Bab 13 · Fungsi Vektor

13.1 Fungsi Vektor dan Kurva Ruang

Di Bab 10 kita menggambarkan kurva bidang dengan persamaan parametrik $x = f(t),\ y = g(t)$. Di ruang, kurva memerlukan tiga fungsi. Menggabungkannya menjadi satu objek bervektor memberi alat yang kuat: **fungsi vektor**, yang memungkinkan kita memakai kalkulus untuk membahas gerak, kecepatan, dan percepatan (13.4).

1. Fungsi vektor

DEFINISI

Fungsi vektor adalah fungsi yang daerah asalnya himpunan bilangan real dan daerah hasilnya himpunan vektor. Di ruang,

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t),\, g(t),\, h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k},$$

dengan f, g, h fungsi bernilai real (disebut *fungsi komponen*). Daerah asal $\mathbf{r}$ adalah irisan daerah asal ketiga komponennya.

CONTOH 1 — DAERAH ASAL

$\mathbf{r}(t) = \langle \ln(4 - t^2),\ \sqrt{t+1},\ \dfrac{1}{t-1} \rangle$. Syarat: $4 - t^2 > 0 \Rightarrow -2 < t < 2; t + 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq -1; t \neq 1$. Daerah asal: $[-1, 1) \cup (1, 2)$.

2. Kurva ruang

Bila t berubah, ujung vektor posisi $\mathbf{r}(t)$ menggambar sebuah **kurva ruang** C. Persamaan parametriknya $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$, dan $\mathbf{r}$ disebut *parametrisasi* C. Satu kurva dapat diparametrisasi dengan banyak cara.

Limit dan kekontinuan

LIMIT DAN KONTINU

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\left\langle \lim_{t\to a}f(t),\ \lim_{t\to a}g(t),\ \lim_{t\to a}h(t)\right\rangle$$

asalkan ketiga limit komponen ada. $\mathbf{r}$ kontinu di a bila $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$; ini setara dengan kekontinuan ketiga komponen.

CONTOH 2 — LIMIT

$\lim_{t\to 0}\left\langle \dfrac{\sin t}{t},\ e^{2t},\ \dfrac{1-\cos t}{t^2}\right\rangle=\langle 1,1,\tfrac{1}{2}\rangle$.

