Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.6 Silinder dan Permukaan Kuadrik

Pada 12.5 kita mempelajari permukaan paling sederhana: bidang. Subbab ini membahas permukaan lengkung yang persamaannya berderajat dua: **silinder** dan **permukaan kuadrik**. Permukaan ini akan sering muncul sebagai grafik fungsi dua peubah (Bab 14) dan sebagai batas daerah integral rangkap tiga (Bab 15).

1. Jejak (trace)

Permukaan di ruang sulit digambar langsung. Cara yang andal: potong permukaan dengan bidang-bidang sejajar bidang koordinat, lalu amati kurva irisannya.

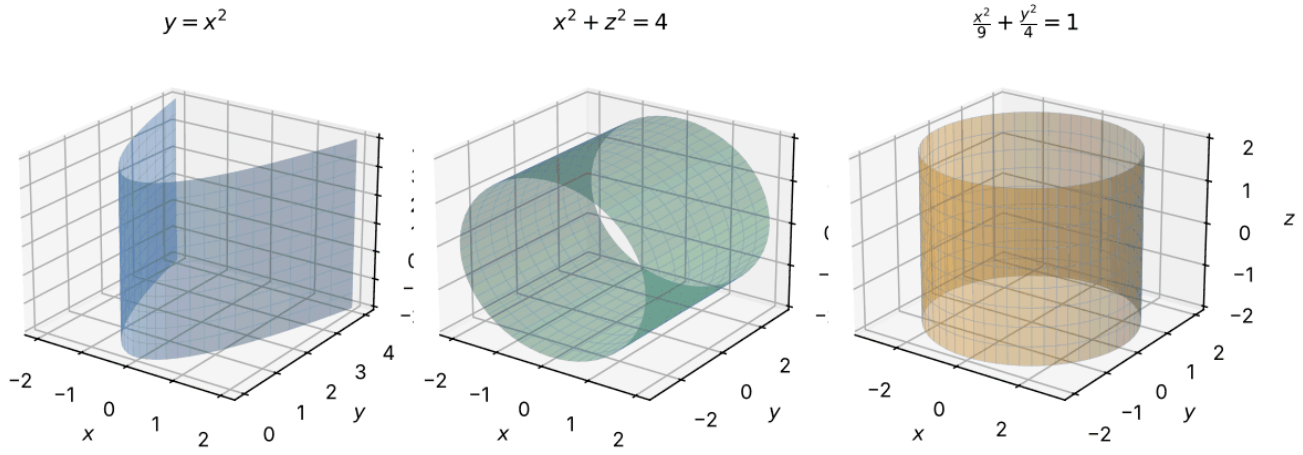
> **DEFINISI — JEJAK**
>
> **Jejak** suatu permukaan S adalah kurva perpotongan S dengan sebuah bidang. Bidang $x = k$ memberi jejak di bidang yz-sejajar, bidang $y = k$ memberi jejak xz-sejajar, dan bidang $z = k$ memberi jejak xy-sejajar (sering disebut *kurva ketinggian* atau *irisan horizontal*).

Dengan menggabungkan beberapa jejak, bentuk permukaan terbayang seperti tumpukan irisan roti.

2. Silinder

> **DEFINISI — SILINDER**
>
> **Silinder** adalah permukaan yang dibentuk oleh semua garis (disebut *garis pelukis*) yang sejajar suatu garis tertentu dan memotong suatu kurva bidang yang diberikan.

Kuncinya: *persamaan yang tidak memuat satu peubah* menggambarkan silinder yang garis pelukisnya sejajar sumbu peubah yang hilang. Persamaan di $\mathbb{R}^3$ yang hanya memuat x dan y adalah kurva di bidang xy yang "ditarik" sepanjang sumbu z.



Contoh silinder: kurva bidang yang digeser sepanjang sumbu yang peubahnya tidak muncul dalam persamaan.

CONTOH 1 — SILINDER PARABOLIK

$z = x^2$ tidak memuat y. Untuk setiap y, irisan $y = k$ adalah parabola $z = x^2$ yang sama. Jadi permukaannya adalah **silinder parabolik** dengan garis pelukis sejajar sumbu y.

CONTOH 2 — SILINDER LINGKARAN

$x^2 + y^2 = 1$ di $\mathbb{R}^3$: setiap bidang $z = k$ memotongnya di lingkaran satuan. Hasilnya pipa tak hingga berjari-jari 1 dengan sumbu z sebagai sumbu simetri. Sebaliknya $x^2 + z^2 = 4$ adalah silinder berjari-jari 2 sepanjang sumbu y.

CONTOH 3 — SILINDER HIPERBOLIK DAN ELIPTIK

$y^2 - z^2 = 1$ (tanpa x): silinder hiperbolik sepanjang sumbu x. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$: silinder eliptik sepanjang sumbu y.

HATI-HATI

Di bidang, $x^2 + y^2 = 1$ adalah lingkaran; di ruang ia silinder. Selalu periksa ruang tempat persamaan dibaca. Untuk membatasi silinder menjadi lingkaran saja, tambahkan persamaan kedua, mis. $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.

