Bab 14 · Turunan Parsial

14.1 Fungsi Beberapa Peubah

Sebagian besar besaran di dunia nyata bergantung pada lebih dari satu peubah: suhu di suatu titik bergantung pada posisi (x, y, z) dan waktu t; volume silinder bergantung pada r dan h; hasil produksi bergantung pada tenaga kerja dan modal. Bab 14 mengembangkan kalkulus diferensial untuk fungsi seperti itu.

1. Definisi

FUNGSI DUA PEUBAH

Fungsi dua peubah f adalah aturan yang mengaitkan setiap pasangan terurut (x, y) dalam himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (*daerah asal*) dengan tepat satu bilangan real $f(x, y)$. *Daerah hasil* (range) adalah himpunan semua nilai $f(x, y)$. Fungsi tiga peubah $f(x, y, z)$ didefinisikan serupa dengan $D \subseteq \mathbb{R}^3$; fungsi n peubah $f(x_1, \ldots, x_n)$ memakai $\mathbb{R}^n$.

Bila daerah asal tidak disebutkan, kita ambil himpunan terbesar titik yang membuat rumusnya bermakna.

CONTOH 1 — MENCARI DAERAH ASAL

1. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$: syarat $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, jadi $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$, cakram tertutup berjari-jari 3. Daerah hasil $[0, 3]$.
2. $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$: syarat $x + y > 1$, setengah bidang di atas garis $y = 1 - x$ (tanpa garisnya). Daerah hasil $\mathbb{R}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$: syarat $x \neq \pm y$, seluruh bidang tanpa dua garis $y = x$, $y = -x$.
4. $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} \;/\; \ln(4 - z)$: syarat $z \geq x^2 + y^2$, $z < 4$, $z \neq 3$. Daerah di dalam paraboloid, di bawah bidang $z = 4$, tanpa bidang $z = 3$.

CONTOH 2 — MODEL NYATA

- Bunga majemuk bulanan: $A(P, r, t) = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$. $A(1000;\ 0{,}06;\ 5) = 1000(1{,}005)^{60} \approx 1348{,}85$.
- Produksi Cobb–Douglas: $P(L, K) = 2L^{0{,}6}K^{0{,}4}$. $P(100, 100) = 200$; bila tenaga kerja digandakan dan modal dipangkas setengah, $P(200, 50) = 2 \cdot 200^{0{,}6}50^{0{,}4} \approx 229{,}7$, naik sekitar 14,9%.
- Volume silinder: $V(r, h) = \pi r^2 h$.