3. Kurva-kurva penting

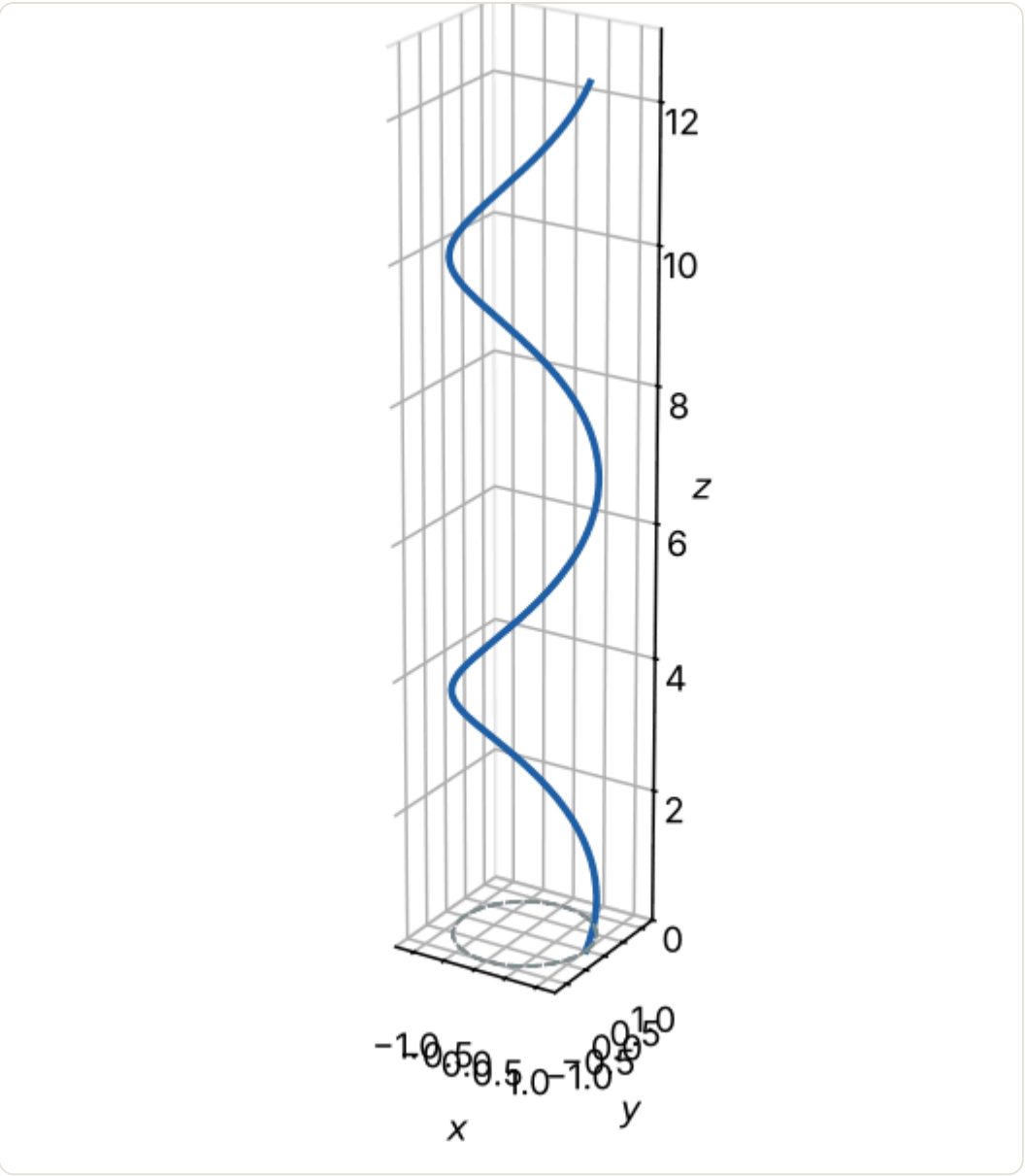
Garis lurus

Garis melalui $\mathbf{r}_0$ dengan arah $\mathbf{v}$: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$ (12.5). Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t)=(1-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r}_1$, $0\le t\le 1$.

Heliks (spiral)

CONTOH 3 — HELIKS

$\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\sin t,t\rangle$. Karena $x^2+y^2=1$, kurva terletak pada silinder lingkaran $x^2+y^2=1$ (12.6). Sementara t naik, titik berputar mengelilingi silinder dan naik dengan laju tetap: $z=t$. Satu putaran (t naik 2π) menaikkan z sebesar 2π. Bentuk umum $\langle a\cos t,\ a\sin t,\ bt\rangle$ berjari-jari a dan "tinggi ulir" $2\pi b$ per putaran. Bila $b<0$ heliks berputar ke arah sebaliknya.



Heliks $\langle \cos t, \sin t, t \rangle$, dengan proyeksi lingkaran di bidang xy.

Kubik terpilin

CONTOH 4 — KUBIK TERPILIN

$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Proyeksi pada bidang xy: $y = x^2$; pada bidang xz: $z = x^3$; pada bidang yz: $z^2 = y^3$. Kurva terletak pada silinder parabolik $y = x^2$ sekaligus silinder $z = x^3$.

