Bab 13 · Fungsi Vektor

# 13.2 Turunan dan Integral Fungsi Vektor

Kalkulus fungsi vektor berjalan komponen demi komponen, tetapi tafsir geometrisnya penting: turunan $\mathbf{r}'(t)$ adalah vektor singgung pada kurva.

## 1. Turunan

**DEFINISI**

Turunan fungsi vektor $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

bila limitnya ada. Bila $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ dengan $f, g, h$ terturunkan, maka

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t),\ g'(t),\ h'(t) \rangle.$$

**Tafsir geometris.** $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ adalah vektor sekan dari titik $P = \mathbf{r}(t)$ ke $Q = \mathbf{r}(t+h)$. Dibagi $h$, ia searah sekan; ketika $h \to 0$ arahnya menuju garis singgung. Jadi bila $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, vektor $\mathbf{r}'(t)$ **menyinggung kurva di** $P$, menunjuk ke arah $t$ membesar.

**VEKTOR SINGGUNG SATUAN DAN GARIS SINGGUNG**

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

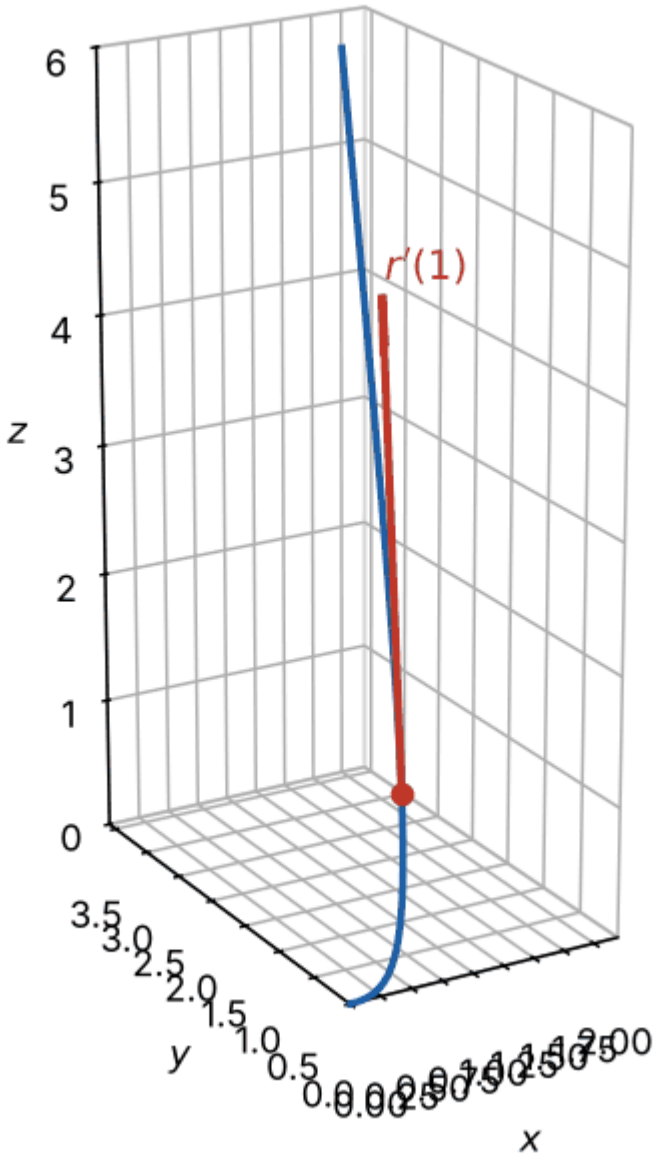
Garis singgung di $\mathbf{r}(t_0)$ adalah garis melalui titik itu dengan arah $\mathbf{r}'(t_0)$: $\mathbf{L}(s) = \mathbf{r}(t_0) + s\,\mathbf{r}'(t_0)$.

