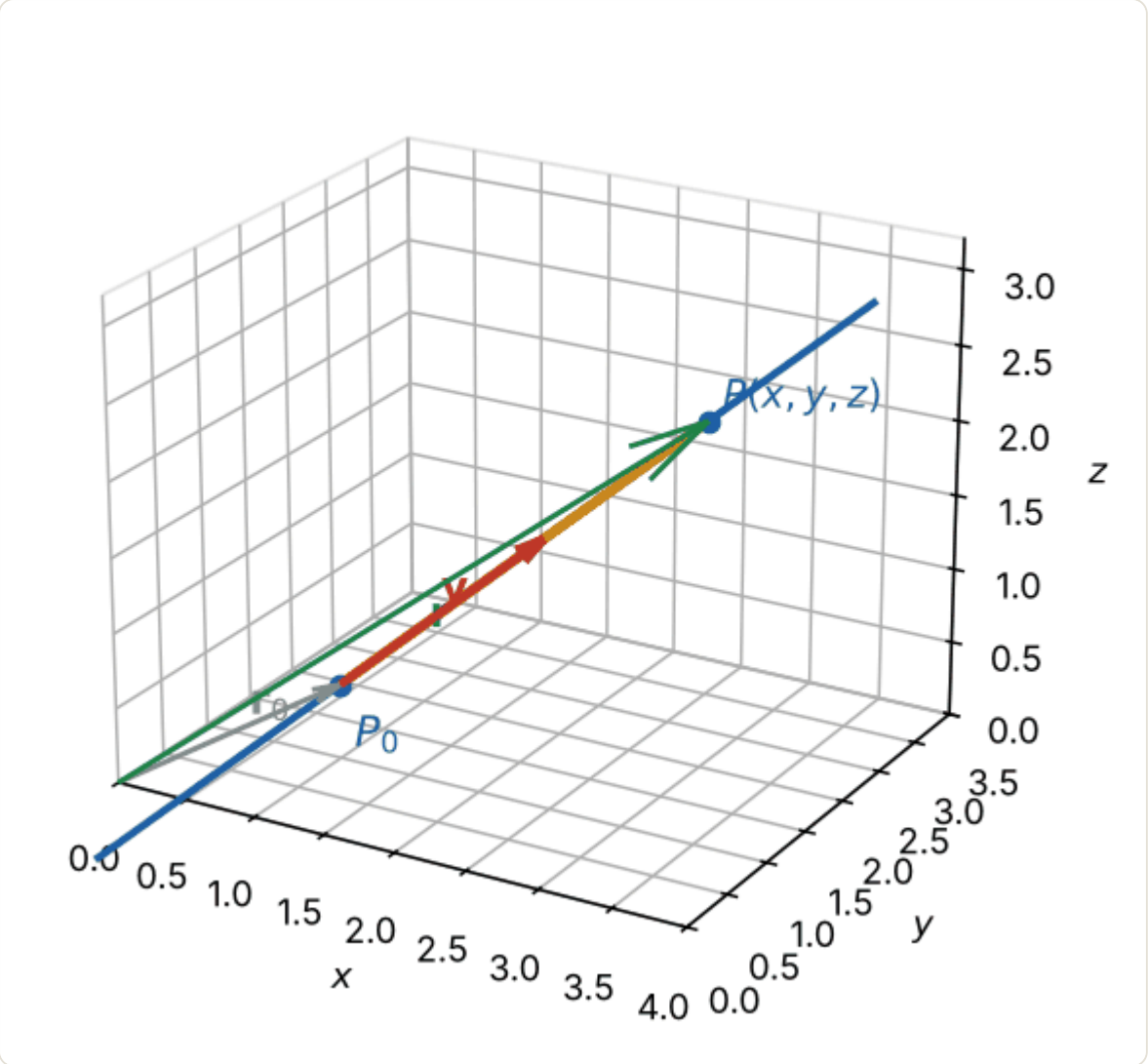
Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.5 Persamaan Garis dan Bidang

Di bidang, sebuah garis ditentukan oleh sebuah titik dan kemiringan. Di ruang, *kemiringan* diganti dengan **vektor arah**. Bidang di ruang ditentukan oleh sebuah titik dan sebuah **vektor normal**. Subbab ini memakai vektor untuk menuliskan garis dan bidang, mencari jarak dan sudut, serta perpotongan.