3. Permukaan kuadrik

DEFINISI — KUADRIK

Permukaan kuadrik adalah grafik persamaan derajat dua dalam tiga peubah:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Dengan translasi dan rotasi, persamaan ini dapat disederhanakan menjadi salah satu dari dua bentuk baku: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ atau $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

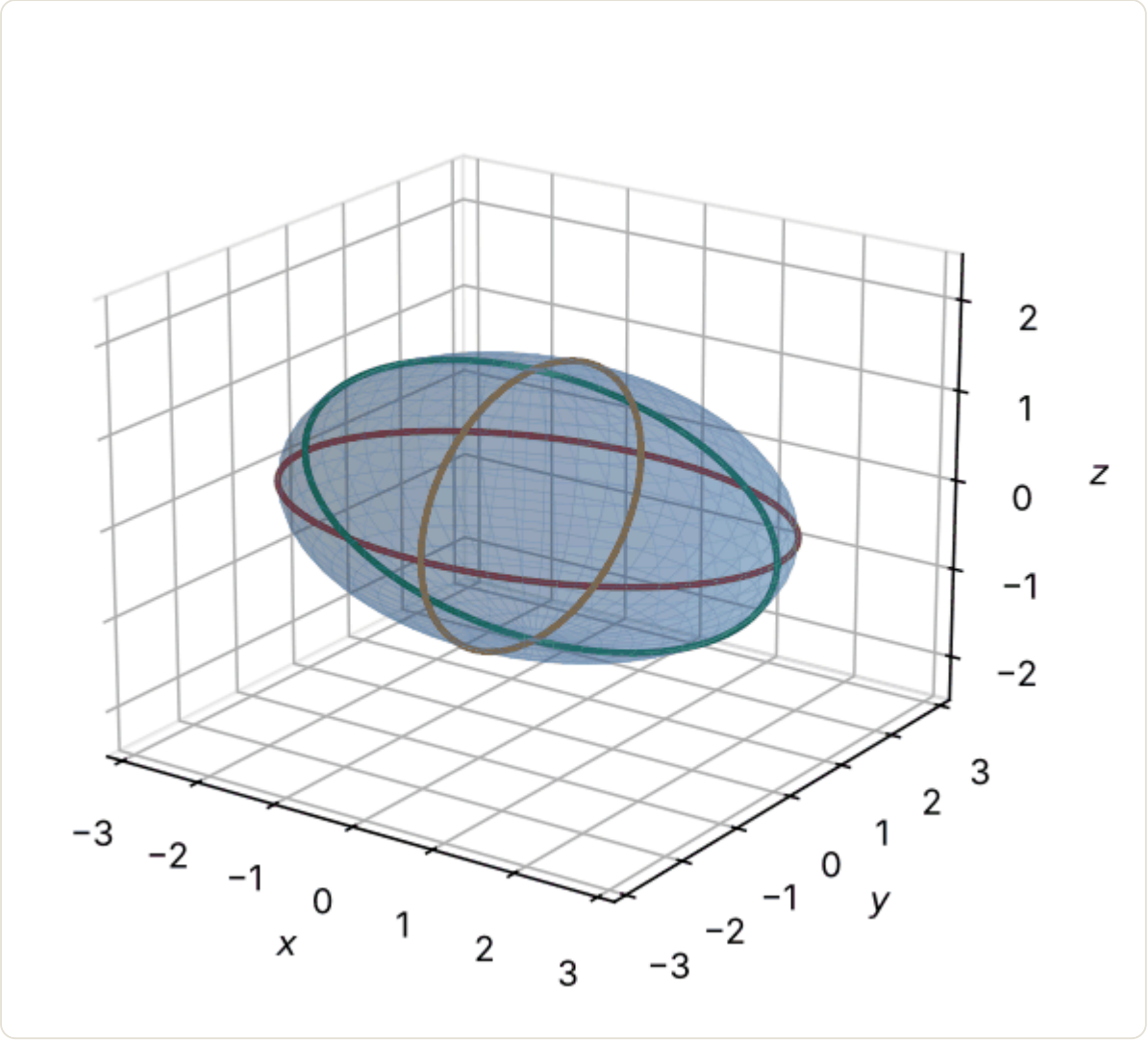
Berikut enam jenis utama (konstanta $a, b, c > 0$). Untuk tiap jenis kita lihat jejaknya.

3.1 Elipsoid

ELIPSOID

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak di $z = k$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$, elips untuk $|k| < c$, satu titik untuk $|k| = c$, kosong untuk $|k| > c$. Jejak di bidang lain juga elips. Titik potong sumbu: $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Jika $a = b = c$, elipsoid menjadi bola.