4. Kurva sebagai irisan permukaan

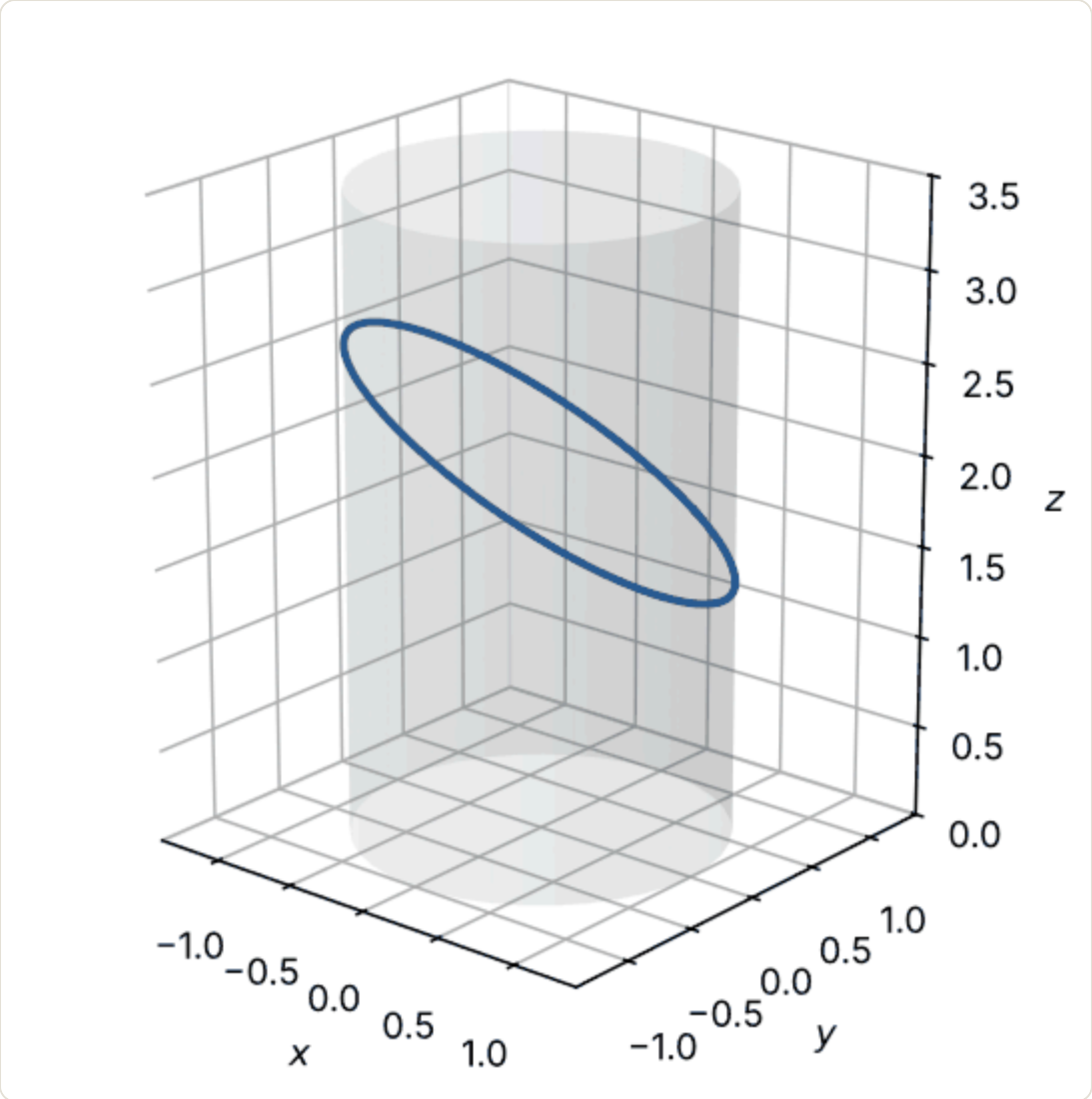
Kurva sering diberikan sebagai perpotongan dua permukaan. Untuk menparametrisasinya, pilih parametrisasi salah satu kurva proyeksi, lalu cari peubah ketiga dari persamaan kedua.