1. Persamaan garis

Misalkan L adalah garis yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan vektor posisi $\mathbf{r}_0$, sejajar vektor tak nol $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ (**vektor arah**). Titik $P(x, y, z)$ berada di L bila $\overrightarrow{P_0P}$ sejajar $\mathbf{v}$, yaitu $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ untuk suatu skalar t.



Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; $P = P_0 + t\mathbf{v}$.

PERSAMAAN GARIS

- **Vektor:** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$.
- **Parametrik:** $x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$
- **Simetrik** (bila $a, b, c \neq 0$): $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Bilangan a, b, c disebut **bilangan arah** garis.

CONTOH 1 — GARIS DARI TITIK DAN ARAH

Garis melalui $(5, 1, 3)$ sejajar $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$: $x = 5 + t,\ y = 1 + 4t,\ z = 3 - 2t$. Dua titik lain: $t = 1 \Rightarrow (6, 5, 1)$; $t = -1 \Rightarrow (4, -3, 5)$.

CONTOH 2 — GARIS MELALUI DUA TITIK

$A(2, 4, -3)$, $B(3, -1, 1)$. Arah $\overrightarrow{AB} = \langle 1, -5, 4 \rangle$. Garis: $x = 2 + t,\ y = 4 - 5t,\ z = -3 + 4t$. Persamaan simetrik: $x - 2 = \dfrac{y - 4}{-5} = \dfrac{z + 3}{4}$. Titik potong dengan bidang xy ($z = 0$): $t = \frac{3}{4}$, titik $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

CONTOH 3 — RUAS GARIS

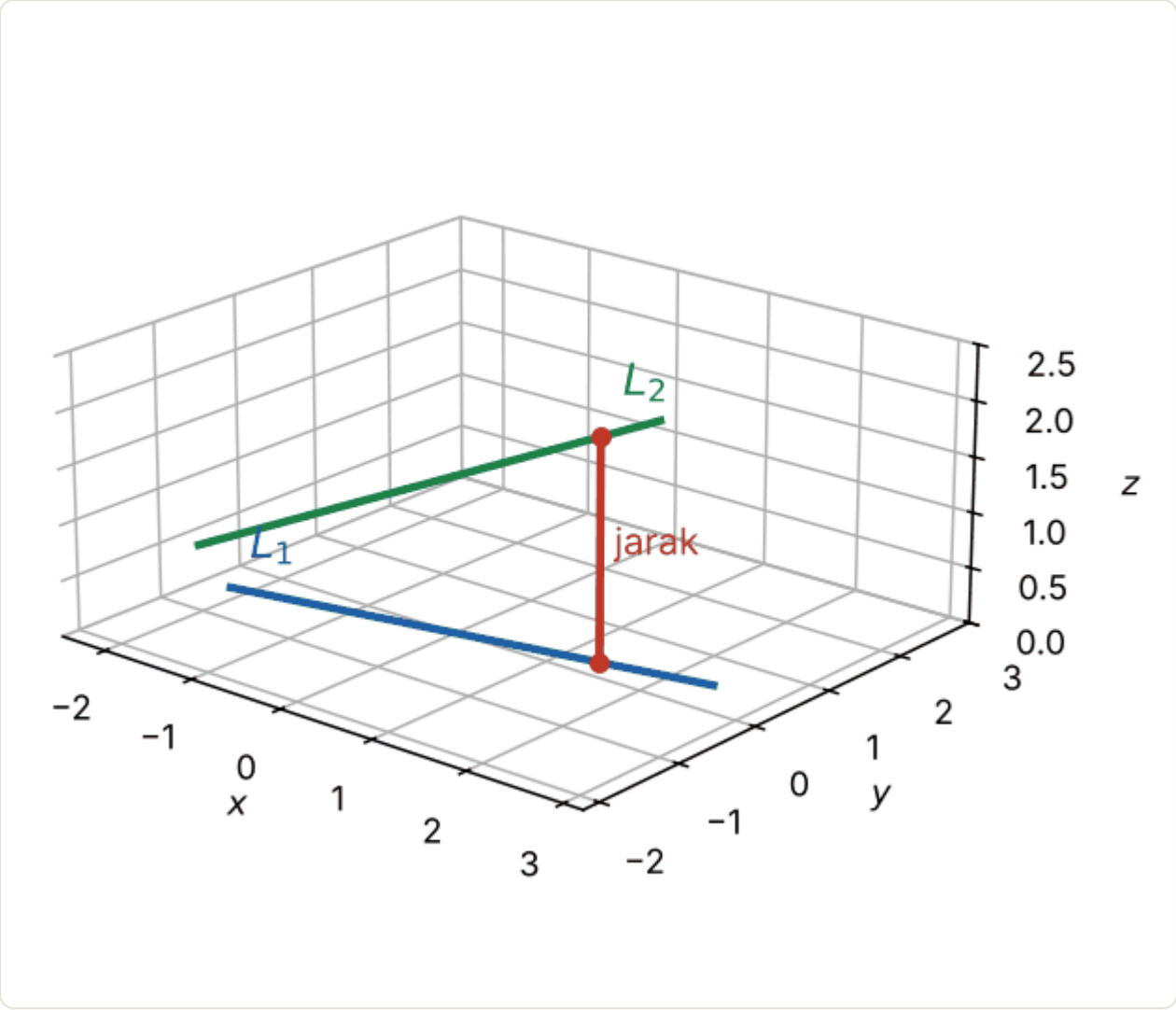
Ruas dari $\mathbf{r}_0$ ke $\mathbf{r}_1$: $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, $0 \leq t \leq 1$. Titik tengahnya $t = \frac{1}{2}$.