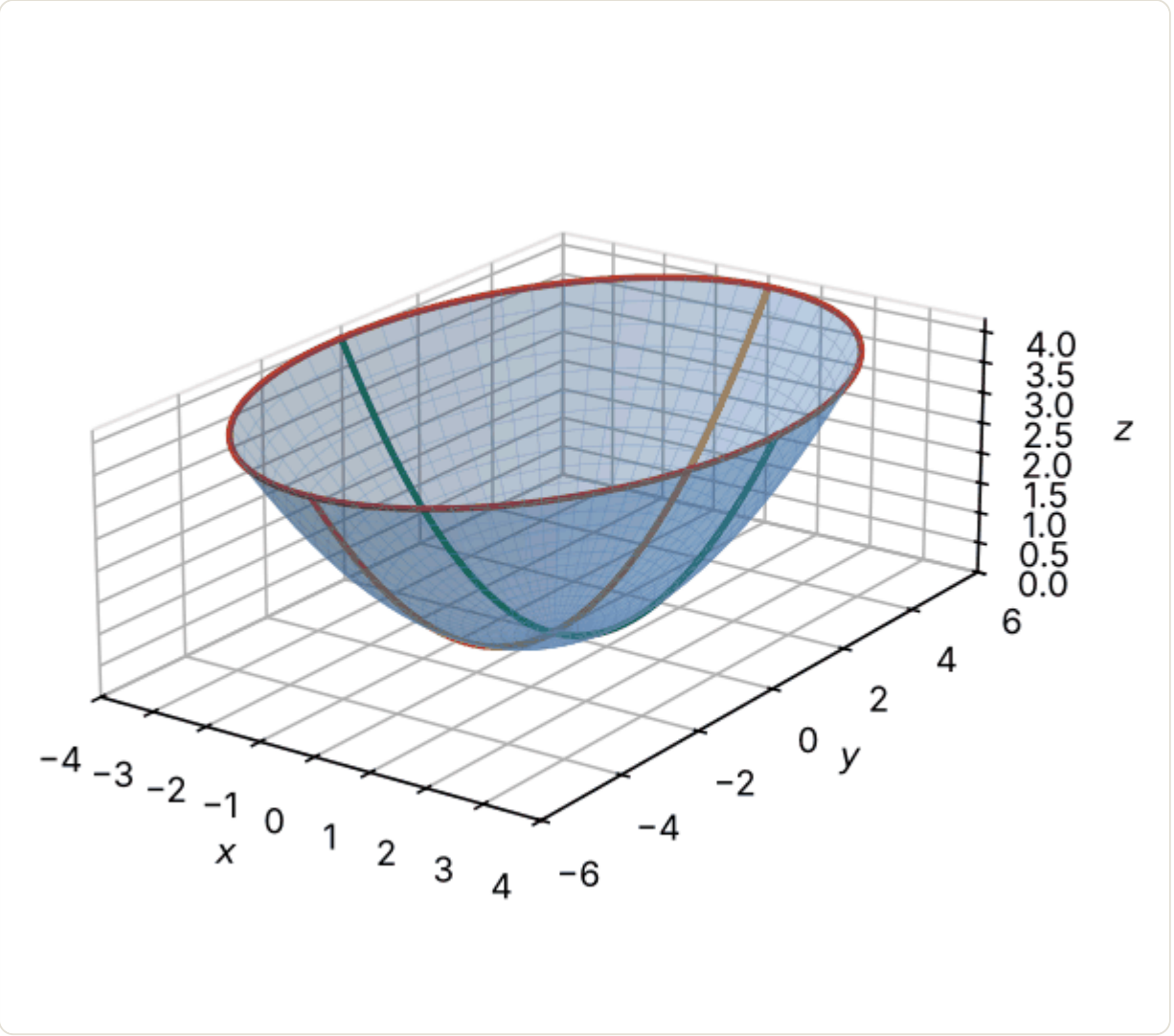
Elipsoid; semua jejaknya elips.

3.2 Paraboloid eliptik

PARABOLOID ELIPTIK

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips untuk $k > 0$, titik asal untuk $k = 0$, kosong untuk $k < 0$. Jejak $x = k$ dan $y = k$: parabola. Bentuk seperti mangkuk atau antena parabola yang membuka ke atas. Untuk $a = b$ disebut paraboloid putar.



