Bab 13 · Fungsi Vektor

# 13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan

Dua pertanyaan geometris alami pada kurva ruang: *berapa panjangnya?* dan *seberapa tajam ia melengkung?* Jawaban pertama adalah panjang busur; jawaban kedua adalah kelengkungan. Dari keduanya lahir kerangka $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ yang bergerak sepanjang kurva.

## 1. Panjang busur

**PANJANG BUSUR KURVA RUANG**

Untuk kurva mulus $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$, $a \le t \le b$, yang ditelusuri tepat satu kali,

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.$$

**Gagasan.** Bagi $[a, b]$ menjadi selang kecil $\Delta t$. Panjang ruas lurus antar titik $\mathbf{r}(t_{i-1})$ dan $\mathbf{r}(t_i)$ adalah $\approx |\mathbf{r}'(t_i)|\Delta t$. Menjumlahkan dan mengambil limit memberi integral. Ini perluasan rumus di bidang (10.2) ke tiga dimensi.

**CONTOH 1 — PANJANG SATU PUTARAN HELIKS**

$\mathbf{r} = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{2}$, $0 \le t \le 2\pi$: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi \approx 8{,}886$. Cek geometris: bila silinder dibuka, satu putaran berupa sisi miring segitiga siku-siku dengan alas $2\pi$ (keliling) dan tinggi $2\pi$: $\sqrt{(2\pi)^2 + (2\pi)^2} = 2\pi\sqrt{2}$. Cocok.

**CONTOH 2 — KUBIK TERPILIN**

$\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ tidak punya antiturunan elementer sederhana. Integrasi numerik (Simpson) memberi $L \approx 1{,}863$. Bandingkan jarak lurus dari $(0,0,0)$ ke $(1,1,1)$: $\sqrt{3} \approx 1{,}732 < 1{,}863$, sesuai harapan bahwa kurva lebih panjang dari ruas lurus.

**CONTOH 3 — KURVA BIDANG $Y = X^2$**

Parametrisasi $\langle t, t^2, 0 \rangle$, $0 \le t \le 1$: $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \dfrac{2\sqrt{5} + \sinh^{-1} 2}{4} \approx 1{,}479.$

**CONTOH 4 — KURVA LAIN, HASIL TERTUTUP**

$\mathbf{r} = \langle 2t,\ t^2,\ \frac{1}{3}t^3 \rangle, 0 \le t \le 3$: $|\mathbf{r}'| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2+2)^2} = t^2 + 2$. Maka $L = \int_0^3 (t^2 + 2)\, dt = 9 + 6 = 15$.

## 2. Fungsi panjang busur dan parametrisasi dengan panjang busur

Fungsi panjang busur dari titik acuan $t = a$:

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du, \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|.$$

Bila $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$, $s$ naik tegas dan dapat dibalik: $t = t(s)$. Kurva yang ditulis dalam $s$, $\mathbf{r}(t(s))$, disebut **parametrisasi panjang busur**; padanya $|d\mathbf{r}/ds| = 1$ (laju satu).

**CONTOH 5 — HELIKS DENGAN PARAMETER $S$**

Untuk $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$ dengan acuan $t = 0$: $s = \sqrt{2}\, t \Rightarrow t = s/\sqrt{2}$. Jadi $\mathbf{r}(s) = \left\langle \cos \frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$. Pemeriksaan: $\mathbf{r}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin, \cos, 1 \rangle$ dan $|\mathbf{r}'(s)| = 1$.

**CONTOH 6 — TITIK PADA JARAK TERTENTU**

Mulai dari $(1, 0, 0)$ bergerak sejauh $4$ satuan sepanjang heliks pada arah $t$ naik. Titiknya $t = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$, yaitu $(\cos 2{,}828,\ \sin 2{,}828,\ 2{,}828) \approx (-0{,}951,\ 0{,}309,\ 2{,}828)$.

## 3. Kelengkungan

Untuk kurva yang diparametrisasi dengan $s$, vektor singgung satuan $\mathbf{T}(s)$ berubah arah. Seberapa cepat arahnya berubah per satuan panjang busur adalah kelengkungannya.

**KELENGKUNGAN**

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Garis lurus: $\mathbf{T}$ konstan, $\kappa = 0$. Lingkaran jari-jari $R$: $\kappa = 1/R$. **Jari-jari kelengkungan** adalah $\rho = 1/\kappa$.

**RUMUS YANG LEBIH PRAKTIS**

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Untuk kurva bidang $y = f(x)$: $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}$.