Hubungan dua garis

Dua garis di ruang dapat: **sejajar** (arah sebanding), **berpotongan**, atau **bersilangan** (*skew*: tidak sejajar dan tidak berpotongan, tidak sebidang).

CONTOH 4 — APAKAH BERSILANGAN?

$L_1:\ x = 1 + t,\ y = -2 + 3t,\ z = 4 - t$ dan $L_2:\ x = 2s,\ y = 3 + s,\ z = -3 + 4s$. Arahnya $\langle 1, 3, -1 \rangle$ dan $\langle 2, 1, 4 \rangle$ tidak sebanding, jadi tidak sejajar. Cari potongan: $1 + t = 2s$, $-2 + 3t = 3 + s$, $4 - t = -3 + 4s$. Dari yang pertama $t = 2s - 1$; ke yang kedua: $-2 + 6s - 3 = 3 + s \Rightarrow s = \frac{8}{5}, t = \frac{11}{5}$. Cek yang ketiga: $4 - \frac{11}{5} = \frac{9}{5}$, sedangkan $-3 + \frac{32}{5} = \frac{17}{5}$. Tidak sama, jadi tidak berpotongan: garis **bersilangan**.

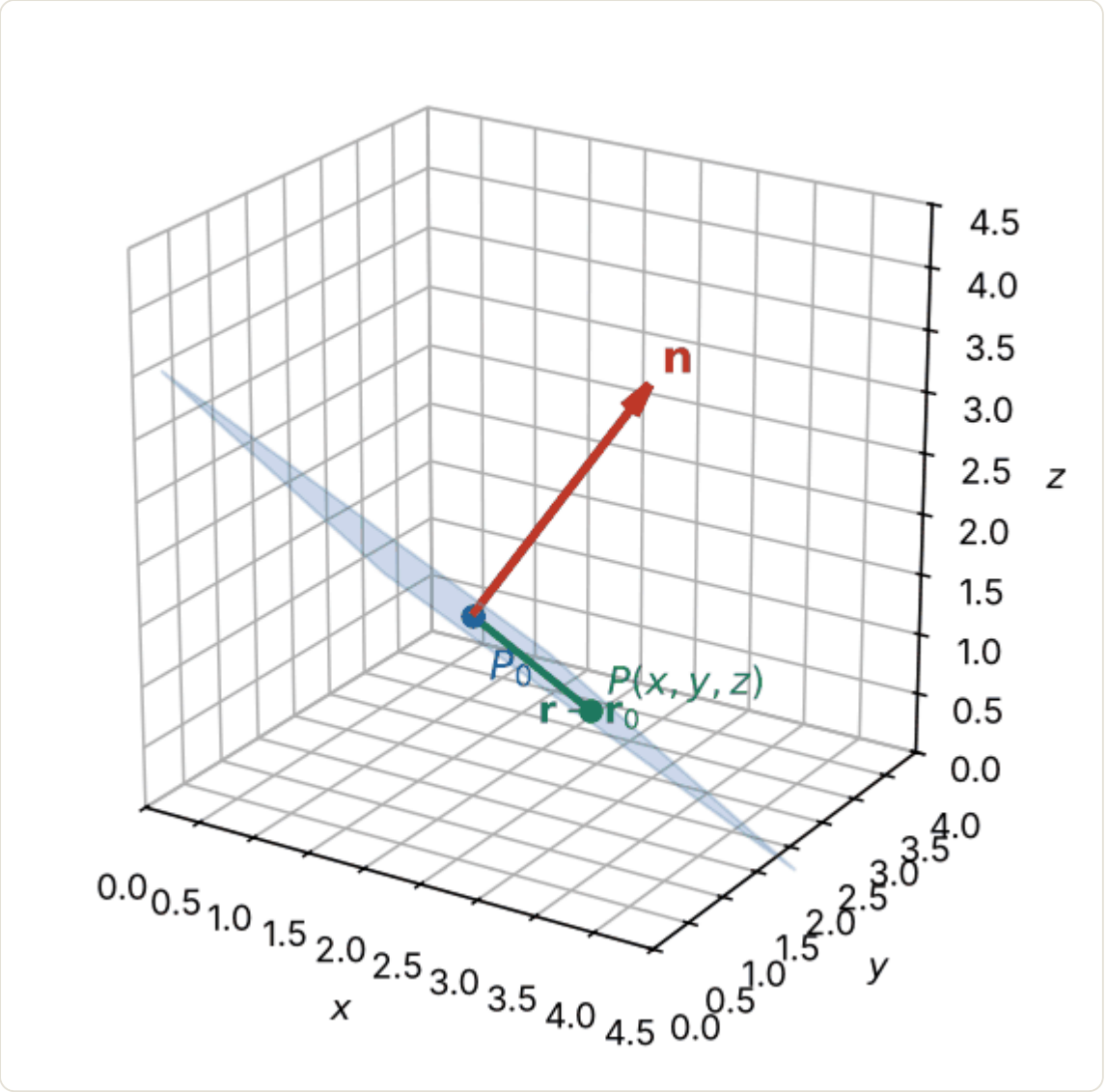


Garis bersilangan dan ruas terpendek yang menghubungkannya (merah).

2. Persamaan bidang

Sebuah bidang ditentukan oleh titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ padanya dan **vektor normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ yang tegak lurus bidang. Titik $P(x, y, z)$ ada di bidang bila $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$



Bidang melalui P_0 dengan normal $\mathbf{n}$.

PERSAMAAN BIDANG

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad ax+by+cz+d=0, \quad d=-(a$$

