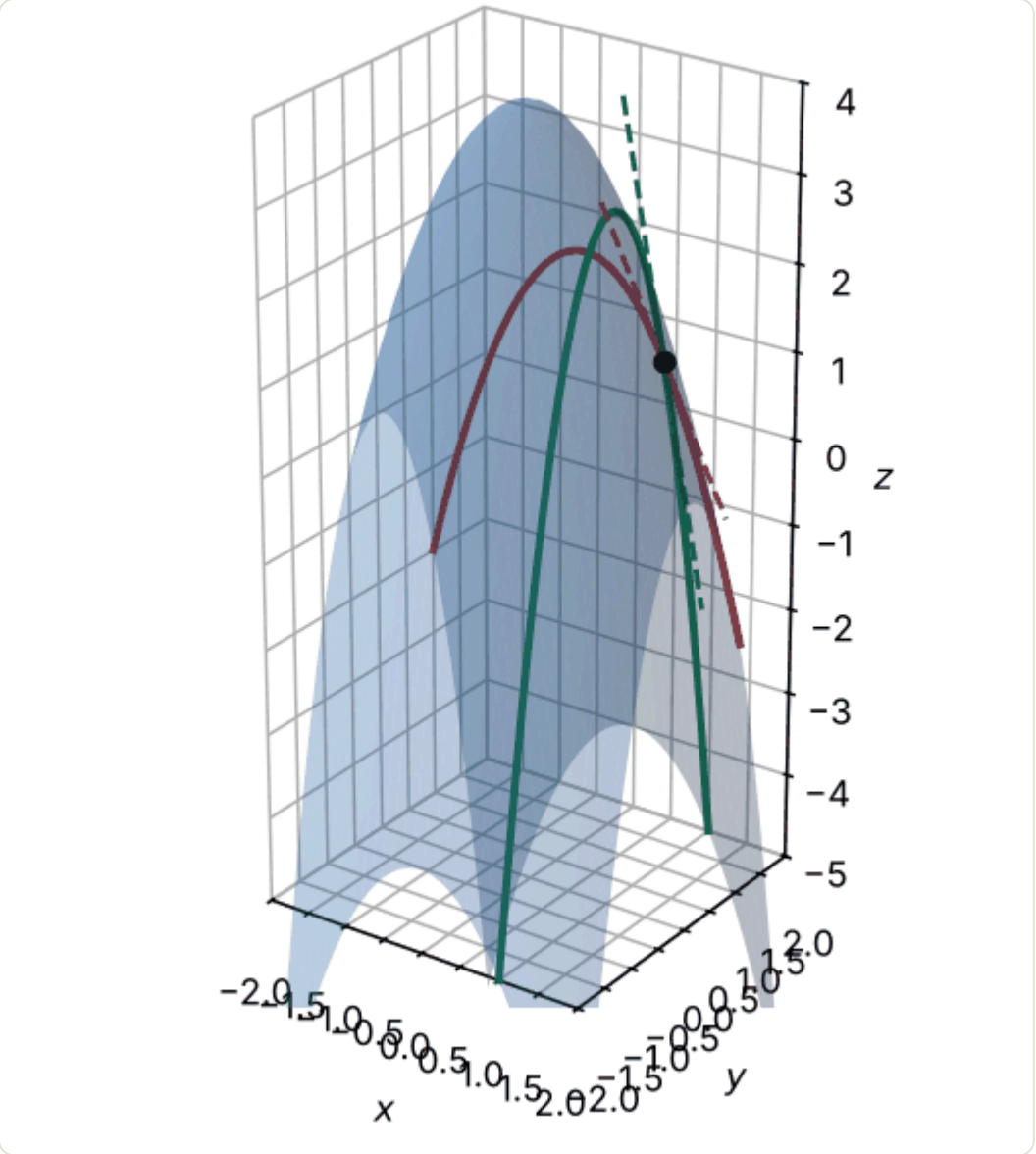
$f(x,y)=x^3+x^2y^3-2y^2$: $f_x=3x^2+2xy^3$, $f_y=3x^2y^2-4y$. Di $(2,1)$: $f_x=12+4=16$, $f_y=12-4=8$.

**CONTOH 2 — FUNGSI TRANSENDEN**

$f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$: $f_x=ye^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)$, $f_y=xe^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)$. $g(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$: $g_x=\dfrac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g_y=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

## 2. Tafsir geometris dan laju perubahan

Grafik $z = f(x, y)$ dipotong bidang $y = b$ menghasilkan kurva $z = f(x, b)$. $f_x(a, b)$ adalah **kemiringan garis singgung** kurva ini di titik $(a, b, f(a, b))$. Serupa, $f_y(a, b)$ adalah kemiringan kurva $z = f(a, y)$. Sebagai laju perubahan: $f_x$ adalah laju perubahan $z$ terhadap $x$ ketika $y$ tetap.




Permukaan $z = 4 - x^2 - 2y^2$; kurva merah ($y = 1$) dan hijau ($x = 1$) dengan garis singgungnya di $(1, 1, 1)$.

**CONTOH 3 — SINGGUNG PADA IRISAN**

$f = 4 - x^2 - 2y^2$, di $(1, 1)$: $f = 1$, $f_x = -2x = -2$, $f_y = -4y = -4$. Garis singgung pada irisan $y = 1$: arah $\langle 1, 0, -2 \rangle$; pada irisan $x = 1$: arah $\langle 0, 1, -4 \rangle$. Keduanya menentukan bidang singgung (14.4).