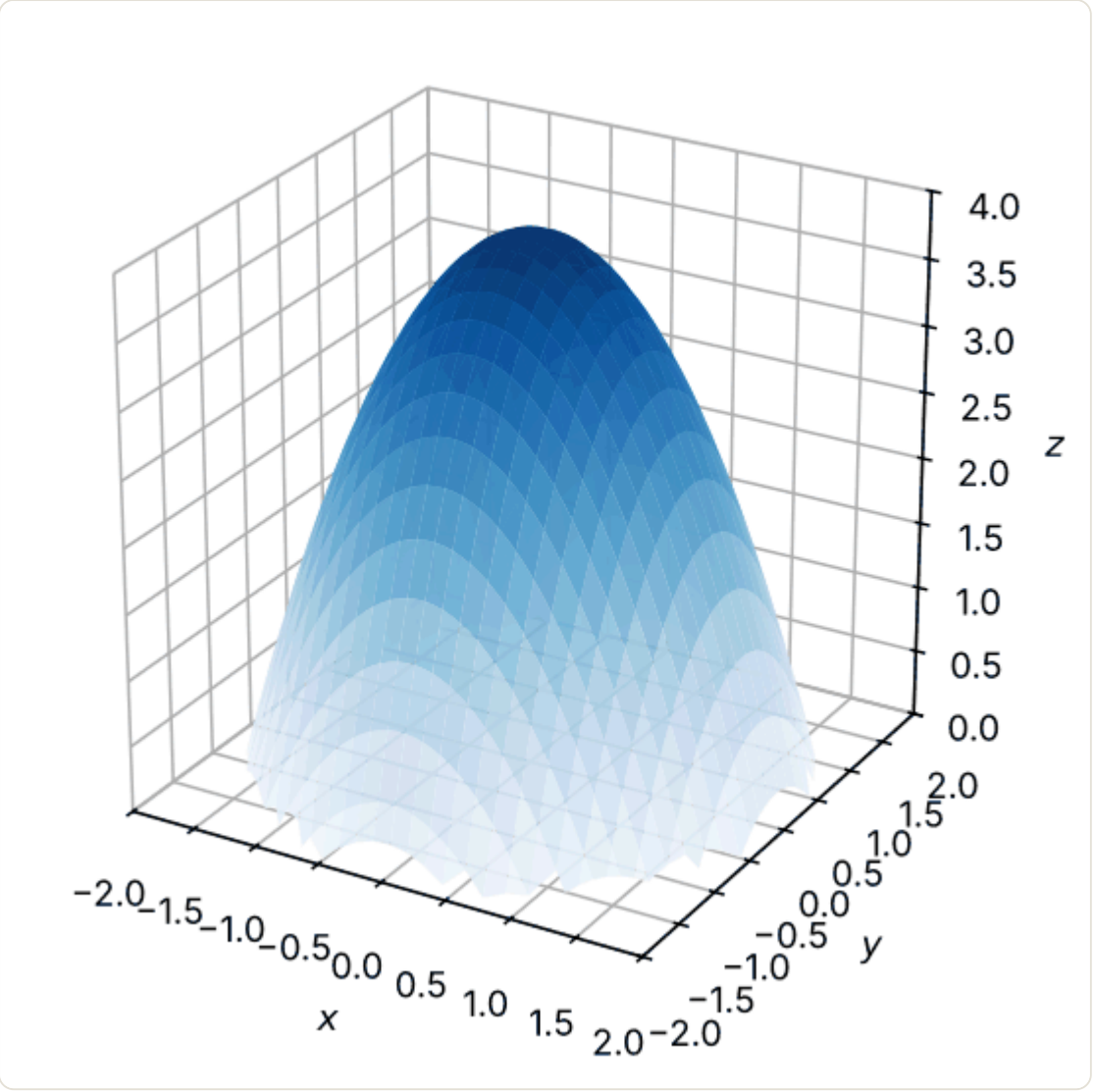
2. Grafik

GRAFIK

Grafik f dengan daerah asal D adalah himpunan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$. Ini sebuah permukaan di ruang: tinggi permukaan di atas titik (x, y) adalah $f(x, y)$.

CONTOH 3 — GRAFIK $F = 4 - X^2 - Y^2$

Grafiknya $z = 4 - x^2 - y^2$ adalah paraboloid eliptik yang membuka ke bawah (12.6) dengan puncak $(0, 0, 4)$. Ia memotong bidang xy di lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Bila kita batasi $z \geq 0$, diperoleh mangkuk terbalik di atas cakram jari-jari 2.



Grafik $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ untuk $z \geq 0$.

CONTOH 4 — GRAFIK FUNGSI SEDERHANA

- $f(x, y) = 3 - x - y$: bidang miring (12.5) yang memotong sumbu di $x = 3,\ y = 3,\ z = 3$.
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$: kerucut (belahan atas).
- $f(x, y) = \sin x$: silinder bergelombang (peubah y tidak muncul).
- $f(x, y) = xy$: permukaan pelana (paraboloid hiperbolik yang diputar).