**Penurunan rumus $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$.** Tulis $\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = v\mathbf{T}$ dengan $v = ds/dt$. Turunkan: $\mathbf{r}'' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$. Maka $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v\mathbf{T} \times (v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}') = v^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$ karena $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (13.2, Contoh 5), $|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = |\mathbf{T}'|$. Jadi $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = v^2|\mathbf{T}'|$, dan $\kappa = |\mathbf{T}'|/v = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/v^3$. ■

**CONTOH 7 — HELIKS**

$\mathbf{r}' = \langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{r}'' = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$. $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t,\ -\cos t,\ 1\rangle$ (hitung: komponen $i$: $\cos t \cdot 0 - 1 \cdot (-\sin t) = \sin t$; $j$: $1 \cdot (-\cos t) - (-\sin t) \cdot 0 = -\cos t$; $k$: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Panjangnya $\sqrt{2}$; $|\mathbf{r}'|^3 = 2\sqrt{2}$. $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. Umumnya, untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$, $\kappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ konstan. Bila $b = 0$ kembali ke lingkaran: $\kappa = 1/a$.

**CONTOH 8 — KUBIK TERPILIN DI $T = 1$**

$\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{r}''(1) = \langle 0, 2, 6\rangle$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle 12 - 6,\ 0 - 6,\ 2 - 0\rangle = \langle 6, -6, 2\rangle$, panjang $\sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. $|\mathbf{r}'|^3 = 14\sqrt{14}$. $\kappa(1) = \dfrac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}} \approx 0{,}1664$, jari-jari kelengkungan $\approx 6{,}01$.

**CONTOH 9 — PARABOLA $Y = X^2$**

$f' = 2x$, $f'' = 2$: $\kappa(x) = \dfrac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$. Di titik puncak $x = 0$: $\kappa = 2$, jari-jari $\frac{1}{2}$ (paling melengkung). Di $x = 1$: $\kappa = 2/5^{3/2} \approx 0{,}1789$. Untuk $|x| \to \infty$, $\kappa \to 0$: parabola makin mendekati lurus.

**CONTOH 10 — KELENGKUNGAN MAKSIMUM**

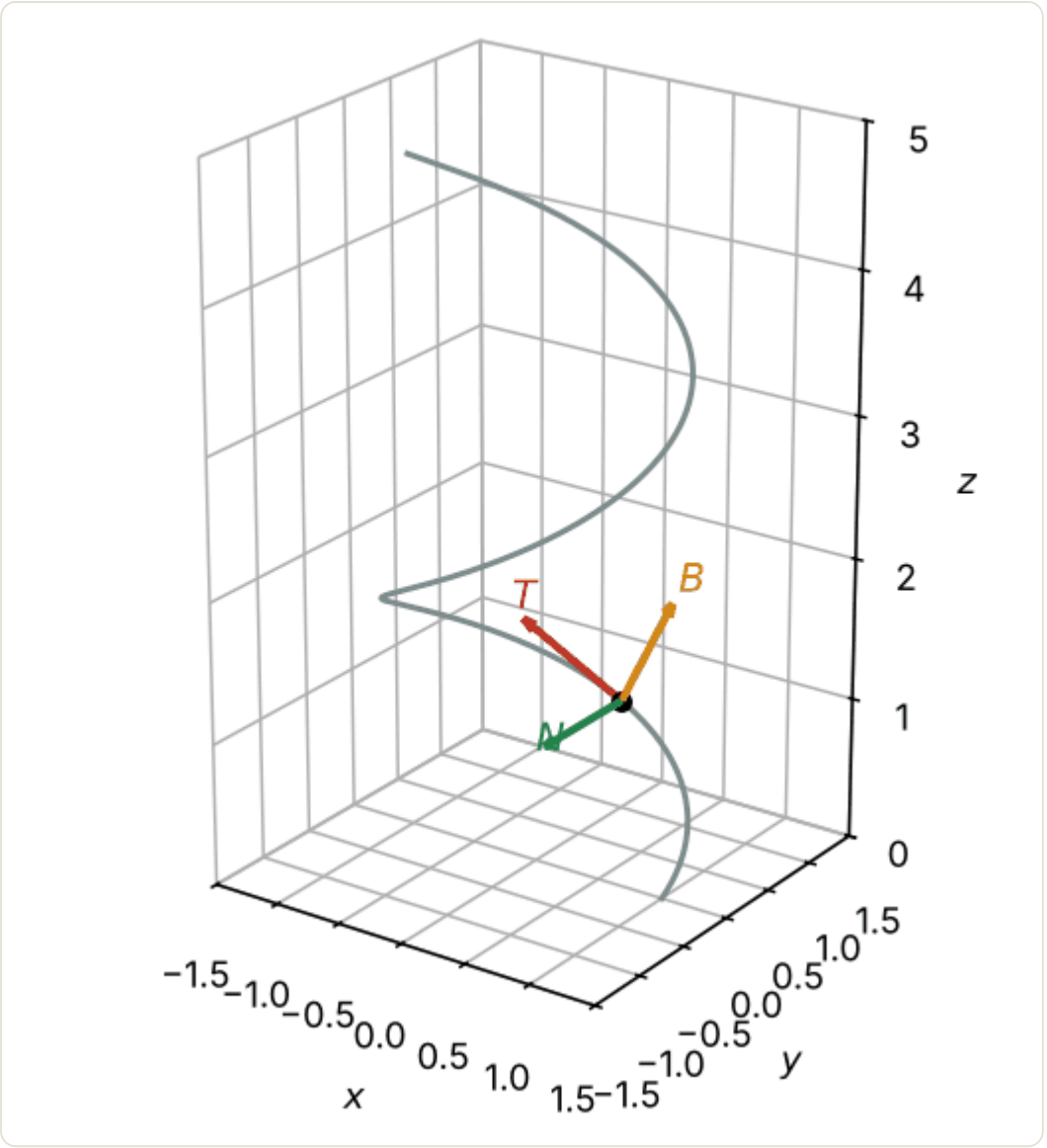
Untuk $y = e^x$: $\kappa = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$. Turunkan: maksimum ketika $1 + e^{2x} = 3e^{2x}$, yaitu $e^{2x} = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}\ln 2 \approx -0{,}347$. Nilainya $\kappa = \dfrac{1/\sqrt{2}}{(3/2)^{3/2}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$.