**CONTOH 4 — MEMBACA KONTUR**

Pada peta suhu, jika $T_x > 0$ di sebuah titik, suhu naik bila kita bergerak ke timur (arah $x$ positif). Bila $T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$ (14.1), di $(1,1)$: $T_x = -\dfrac{200x}{(1+x^2+2y^2)^2} = -12{,}5$, $T_y = -\dfrac{400y}{(\cdot)^2} = -25$. Suhu turun 12,5 derajat per satuan jarak ke arah $x$ dan 25 derajat per satuan ke arah $y$.

**CONTOH 5 — GAS IDEAL**

$PV = nRT$. Dengan $P = \dfrac{nRT}{V}$: $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$ (tekanan turun bila volume naik pada suhu tetap) dan $\dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}$. Hubungan siklik: $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{nR}{P}$ dan $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{nR}$, sehingga

$$\frac{\partial P}{\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{nRT}{V^2}\cdot\frac{nR}{P}\cdot\frac{V}{nR} = -\frac{nRT}{PV} = -1.$$

Hasilnya $-1$, bukan $+1$ seperti yang "tampak" bila $\partial$ dianggap pecahan biasa.

## 3. Fungsi tiga peubah atau lebih

Turunkan terhadap satu peubah, anggap semua yang lain konstan.

**CONTOH 6 — TIGA PEUBAH**

$f(x,y,z) = xy + yz^2 + e^{xz}$: $f_x = y + ze^{xz}$, $f_y = x + z^2$, $f_z = 2yz + xe^{xz}$. Di $(1,2,0)$: $f_x = 2$, $f_y = 1$, $f_z = 1$.

## 4. Turunan parsial orde tinggi

$(f_x)_x = f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $(f_x)_y = f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, dan seterusnya. Untuk $f = x^3y^2 - 2x\,y + y^4$: $f_x = 3x^2y^2 - 2y$, $f_y = 2x^3y - 2x + 4y^3$; $f_{xx} = 6xy^2$, $f_{xy} = 6x^2y - 2$, $f_{yx} = 6x^2y - 2$, $f_{yy} = 2x^3 + 12y^2$.

**TEOREMA CLAIRAUT**

Bila $f_{xy}$ dan $f_{yx}$ kontinu pada cakram yang memuat $(a,b)$, maka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Akibatnya, untuk fungsi yang cukup mulus urutan turunan tidak penting. Ini menghemat pekerjaan: untuk $f = \sin(xy^2) + e^x \ln y$ lebih mudah memilih urutan yang menghasilkan ekspresi sederhana.

**CONTOH 7 — MEMILIH URUTAN**

$f(x, y, z) = e^{yz}\cos x + z^3 y$. Untuk $f_{zyx}$: turunkan lebih dulu terhadap $x$: $f_x = -e^{yz}\sin x$; lalu $y$: $-ze^{yz}\sin x$; lalu $z$: $-(1+yz)e^{yz}\sin x$. Mengubah urutan tidak mengubah hasil.

## 5. Persamaan diferensial parsial

**CONTOH 8 — PERSAMAAN LAPLACE**

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ dipenuhi $u = e^x \sin y$: $u_{xx} = e^x \sin y$, $u_{yy} = -e^x \sin y$, jumlah 0. Juga $u = \ln(x^2 + y^2)$: $u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, dan karena simetri $u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$; jumlah 0. Fungsi seperti ini disebut *harmonik*; mereka menggambarkan suhu keadaan tunak dan potensial listrik.

**CONTOH 9 — PERSAMAAN GELOMBANG**

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Untuk $u = \sin(x - ct)$: $u_{tt} = -c^2\sin(x-ct)$, $u_{xx} = -\sin(x-ct)$, sehingga $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Gelombang yang merambat ke kanan dengan laju $c$.

**CONTOH 10 — PERSAMAAN PANAS**

$u_t = k u_{xx}$. Untuk $u = e^{-kt}\sin x$: $u_t = -ke^{-kt}\sin x$, $u_{xx} = -e^{-kt}\sin x$, jadi $u_t = k u_{xx}$. Pola sinus meluruh secara eksponensial karena panas menyebar.

## 6. Turunan implisit

**CONTOH 11 — $Z$ SEBAGAI FUNGSI IMPLISIT**

$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$ mendefinisikan $z$ implisit. Turunkan terhadap $x$ (anggap $y$ tetap): $3x^2 + 3z^2 z_x = 6yz + 6xyz_x \Rightarrow z_x(3z^2 - 6xy) = 6yz - 3x^2$, jadi $z_x = \dfrac{2yz - x^2}{z^2 - 2xy}$. Serupa $z_y = \dfrac{2xz - y^2}{z^2 - 2xy}$. Di titik $(1, 2, 3)$ (periksa: $1 + 8 + 27 = 36 = 6 \cdot 6$): $z_x = \dfrac{12 - 1}{9 - 4} = \dfrac{11}{5}$.

## 7. Kesalahan umum

- Lupa menganggap peubah lain konstan, mis. menurunkan $y$ pada $f_x$.
- Menulis $\partial z/\partial x =$ "$dz/dx$" begitu saja; notasi $\partial$ menandakan peubah lain ditahan.
- Mengira Clairaut berlaku tanpa kekontinuan turunan orde dua.
- Kesalahan tanda pada turunan hasil bagi atau rantai.

## 8. Ringkasan

- $f_x$ menahan $y$ tetap; $f_y$ menahan $x$ tetap. Geometris: kemiringan irisan.
- Turunan orde tinggi; Clairaut: $f_{xy} = f_{yx}$ bila kontinu.
- Beberapa PDP penting: Laplace, gelombang, panas.
- Turunan implisit dengan menurunkan kedua ruas.

Berikutnya 14.4 Bidang Singgung dan Hampiran Linear.