Bab 13 · Fungsi Vektor

13.4 Gerak dalam Ruang: Kecepatan dan Percepatan

Inilah tujuan fungsi vektor: menggambarkan gerak. Bila $\mathbf{r}(t)$ adalah posisi partikel pada waktu t, maka turunan pertama dan kedua adalah kecepatan dan percepatan.

1. Kecepatan, laju, percepatan

DEFINISI

Untuk partikel dengan vektor posisi $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \ \text{(kecepatan)}, \qquad |\mathbf{v}(t)| = \frac{ds}{dt} \ \text{(laju)}, \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \ \text{(per}$$

Kecepatan adalah vektor singgung ke lintasan, searah gerak; laju adalah skalar ≥ 0. Hukum II Newton: gaya $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

CONTOH 1 — KUBIK TERPILIN SEBAGAI GERAK

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6t \rangle$, laju $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$. Di $t = 1$: $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, laju $\sqrt{14} \approx 3{,}742$; $\mathbf{a} = \langle 0, 2, 6 \rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{40} \approx 6{,}325$.

CONTOH 2 — GERAK MELINGKAR BERATURAN

$\mathbf{r}(t) = \langle R\cos\omega t,\ R\sin\omega t \rangle$. $\mathbf{v} = \omega R\langle -\sin\omega t, \cos\omega t \rangle$, laju ωR konstan. $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$: percepatan menuju pusat (sentripetal) dengan besar $\omega^2 R = v^2/R$. Mobil melaju 20 m/s pada tikungan berjari-jari 50 m: $a = 400/50 = 8$ m/s². Meskipun lajunya konstan, percepatan tidak nol karena arah kecepatan berubah.

CONTOH 3 — DARI PERCEPATAN KE POSISI

Percepatan $\mathbf{a}(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, $\mathbf{v}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$ (13.2, Contoh 9) memberi $\mathbf{v} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ dan $\mathbf{r} = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$. Setelah $t = 2$: posisi $(2, 5, 10)$, kecepatan $\langle 1, 4, 12 \rangle$, laju $\sqrt{161} \approx 12{,}69$.

CONTOH 4 — KAPAN LAJU MINIMUM?

$\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ t^2 - 4t,\ 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2t,\ 2t - 4,\ 0\rangle$. $|\mathbf{v}|^2 = 4t^2 + (2t-4)^2 = 8t^2 - 16t + 16$. Minimum di $t = 1$: $|\mathbf{v}|^2 = 8$, laju $2\sqrt{2}$. Pada saat itu $\mathbf{v} = \langle 2, -2, 0\rangle$.

2. Gerak proyektil

Benda dilempar dari titik asal dengan laju awal v_0 dan sudut elevasi α. Satu-satunya percepatan adalah gravitasi: $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ ($g \approx 9{,}8$ m/s²). Integrasi dua kali:

$$\mathbf{v}(t) = \langle v_0\cos\alpha,\ v_0\sin\alpha - gt\rangle, \qquad \mathbf{r}(t) = \left\langle (v_0\cos\alpha)\,t,\ (v_0\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2\right\rangle.$$

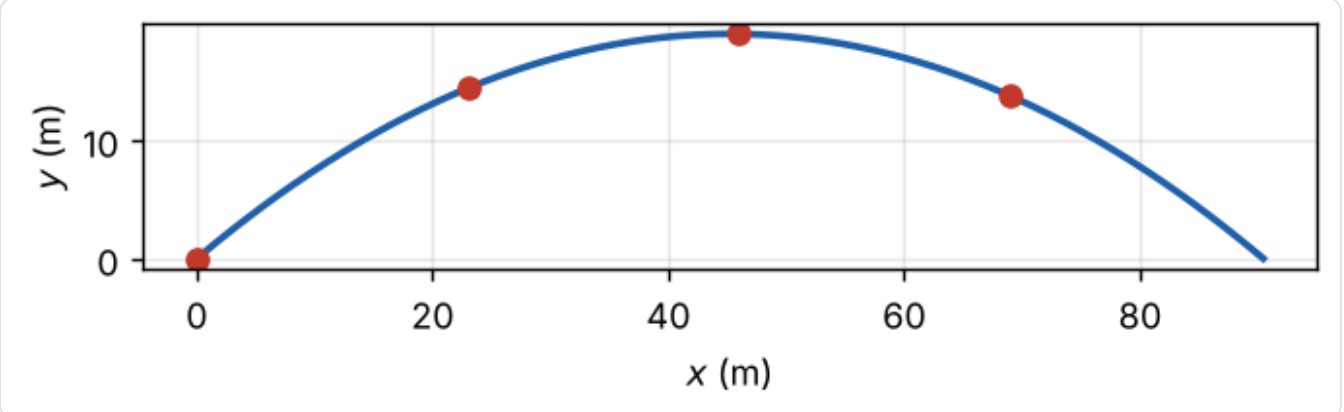
Gerak horizontal beraturan, gerak vertikal berubah beraturan: keduanya bebas satu sama lain.

RUMUS PROYEKTIL (TANAH DATAR)

- Waktu terbang: $T = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.
- Jangkauan: $R = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ (maksimum di $\alpha = 45^\circ$).
- Tinggi maksimum: $H = \dfrac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}$.

CONTOH 5 — BOLA DILEMPAR

$v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$. Komponen awal: $v_0\cos\alpha \approx 22{,}98$, $v_0\sin\alpha \approx 19{,}28$. Waktu terbang $T = 2(19{,}28)/9{,}8 \approx 3{,}94$ s; jangkauan $R = 900\sin 80^\circ/9{,}8 \approx 90{,}4$ m; tinggi maksimum $H = 19{,}28^2/19{,}6 \approx 18{,}97$ m. Laju saat mendarat sama dengan laju awal (30 m/s) karena energi kekal.