**CONTOH 1 — TURUNAN DAN SINGGUNG HELIKS**

$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$: $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$. Di $t = \pi/4$: titik $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, arah $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\rangle$. Garis singgung: $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}(1-s),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+s),\ \frac{\pi}{4} + s \right\rangle$.

**CONTOH 2 — SINGGUNG KUBIK TERPILIN**

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Di $t = 1$: titik $(1, 1, 1)$, arah $\langle 1, 2, 3 \rangle$, garis singgung $\langle 1 + s, 1 + 2s, 1 + 3s \rangle$; $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 1, 2, 3 \rangle$.




Vektor singgung $\mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$ pada kubik terpilin di $(1, 1, 1)$.

**CONTOH 3 — SUDUT PERPOTONGAN DUA KURVA**

Kurva $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ memotong garis $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s, 1 + 3s, 1 + 7s \rangle$ di $(1, 1, 1)$ ($t = 1$, $s = 0$). Arah singgung: $\mathbf{r}_1'(1) = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{r}_2' = \langle 1, 3, 7 \rangle$. $\cos\theta = \dfrac{1 + 6 + 21}{\sqrt{14}\sqrt{59}} = \dfrac{28}{28{,}74} \approx 0{,}974$, $\theta \approx 13{,}0^\circ$. Sudut antara dua kurva didefinisikan sebagai sudut antara garis singgungnya.

## 2. Aturan turunan

**TEOREMA**

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ fungsi vektor terturunkan, $c$ skalar, $f$ fungsi bernilai real. Maka:

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}+\mathbf{v}] = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}] = c\mathbf{u}'$
3. $\dfrac{d}{dt}[f\mathbf{u}] = f'\mathbf{u} + f\mathbf{u}'$
4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$
5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\times\mathbf{v}] = \mathbf{u}'\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v}'$ (urutan pada hasil kali silang harus dijaga)
6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$ (aturan rantai)

**Bukti aturan 4.** Dengan $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$: $\frac{d}{dt}\sum u_i v_i = \sum (u_i' v_i + u_i v_i') = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'$. Aturan 5 dibuktikan serupa dengan menjabarkan komponen hasil kali silang. ■

**CONTOH 4 — HASIL KALI TITIK DAN SILANG**

$\mathbf{u} = \langle t, t^2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, t, t^3\rangle$. Maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = t + t^3 + t^3 = t + 2t^3$ dengan turunan $1 + 6t^2$. Dengan aturan 4: $\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' = \langle 1, 2t, 0\rangle\cdot\langle 1, t, t^3\rangle + \langle t, t^2, 1\rangle\cdot\langle 0, 1, 3t^2\rangle = (1 + 2t^2) + (t^2 + 3t^2) = 1 + 6t^2$. Cocok.

**CONTOH 5 — PANJANG KONSTAN BERARTI TEGAK LURUS**

Jika $|\mathbf{r}(t)| = c$ konstan, maka $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = c^2$. Turunkan: $2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}' = 0$, jadi $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$. Geometrisnya: kurva pada bola berpusat di asal mempunyai singgung yang tegak lurus jari-jari. Hal yang sama berlaku untuk $\mathbf{T}$: karena $|\mathbf{T}| = 1$, maka $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$ (dipakai di 13.3 untuk vektor normal).

**CONTOH 6 — TURUNAN DENGAN ATURAN RANTAI**

$\mathbf{u}(t) = \langle t^2,\, e^t,\, \sin t\rangle$ dan $f(t) = \ln t$: $\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\ln t) = \frac{1}{t}\langle 2\ln t,\; e^{\ln t},\; \cos(\ln t)\rangle = \left\langle \frac{2\ln t}{t},\; 1,\; \frac{\cos\ln t}{t}\right\rangle$.

### Turunan orde tinggi

$\mathbf{r}''(t) = \langle f'', g'', h'' \rangle$ adalah turunan dari $\mathbf{r}'$. Untuk kubik terpilin $\mathbf{r}'' = \langle 0, 2, 6t \rangle$. Vektor $\mathbf{r}''$ akan menjadi percepatan.