## 4. Vektor normal dan binormal; bidang oskulasi

**KERANGKA TNB**

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \ \text{(normal utama)}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \ \text{(binormal)}.$$

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ saling tegak lurus dan satuan; $\mathbf{N}$ menunjuk ke sisi cekung kurva. Bidang yang memuat $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{N}$ adalah **bidang oskulasi** (normalnya $\mathbf{B}$); bidang yang memuat $\mathbf{N}$ dan $\mathbf{B}$ adalah **bidang normal** (normalnya $\mathbf{T}$). **Lingkaran oskulasi** berada di bidang oskulasi, berpusat di sisi $\mathbf{N}$ pada jarak $\rho = 1/\kappa$, dan menyinggung kurva.



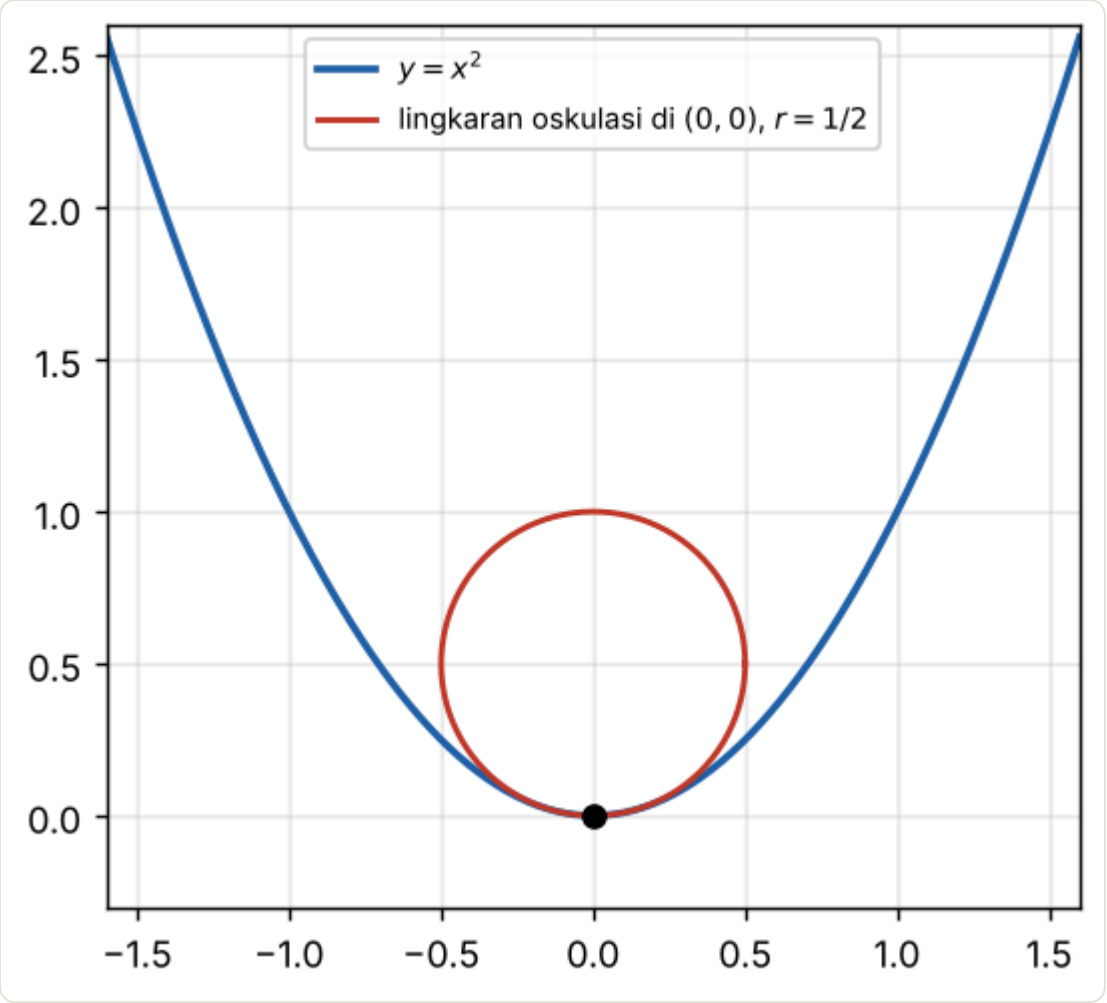

Vektor $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ pada heliks.

**CONTOH 11 — TNB HELIKS**

$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$, $\mathbf{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$, $\mathbf{N} = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$ (mengarah ke sumbu silinder). $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \sin t, -\cos t, 1\rangle$. Di $t = 0$: titik $(1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0, -1, 1\rangle$; bidang oskulasi: $-y + z = 0$, yaitu $z = y$. Bidang normal (normal $\mathbf{T}(0) \propto \langle 0, 1, 1\rangle$): $y + z = 0$.

**CONTOH 12 — LINGKARAN OSKULASI PARABOLA**

Di titik puncak parabola $y = x^2$: $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$, $\mathbf{N}$ menunjuk ke atas. Lingkaran oskulasinya berpusat di $(0, \frac{1}{2})$ dengan persamaan $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Lingkaran ini menempel erat pada parabola: keduanya bersinggungan dengan kelengkungan yang sama.