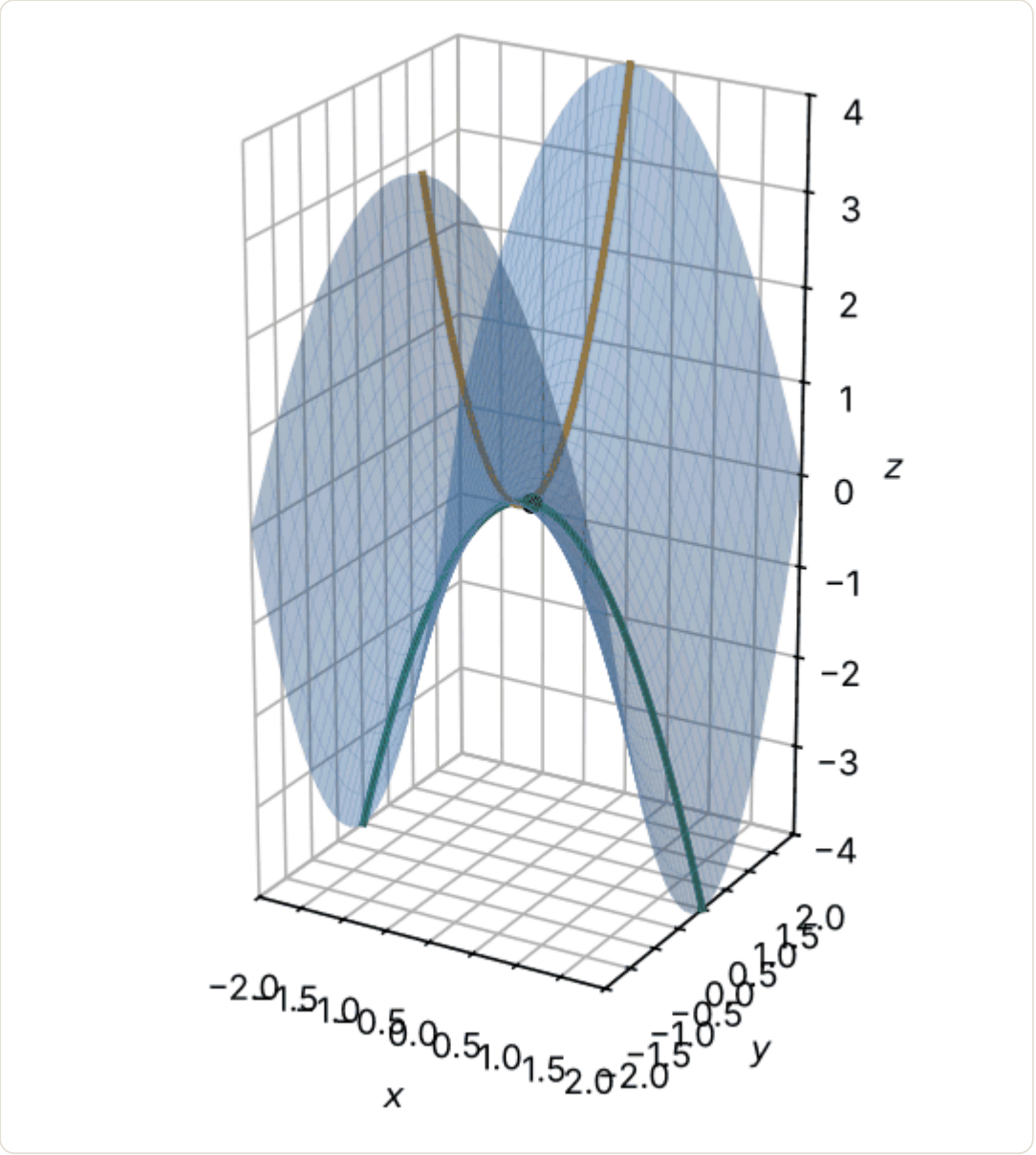
Paraboloid eliptik $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.

3.3 Paraboloid hiperbolik

PARABOLOID HIPERBOLIK (PELANA)

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Jejak $z = k$: hiperbola (untuk $k \neq 0$), dua garis berpotongan $y = \pm\frac{b}{a}x$ untuk $k = 0$. Jejak $x = k$: parabola membuka ke atas; jejak $y = k$: parabola membuka ke bawah. Titik asal adalah *titik pelana*: minimum sepanjang sumbu y tetapi maksimum sepanjang sumbu x.