3. Kurva ketinggian (kontur)

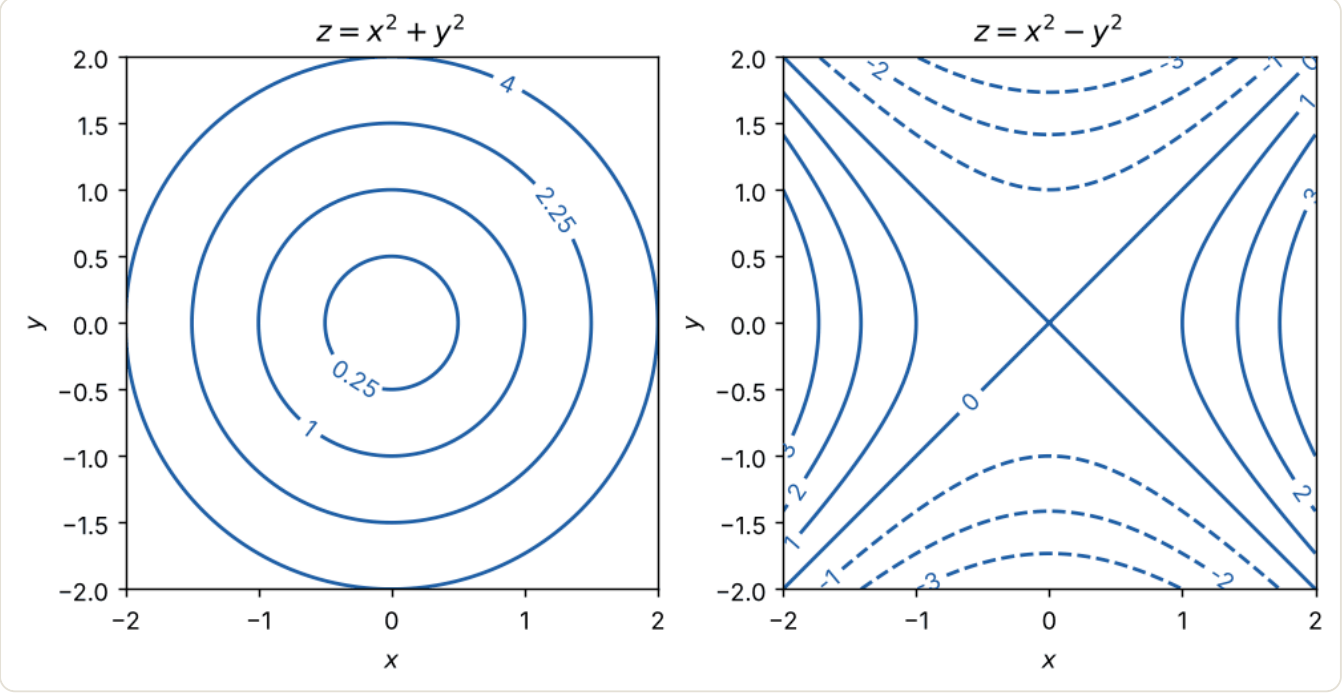
KURVA KETINGGIAN

Kurva ketinggian (level curve) f adalah himpunan semua titik (x, y) di daerah asal dengan $f(x, y) = k$, dengan k konstanta. Ia adalah proyeksi ke bidang xy dari irisan grafik dengan bidang $z = k$. **Peta kontur** adalah kumpulan kurva ketinggian untuk beberapa nilai k.

Pada peta topografi, garis kontur menghubungkan titik berketinggian sama; pada peta cuaca, *isoterm* menghubungkan titik bersuhu sama dan *isobar* titik bertekanan sama. Kontur yang rapat berarti permukaan curam; kontur yang renggang berarti landai.

CONTOH 5 — KONTUR DUA FUNGSI

- $f = x^2 + y^2$: kurva ketinggian $x^2 + y^2 = k$ adalah lingkaran konsentris berjari-jari $\sqrt{k}$ ($k > 0$). Jarak jari-jari: untuk $k = 1, 4, 9$ jari-jarinya $1, 2, 3$: kontur makin rapat ke arah luar karena permukaan makin curam.
- $f = x^2 - y^2$: $x^2 - y^2 = k$ hiperbola; untuk $k = 0$ dua garis $y = \pm x$. Pola khas pelana.



Peta kontur $z = x^2 + y^2$ (kiri) dan $z = x^2 - y^2$ (kanan).

CONTOH 6 — FUNGSI DARI KONTUR

Kurva ketinggian $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ dengan $f = k$: $y = kx^2$, keluarga parabola yang melalui titik asal (tanpa titik asalnya). Jadi nilai k menyatakan "kelengkungan" parabola.

4. Fungsi tiga peubah dan permukaan ketinggian

Grafik $f(x,y,z)$ berada di $\mathbb{R}^4$ dan tidak dapat digambar. Kita memvisualisasikannya lewat **permukaan ketinggian** $f(x,y,z) = k$.

CONTOH 7 — PERMUKAAN KETINGGIAN

- $f = x^2 + y^2 + z^2$: $f = k$ bola berjari-jari $\sqrt{k}$, makin besar bola untuk k naik.
- $f = x^2 + y^2 - z^2$: $k > 0$ hiperboloid satu lembar, $k < 0$ hiperboloid dua lembar, $k = 0$ kerucut (12.6).
- $f = x + 2y + 3z$: bidang-bidang sejajar, $x + 2y + 3z = k$.
- $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$: bola-bola konsentris; model potensial gravitasi atau listrik (potensial sama pada bola).

CONTOH 8 — SUHU

Suhu pelat tipis $T(x,y) = \dfrac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$ (derajat C). Isoterm $T = 20$: $1 + x^2 + 2y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 4$, sebuah elips dengan setengah sumbu 2 (arah x) dan $\sqrt{2}$ (arah y). Suhu maksimum 100 di titik asal.

5. Kesalahan umum

- Mengira kurva ketinggian adalah kurva pada grafik. Kurva ketinggian berada *di bidang* xy; kurva pada grafik adalah *jejak* di tinggi k.
- Lupa membatasi daerah asal (akar, logaritma, penyebut).
- Mengira dua kurva ketinggian berbeda dapat berpotongan: karena f memberi tepat satu nilai di tiap titik, kurva ketinggian untuk k berbeda tidak pernah berpotongan.

6. Ringkasan

- $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; grafik fungsi dua peubah adalah permukaan $z = f(x, y)$.
- Kurva ketinggian $f(x, y) = k$; permukaan ketinggian $f(x, y, z) = k$.
- Peta kontur menunjukkan kecuraman: rapat $=$ curam.

Berikutnya 14.2: limit dan kekontinuan.