Vektor $\langle a,b,c\rangle$ adalah normal bidang $ax+by+cz+d=0$.

CONTOH 5 — BIDANG DARI TITIK DAN NORMAL

Titik $(2,4,-1)$, normal $\langle 2,3,4\rangle$: $2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0 \Rightarrow 2x+3y+4z=12$. Titik potong sumbu: $x=6$, $y=4$, $z=3$.

CONTOH 6 — BIDANG MELALUI TIGA TITIK

$P(1,3,2)$, $Q(3,-1,6)$, $R(5,2,0)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle 2,-4,4\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 4,-1,-2\rangle$. Normal $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle (-4)(-2) - 4(-1),\ 4\cdot 4 - 2\cdot(-2),\ 2(-1) - (-4)4\rangle = \langle 12, 20, 14\rangle$, atau disederhanakan $\langle 6, 10, 7\rangle$. Bidang: $6x + 10y + 7z = 6 + 30 + 14 = 50$. Cek Q: $18 - 10 + 42 = 50$ ✓; R: $30 + 20 + 0 = 50$ ✓.

CONTOH 7 — BIDANG MEMUAT GARIS DAN TITIK

Bidang yang memuat titik $A(3,-1,-2)$ dan garis $x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = -4 + t$? Titik pada garis: $B(0,1,-4)$ ($t = 0$), arah $\mathbf{v} = \langle 2,1,1\rangle$. $\overrightarrow{BA} = \langle 3,-2,2\rangle$. Normal $= \mathbf{v} \times \overrightarrow{BA} = \langle 1\cdot 2 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 3 - 2\cdot 2,\ 2(-2) - 1\cdot 3\rangle = \langle 4,-1,-7\rangle$. Bidang: $4x - (y-1) - 7(z+4) = 0 \Rightarrow 4x - y - 7z = 27$. Cek A: $12 + 1 + 14 = 27$ ✓.