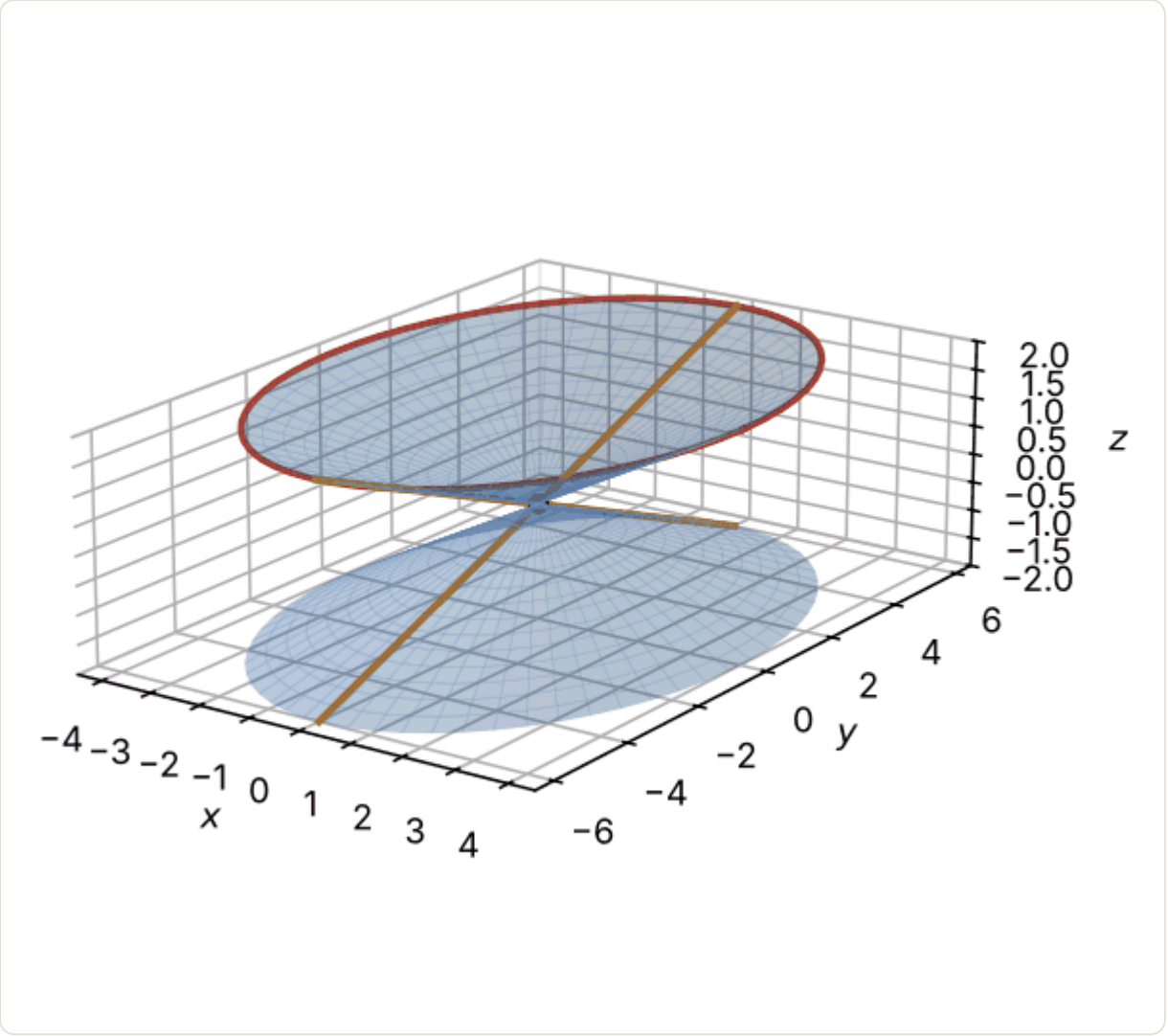
Paraboloid hiperbolik (pelana).

3.4 Kerucut eliptik

KERUCUT ELIPTIK

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ yang membesar dengan $|k|$ (satu titik di $k = 0$). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola (dan dua garis berpotongan di $k = 0$). Permukaan terdiri dari dua "lembar" yang bertemu di titik asal.



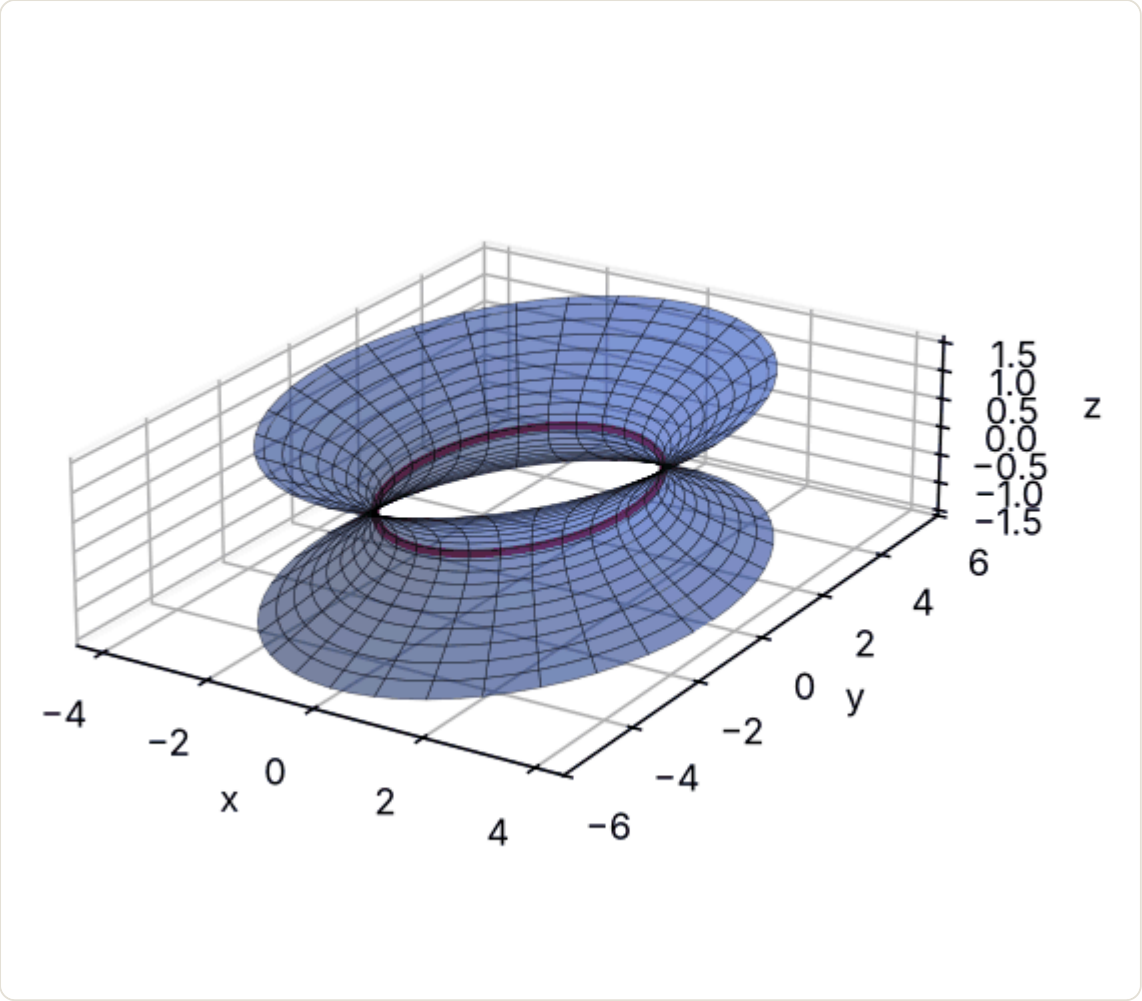
Kerucut eliptik.