Lintasan bola $v_0 = 30$ m/s, $\alpha = 40^\circ$; titik merah menandai $t = 0, 1, 2, 3$ s.

CONTOH 6 — DUA SUDUT, SATU JANGKAUAN

Dengan $v_0 = 30$ m/s, sudut α dan $90^\circ - \alpha$ memberi jangkauan yang sama ($\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha)$). Misalnya $\alpha = 20^\circ$ dan 70° keduanya memberi $900 \sin 40^\circ / 9{,}8 \approx 59{,}0$ m, tetapi lintasan 70° jauh lebih tinggi dan lebih lama.

CONTOH 7 — PELUNCURAN DARI KETINGGIAN

Benda dilempar horizontal dari tebing tinggi 45 m dengan laju 12 m/s. Posisi: $\mathbf{r} = \langle 12t,\ 45 - 4{,}9t^2 \rangle$. Menyentuh tanah ketika $45 = 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 3{,}03$ s, jatuh di $x \approx 36{,}4$ m. Kecepatan saat mendarat: $\langle 12, -29{,}7 \rangle$, laju $\approx 32{,}0$ m/s.

3. Komponen tangensial dan normal percepatan

Dari $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ (dengan $v = |\mathbf{v}|$), turunkan: $\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Karena $\mathbf{T}' = \kappa v \mathbf{N}$ (dari definisi $\kappa = |\mathbf{T}'|/v$),

$$\boxed{\mathbf{a} = a_T\,\mathbf{T} + a_N\,\mathbf{N}, \qquad a_T = v' = \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}}$$

a_T mengubah *laju* (searah gerak); a_N membelokkan *arah* (menuju sisi cekung). Selalu $a_T^2 + a_N^2 = |\mathbf{a}|^2$. Percepatan berada di bidang oskulasi, tidak punya komponen $\mathbf{B}$.

CONTOH 8 — HELIKS

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 0 = 0$, jadi $a_T = 0$ (laju konstan $\sqrt{2}$). $a_N = \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1 = \kappa v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2$. Percepatan $= \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle = \mathbf{N}$, menuju sumbu silinder.

CONTOH 9 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$

$\mathbf{r}' = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6 \rangle$: $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 + 4 + 18 = 22$; $a_T = 22/\sqrt{14} \approx 5{,}880$. $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{76}$, $a_N = \sqrt{76}/\sqrt{14} \approx 2{,}330$. Pemeriksaan: $a_T^2 + a_N^2 \approx 34{,}57 + 5{,}43 = 40 = |\mathbf{a}|^2$.

CONTOH 10 — PROYEKTIL DI TITIK TERTINGGI

Di puncak lintasan, $\mathbf{v} = \langle v_0 \cos\alpha, 0\rangle$ horizontal dan $\mathbf{a} = \langle 0, -g\rangle$ vertikal, sehingga $a_T = 0$ dan $a_N = g$. Kelengkungan di puncak: $\kappa = a_N / v^2 = g/(v_0\cos\alpha)^2$. Untuk Contoh 5: $9{,}8/22{,}98^2 \approx 0{,}01856\ \text{m}^{-1}$; jari-jari kelengkungan $\approx 53{,}9$ m.

4. Hukum-hukum Kepler (gambaran)

Kepler merumuskan tiga hukum gerak planet; Newton menurunkannya dari hukum gravitasi $\mathbf{F} = -\dfrac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$. Intinya: (1) planet bergerak pada elips dengan Matahari di salah satu fokus; (2) vektor posisi dari Matahari menyapu luas sama dalam waktu sama; (3) kuadrat periode sebanding pangkat tiga setengah sumbu panjang.

Hukum kedua adalah akibat langsung kalkulus vektor. Gaya sentral $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ memberi $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Karena $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$, vektor momentum sudut per massa, $\mathbf{h} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}$, konstan. Maka $\mathbf{r}$ dan $\mathbf{v}$ selalu terletak pada satu bidang tetap (gerak planar), dan luas yang disapu per waktu, $\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$, konstan.

CONTOH 11 — HUKUM KETIGA KEPLER PADA SATELIT

Bila periode T dan setengah sumbu panjang a maka T^2/a^3 sama untuk semua benda yang mengorbit pusat yang sama. Satelit yang jari-jari orbitnya dua kali orbit satelit lain mempunyai periode $2^{3/2} \approx 2{,}83$ kali lebih besar.

5. Kesalahan umum

- Mengira laju konstan berarti percepatan nol. Pada gerak melingkar $a_N \neq 0$.
- Menyamakan $|\mathbf{a}|$ dengan dv/dt: $dv/dt = a_T$, bukan $|\mathbf{a}|$.
- Pada proyektil, menaruh g di komponen x atau lupa tanda negatif pada $\frac{1}{2}gt^2$.
- Memakai sudut dalam derajat pada kalkulator berbasis radian, atau sebaliknya.

6. Ringkasan

- $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$, laju $= |\mathbf{v}|$, $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$; integrasi dari percepatan memakai kondisi awal.
- Proyektil: $\mathbf{r} = \langle v_0\cos\alpha\, t,\ v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2\rangle$; T, R, H seperti di atas.

- $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ dengan $a_T = v'$, $a_N = \kappa v^2$.
- Gaya sentral $\Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ konstan (hukum luas Kepler).

Bab 13 selesai. Bab berikutnya, 14.1, memperluas kalkulus ke fungsi dua peubah atau lebih.