Kurva disebut **mulus** bila $\mathbf{r}'$ kontinu dan $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (kecuali mungkin di ujung). Kurva mulus tidak punya sudut tajam atau titik balik tiba-tiba; $\mathbf{T}$ berubah kontinu.

## 3. Integral

**INTEGRAL FUNGSI VEKTOR**

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b f\,dt,\ \int_a^b g\,dt,\ \int_a^b h\,dt \right\rangle.$$

Teorema Dasar Kalkulus berlaku: bila $\mathbf{R}' = \mathbf{r}$, maka $\int_a^b \mathbf{r}\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$. Integral tak tentu menghasilkan $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$, dengan $\mathbf{C}$ vektor konstanta.

**CONTOH 7 — INTEGRAL TENTU**

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \langle \cos t,\ \sin t,\ t \rangle\,dt = \left\langle 1,\ 1,\ \tfrac{\pi^2}{8} \right\rangle$. Sedangkan $\displaystyle\int_0^1 \langle 2t,\ 3t^2,\ e^t \rangle\,dt = \langle 1,\ 1,\ e - 1 \rangle$.

**CONTOH 8 — MASALAH NILAI AWAL**

Cari $\mathbf{r}(t)$ bila $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\ e^t,\ 1 \rangle$ dan $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 2 \rangle$. Integrasi: $\mathbf{r}(t) = \langle t^2,\ e^t,\ t \rangle + \mathbf{C}$. Di $t = 0$: $\langle 0, 1, 0 \rangle + \mathbf{C} = \langle 1, 0, 2 \rangle \Rightarrow \mathbf{C} = \langle 1, -1, 2 \rangle$. Jadi $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1,\ e^t - 1,\ t + 2 \rangle$.

**CONTOH 9 — DUA KALI INTEGRASI**

Percepatan $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$, kecepatan awal $\mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$, posisi awal $\mathbf{r}(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$. Integrasi pertama: $\mathbf{r}' = \langle 0, 2t, 3t^2 \rangle + \langle 1, 0, 0 \rangle = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$. Integrasi kedua: $\mathbf{r} = \langle t, t^2, t^3 \rangle + \langle 0, 1, 2 \rangle = \langle t,\ t^2 + 1,\ t^3 + 2 \rangle$.

**CONTOH 10 — KETEGAKAN LURUS DAN INTEGRAL**

Jika $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t \rangle \cdot 3$ (gerak melingkar jari-jari 3), maka $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ untuk semua $t$, konsisten dengan Contoh 5. Integrasi $\mathbf{r}'$ dari $0$ ke $2\pi$ memberi $\langle 0, 0 \rangle$: perpindahan total nol karena kembali ke titik awal, tetapi jarak tempuh $\int |\mathbf{r}'| = 6\pi$ (13.3).

## 4. Kesalahan umum

- Memakai aturan hasil kali silang dengan urutan terbalik: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ bukan $\mathbf{v}' \times \mathbf{u}$.
- Menulis $|\mathbf{r}|' = |\mathbf{r}'|$: umumnya tidak benar. Panjang vektor posisi tidak sama dengan laju.
- Lupa konstanta vektor $\mathbf{C}$ pada integral tak tentu, atau memperlakukannya sebagai skalar.
- Menyatakan $\mathbf{r}'(t)$ singgung padahal $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ (kurva tidak mulus di titik itu).

## 5. Ringkasan

- $\mathbf{r}' = \langle f', g', h' \rangle$ adalah vektor singgung; $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$.
- Aturan: jumlah, hasil kali dengan skalar, titik, silang, rantai.
- $|\mathbf{r}|$ konstan $\Rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{r}'$.
- Integral per komponen; masalah nilai awal memakai konstanta vektor.

Berikutnya 13.3 Panjang Busur dan Kelengkungan.