3.5 Hiperboloid satu lembar

HIPERBOLOID SATU LEMBAR

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jejak $z = k$: elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ untuk semua k, paling kecil di $k = 0$ ("pinggang"). Jejak $x = k$, $y = k$: hiperbola. Satu permukaan yang tersambung, seperti menara pendingin.



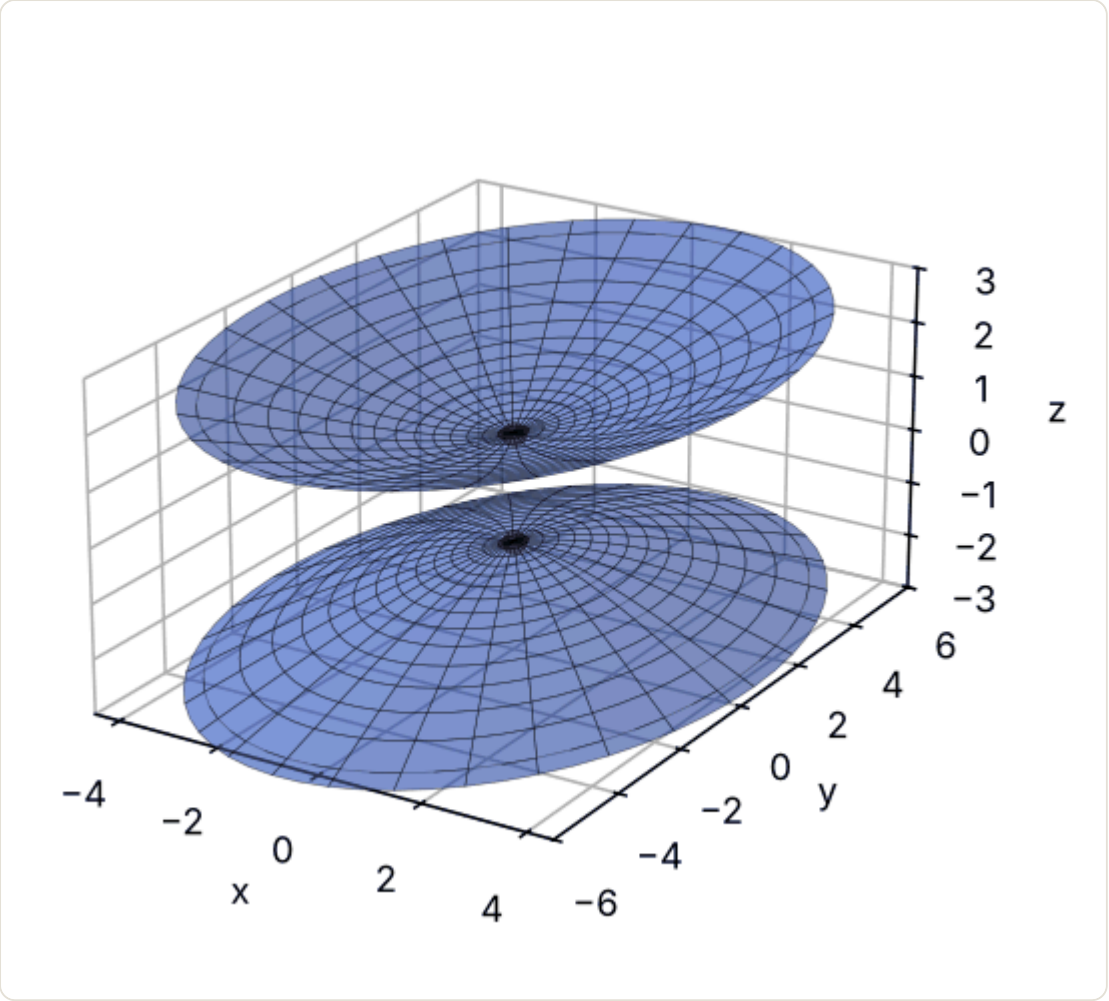
Hiperboloid satu lembar.