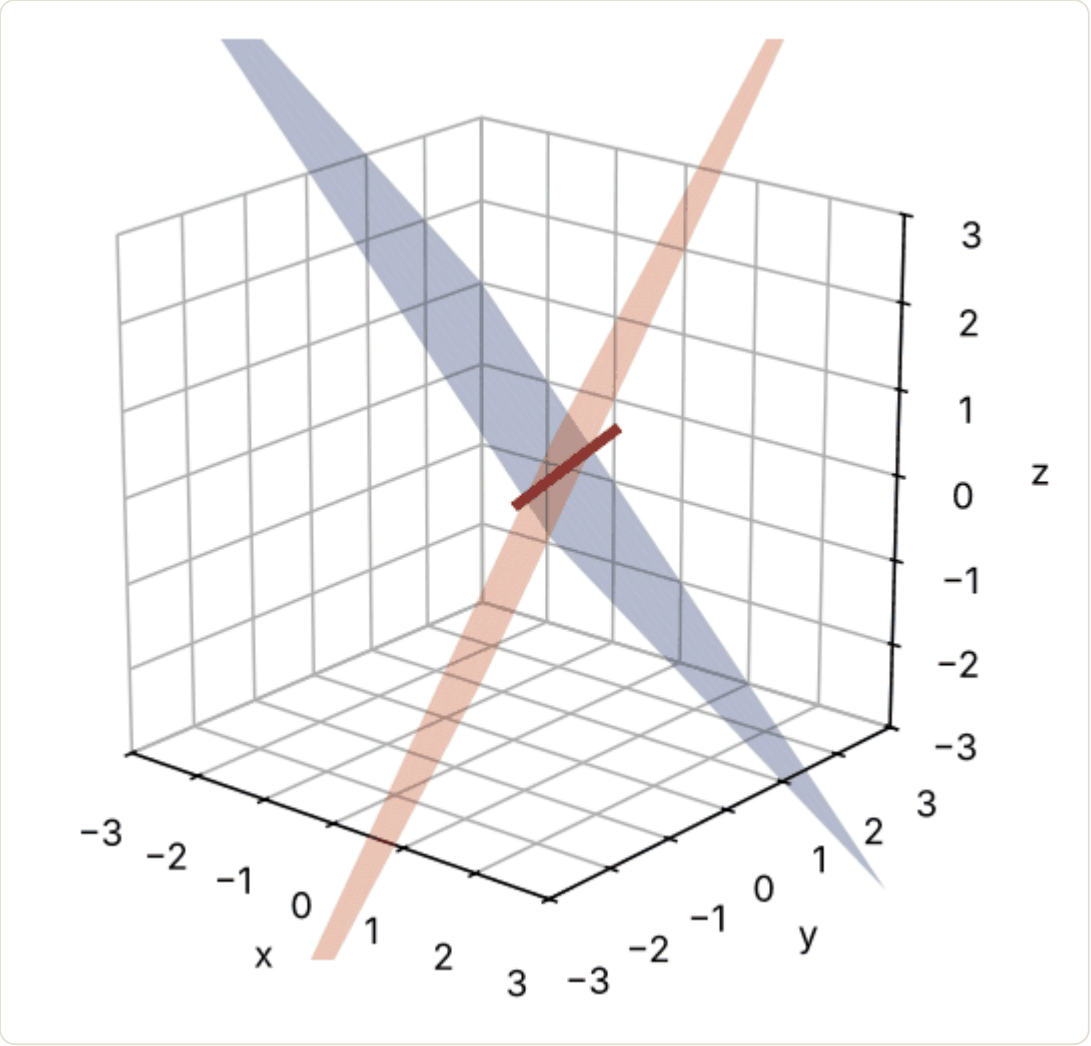
3. Sudut, kesejajaran, dan perpotongan bidang

Dua bidang **sejajar** bila normalnya sejajar. Bila tidak sejajar, mereka berpotongan pada sebuah garis, dan **sudut antara bidang** adalah sudut antara normalnya (yang lancip):