CONTOH 5 — SILINDER DAN BIDANG

Cari parametrisasi perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang $y + z = 2$. Proyeksi pada bidang xy adalah lingkaran satuan: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dari bidang, $z = 2 - y = 2 - \sin t$. Jadi

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\ \sin t,\ 2 - \sin t \rangle.$$

Kurva ini sebuah elips (irisan bidang miring dengan silinder), terletak pada bidang $y + z = 2$.



Elips: perpotongan silinder $x^2 + y^2 = 1$ dengan bidang $y + z = 2$.

CONTOH 6 — PARABOLOID DAN BIDANG

Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan $z = 4$: lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ pada tinggi 4, $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t,\ 2\sin t,\ 4 \rangle$. Perpotongan $z = x^2 + y^2$ dengan bidang $y = x$: $z = 2x^2$, $\mathbf{r}(t) = \langle t,\ t,\ 2t^2 \rangle$ (parabola).

CONTOH 7 — BOLA DAN SILINDER (KURVA VIVIANI)

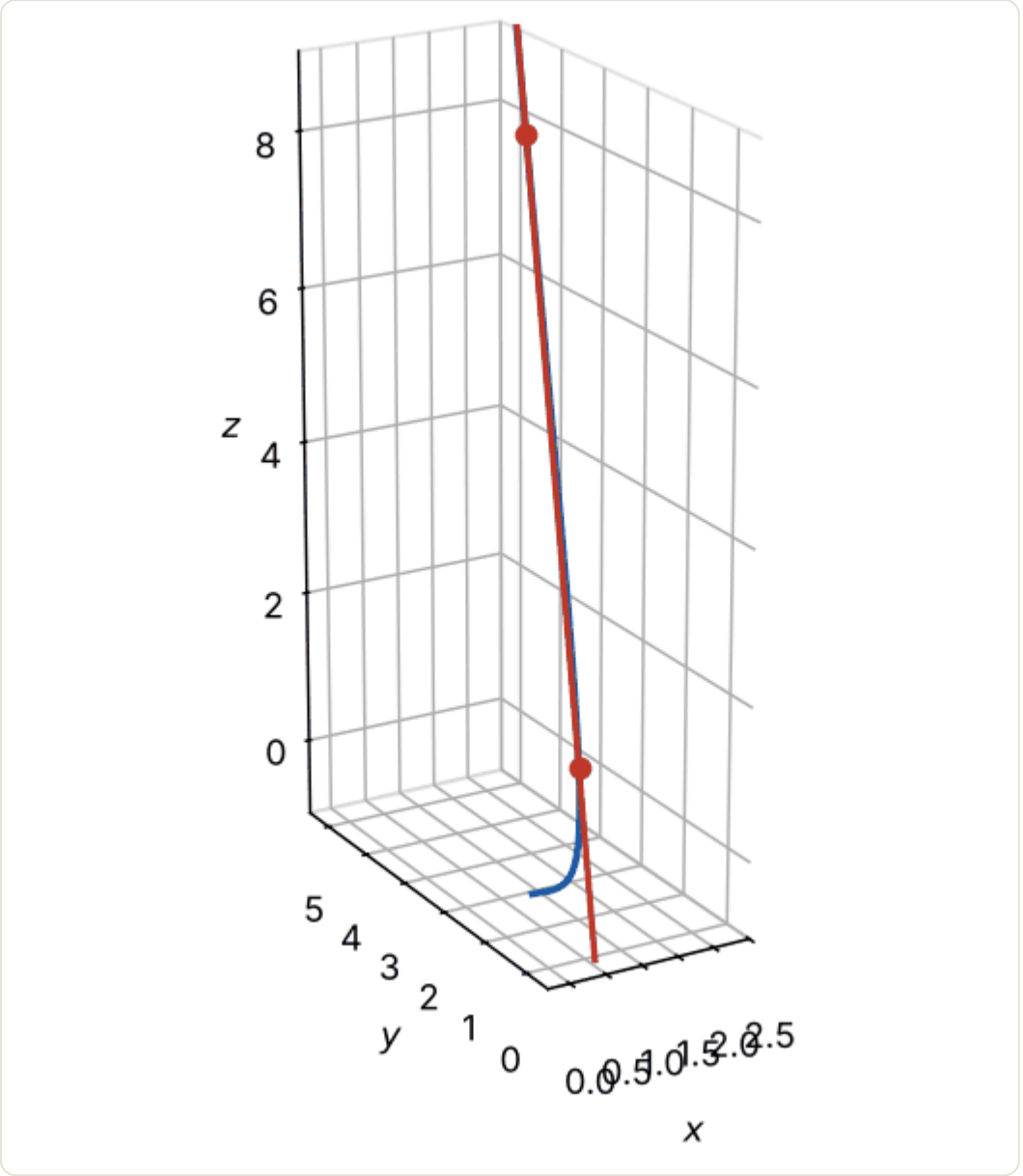
Bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dan silinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$, yaitu $x^2 + y^2 = 2x$. Parametrisasi silinder: $x = 1 + \cos t$, $y = \sin t$. Maka $z^2 = 4 - 2x = 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}$, jadi $z = \pm 2 \sin \frac{t}{2}$. Kurva (dua cabang untuk $0 \le t \le 2\pi$): $\langle 1 + \cos t,\ \sin t,\ 2\sin \frac{t}{2} \rangle$ dan cerminannya di $z \to -z$.