3.6 Hiperboloid dua lembar

HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Jejak $z=k$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1$, kosong untuk $|k|<c$, titik untuk $|k|=c$, elips untuk $|k|>c$. Jejak $x=k$, $y=k$: hiperbola. Permukaannya terdiri dari *dua bagian terpisah* ($z\geq c$ dan $z\leq -c$).



Hiperboloid dua lembar.

Tabel ringkasan

Permukaan	Persamaan baku	Jejak $z = k$	Jejak vertikal
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert < c$)	elips
Paraboloid eliptik	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips ($k > 0$)	parabola
Paraboloid hiperbolik	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$	hiperbola	parabola
Kerucut eliptik	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	elips	hiperbola
Hiperboloid satu lembar	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips (semua k)	hiperbola
Hiperboloid dua lembar	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\lvert k \rvert > c$)	hiperbola

CARA CEPAT MENGENALI

- Semua peubah berpangkat dua, ruas kanan 1: ada tanda minus? Tidak ada → elipsoid; satu minus → hiperboloid satu lembar; dua minus → hiperboloid dua lembar.
- Ruas kanan 0 dengan semua pangkat dua → kerucut.
- Satu peubah berpangkat satu, dua lainnya kuadrat → paraboloid (elips jika tanda sama, hiperbolik jika berbeda).

4. Contoh

CONTOH 4 — MENGENALI PERMUKAAN

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$. Lengkapkan kuadrat x: $(x-3)^2 + 2z^2 = y - 1$, yaitu $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$. Ini paraboloid eliptik dengan sumbu sejajar sumbu y dan titik puncak $(3, 1, 0)$, membuka ke arah y positif.

CONTOH 5 — KUADRIK DENGAN PERGESERAN

$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 1$. Lengkapkan kuadrat: $(x-1)^2 - (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$. Persamaannya $\dfrac{(x-1)^2}{2} - \dfrac{(y-1)^2}{2} + \dfrac{(z-1)^2}{2} = 1$: hiperboloid satu lembar dengan pusat $(1, 1, 1)$ dan sumbu sejajar sumbu y (peubah yang bertanda minus).

CONTOH 6 — ELIPSOID DARI PERSAMAAN UMUM

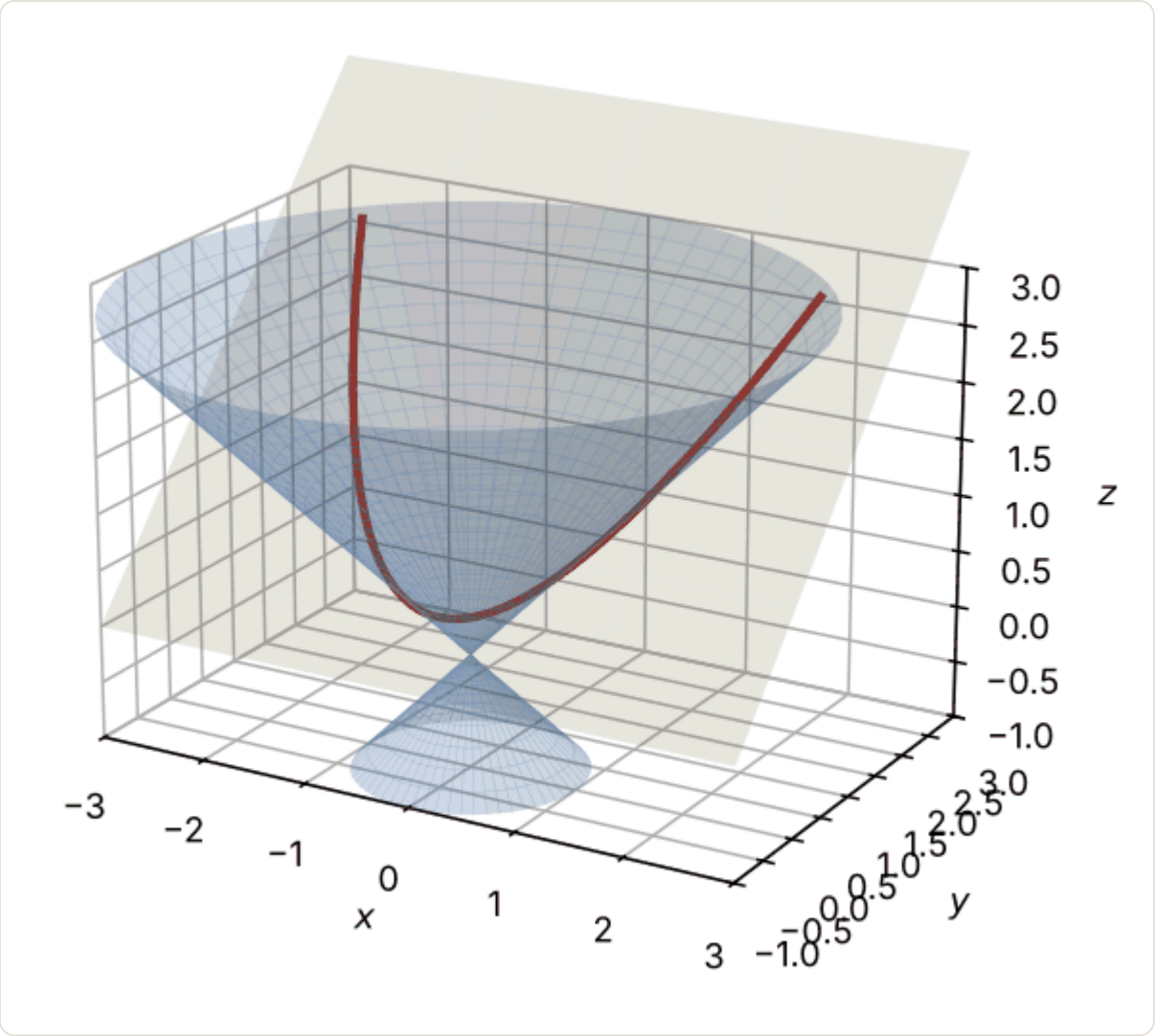
$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 8x + 2y - 36z + 13 = 0 \to 4(x-1)^2 + (y+1)^2 + 9(z-2)^2 = -13 + 4 + 1 + 36 = 28$. Bagi 28: $\dfrac{(x-1)^2}{7} + \dfrac{(y+1)^2}{28} + \dfrac{(z-2)^2}{28/9} = 1$. Elipsoid dengan pusat $(1, -1, 2)$, setengah sumbu $\sqrt{7},\ \sqrt{28},\ \sqrt{28}/3$.