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}.$$

CONTOH 8 — SUDUT DAN GARIS POTONG DUA BIDANG

Bidang $x + y + z = 1$ dan $x - 2y + 3z = 1$. Normal $\langle 1,1,1\rangle$ dan $\langle 1,-2,3\rangle$; dot $= 2$; $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 72{,}0^\circ$. Arah garis potong $= \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \langle 1\cdot 3 - 1\cdot(-2),\ 1\cdot 1 - 1\cdot 3,\ 1\cdot(-2) - 1\cdot 1\rangle = \langle 5,-2,-3\rangle$. Titik pada garis: pilih $z = 0$: $x + y = 1$, $x - 2y = 1 \Rightarrow y = 0, x = 1$. Garis: $x = 1 + 5t,\ y = -2t,\ z = -3t$.



Dua bidang berpotongan pada sebuah garis (merah).

CONTOH 9 — SUDUT BIDANG LAIN

Untuk $x + y + z = 1$ dan $x + 2y + 3z = 1$: $\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$, $\theta \approx 22{,}2°$. Arah garis potong $\langle 1,1,1\rangle \times \langle 1,2,3\rangle = \langle 1,-2,1\rangle$; titik $(1,0,0)$ pada keduanya: $x = 1+t,\ y = -2t,\ z = t$.

4. Garis dan bidang

CONTOH 10 — TITIK TEMBUS GARIS PADA BIDANG

Garis $x = 1+2t,\ y = -t,\ z = 3+t$ dan bidang $x + 2y - z = 4$. Substitusi: $(1+2t) + 2(-t) - (3+t) = 4 \Rightarrow -2 - t = 4 \Rightarrow t = -6$. Titik tembus $(-11, 6, -3)$. Bila koefisien t hilang dan sisi konstan tidak cocok, garis sejajar bidang (tidak berpotongan); bila cocok, garis terletak pada bidang.

5. Jarak

JARAK TITIK KE BIDANG

Jarak titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ke bidang $ax + by + cz + d = 0$:

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Penurunan. Ambil P_0 pada bidang. Jarak $= |\text{comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_0P_1}| = \dfrac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\mathbf{n}|}$, dengan $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$. ■

CONTOH 11

Jarak $(4, -2, 3)$ ke bidang $2x - y + 2z = 5$: $\dfrac{|8 + 2 + 6 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{11}{3} \approx 3{,}67$. Jarak antara bidang sejajar $2x - y + 2z = 5$ dan $2x - y + 2z = -4$: ambil titik $(0, 0, -2)$ pada yang kedua (cek: -4) dan hitung jaraknya ke yang pertama: $\frac{|-4-5|}{3} = 3$.

JARAK TITIK KE GARIS

Garis melalui P_0 dengan arah $\mathbf{v}$; jarak dari P: $D = \dfrac{|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$ (tinggi jajargenjang).

JARAK ANTARA DUA GARIS BERSILANGAN

Untuk garis dengan titik P_1, P_2 dan arah $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$: $D = \dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$ (tinggi paralelepipedum).

CONTOH 12 — JARAK GARIS BERSILANGAN (DARI CONTOH 4)

$P_1(1, -2, 4)$, $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$; $P_2(0, 3, -3)$, $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$. $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \langle 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1,\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 4,\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2\rangle = \langle 13, -6, -5\rangle$, $|\cdot| = \sqrt{230}$. $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -1, 5, -7\rangle$; dot $= -13 - 30 + 35 = -8$. Jarak $= \dfrac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}528$.

6. Kesalahan umum

- Memakai titik sebagai vektor arah atau sebaliknya.
- Menganggap garis di ruang punya persamaan tunggal $ax + by + cz = d$ (itu bidang; garis memerlukan dua persamaan bidang atau bentuk parametrik).
- Menyimpulkan garis berpotongan hanya karena tidak sejajar (bisa bersilangan).
- Lupa nilai mutlak pada rumus jarak.

7. Ringkasan

- Garis: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$; bidang: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
- Normal bidang dari tiga titik: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$; garis potong dua bidang: arah $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.
- Jarak titik–bidang $\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; jarak garis bersilangan lewat tripel skalar.

Berikutnya 12.6: permukaan yang lebih rumit dari bidang dan bola.