5. Perpotongan versus tabrakan

Dua kurva yang berpotongan di suatu titik belum tentu "bertabrakan". Misalkan dua partikel bergerak sepanjang kurva $\mathbf{r}_1(t)$ dan $\mathbf{r}_2(s)$. Kurva berpotongan bila ada t, s dengan $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(s)$. Partikel *bertabrakan* bila $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$: titik yang sama pada waktu yang sama.

CONTOH 8 — TITIK POTONG DAN TABRAKAN

$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ dan garis sekan $\mathbf{r}_2(s) = \langle 1 + s,\ 1 + 3s,\ 1 + 7s \rangle$. Samakan: $t = 1 + s$, $t^2 = 1 + 3s$, $t^3 = 1 + 7s$. Dari yang pertama dan kedua: $(1+s)^2 = 1 + 3s \Rightarrow s^2 - s = 0 \Rightarrow s = 0$ atau $s = 1$. Untuk $s = 0$: $t = 1$, dan $t^3 = 1 = 1 + 0$ benar: titik $(1, 1, 1)$. Untuk $s = 1$: $t = 2$, $t^3 = 8 = 1 + 7$ benar: titik $(2, 4, 8)$. Jadi dua titik potong. Tabrakan memerlukan $t = s$: dari $t = 1 + s$ mustahil. Kedua partikel tidak pernah bertabrakan, meskipun jalurnya berpotongan.



Kubik terpilin dan garis sekan yang memotongnya di $(1, 1, 1)$ dan $(2, 4, 8)$.

6. Kesalahan umum

- Menganggap kurva dan parametrisasinya sama. Kurva adalah himpunan titik; parametrisasi juga menentukan arah dan kecepatan penelusuran.
- Lupa memeriksa daerah asal tiap komponen (akar, logaritma, penyebut).
- Menyamakan perpotongan kurva dengan tabrakan partikel.
- Pada parametrisasi irisan permukaan: mengambil satu proyeksi tetapi lupa memeriksa kedua persamaan permukaan.

7. Ringkasan

- $\mathbf{r}(t) = \langle f, g, h \rangle$; limit dan kekontinuan dihitung per komponen.
- Kurva penting: garis $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, heliks $\langle a\cos t, a\sin t, bt \rangle$, kubik terpilin $\langle t, t^2, t^3 \rangle$.
- Parametrisasi irisan permukaan: parametrisasikan proyeksi, lalu selesaikan peubah ketiga.
- Perpotongan jalur $\neq$ tabrakan.

Berikutnya 13.2: turunan dan integral fungsi vektor.