CONTOH 7 — HIPERBOLOID DUA LEMBAR

$z^2 - x^2 - y^2 = 4$ adalah hiperboloid dua lembar: jejak $z = k$ adalah $x^2 + y^2 = k^2 - 4$, kosong untuk $|k| < 2$, titik di $k = \pm 2$ (titik puncak $(0, 0, \pm 2)$). Sedangkan $z^2 - x^2 - y^2 = -4$ (ruas kanan negatif) berarti $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, hiperboloid satu lembar. Perubahan tanda di ruas kanan mengubah jenis permukaan.

CONTOH 8 — IRISAN DUA PERMUKAAN

Kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ dipotong bidang $z = 1 + y$: substitusi, $(1+y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = 1 + 2y$, yaitu $y = \frac{x^2 - 1}{2}$. Proyeksi irisan pada bidang xy adalah parabola, dan kurva irisannya sendiri adalah parabola di bidang miring itu. Inilah salah satu *irisan kerucut*: elips, parabola, atau hiperbola, tergantung kemiringan bidang potong.



Kerucut yang dipotong bidang menghasilkan kurva irisan.

CONTOH 9 — BENDA PADAT YANG DIBATASI PERMUKAAN

Daerah di dalam paraboloid $z = x^2 + y^2$ dan di bawah bidang $z = 4$: jejak $z = 4$ adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Untuk tiap $z \in [0, 4]$ irisannya cakram berjari-jari $\sqrt{z}$. Volumnya (dengan irisan) $\displaystyle\int_0^4 \pi z \, dz = 8\pi$.

CONTOH 10 — SATELIT ANTENA

Antena parabola dengan lebar 2 m dan kedalaman 0,25 m dimodelkan $z = kr^2$, $r^2 = x^2 + y^2$: di $r = 1$, $z = 0{,}25$, jadi $k = 0{,}25$; persamaan $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$. Paraboloid putar ini fokus pada $z = \frac{1}{4k} = 1$ m: semua sinar sejajar sumbu terpantul menuju titik tersebut.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x^2 + y^2 = 1$ di ruang adalah lingkaran. Ia silinder (peubah z bebas).
- Menyamakan paraboloid dan kerucut: kerucut $z^2 = \ldots$ (kuadrat), paraboloid $z = \ldots$ (linear).
- Mengabaikan tanda: satu minus (satu lembar) vs dua minus (dua lembar).
- Menggambar permukaan dari satu jejak saja. Gabungkan beberapa jejak.
- Lupa melengkapkan kuadrat sehingga pusat/puncak salah.

6. Ringkasan

- Jejak: irisan permukaan dengan bidang $x = k$, $y = k$, atau $z = k$.
- Silinder: persamaan tanpa satu peubah; garis pelukis sejajar sumbu peubah itu.
- Enam kuadrik: elipsoid, paraboloid eliptik/hiperbolik, kerucut, hiperboloid satu/dua lembar.
- Untuk mengenali: lengkapkan kuadrat, bawa ke bentuk baku, lihat tanda dan pangkat.

Bab 12 berakhir di sini. Bab berikutnya, 13.1, memakai vektor untuk menggambarkan kurva dan gerak di ruang.