Lingkaran oskulasi parabola $y = x^2$ di titik asal.

## 5. Torsi (pilihan)

Kelengkungan mengukur pembengkokan kurva dalam bidang oskulasi. **Torsi** $\tau$ mengukur seberapa cepat bidang oskulasi itu sendiri berputar (kurva keluar dari bidangnya):

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}.$$

Kurva bidang mempunyai $\tau = 0$. Untuk heliks $\mathbf{r}''' = \langle \sin t, -\cos t, 0 \rangle$ dan $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle$: pembilang $= 1$, penyebut $= 2$, $\tau = \frac{1}{2}$. Untuk $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, $\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

## 6. Kesalahan umum

- Menyamakan $|\mathbf{r}'|$ dengan 1. Itu hanya benar untuk parametrisasi panjang busur.

- Memakai $|\mathbf{T}'|$ sebagai kelengkungan tanpa membagi dengan $|\mathbf{r}'|$ bila parameter bukan $s$.
- Mengira $\kappa$ konstan berarti lingkaran. Heliks juga mempunyai $\kappa$ konstan.
- Salah memilih arah $\mathbf{N}$: ia selalu menuju sisi cekung, tegak lurus $\mathbf{T}$.

## 7. Ringkasan

- $L = \int_a^b |\mathbf{r}'|\,dt$; $ds/dt = |\mathbf{r}'|$.
- $\kappa = |\mathbf{T}'|/|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$; untuk $y = f(x)$: $|f''|/(1+f'^2)^{3/2}$.
- $\mathbf{T}, \mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|, \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; bidang oskulasi dan lingkaran oskulasi.
- Torsi mengukur keluarnya kurva dari bidang oskulasi.

Berikutnya 13.4: gerak dalam ruang.