Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.4 Hasil Kali Silang

Hasil kali titik menghasilkan skalar. Banyak masalah geometri dan fisika di ruang membutuhkan vektor yang *tegak lurus terhadap dua vektor lain*: normal sebuah bidang, sumbu putar, arah gaya magnet. Operasi yang menghasilkannya adalah **hasil kali silang**, yang hanya ada di ruang tiga dimensi.

1. Determinan sebagai alat bantu

Determinan 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Determinan 3×3 dihitung dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

(Perhatikan tanda berganti $+, -, +$.)

2. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali silang** (*cross product*) adalah vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle.$$

Bentuk yang mudah diingat memakai determinan simbolik:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

CONTOH 1

$\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}\,(3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7) - \mathbf{j}\,(1 \cdot (-5) - 4 \cdot 2) + \mathbf{k}\,(1 \cdot 7 - 3 \cdot 2) = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} +$

Cek tegak lurus: $\langle -43, 13, 1 \rangle \cdot \langle 1, 3, 4 \rangle = -43 + 39 + 4 = 0$ dan $\cdot \langle 2, 7, -5 \rangle = -86 + 91 - 5 = 0$ ✓.

CONTOH 2 — PERKALIAN BASIS STANDAR

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, sedangkan $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, dan $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Pola siklus $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$ menghasilkan tanda positif.

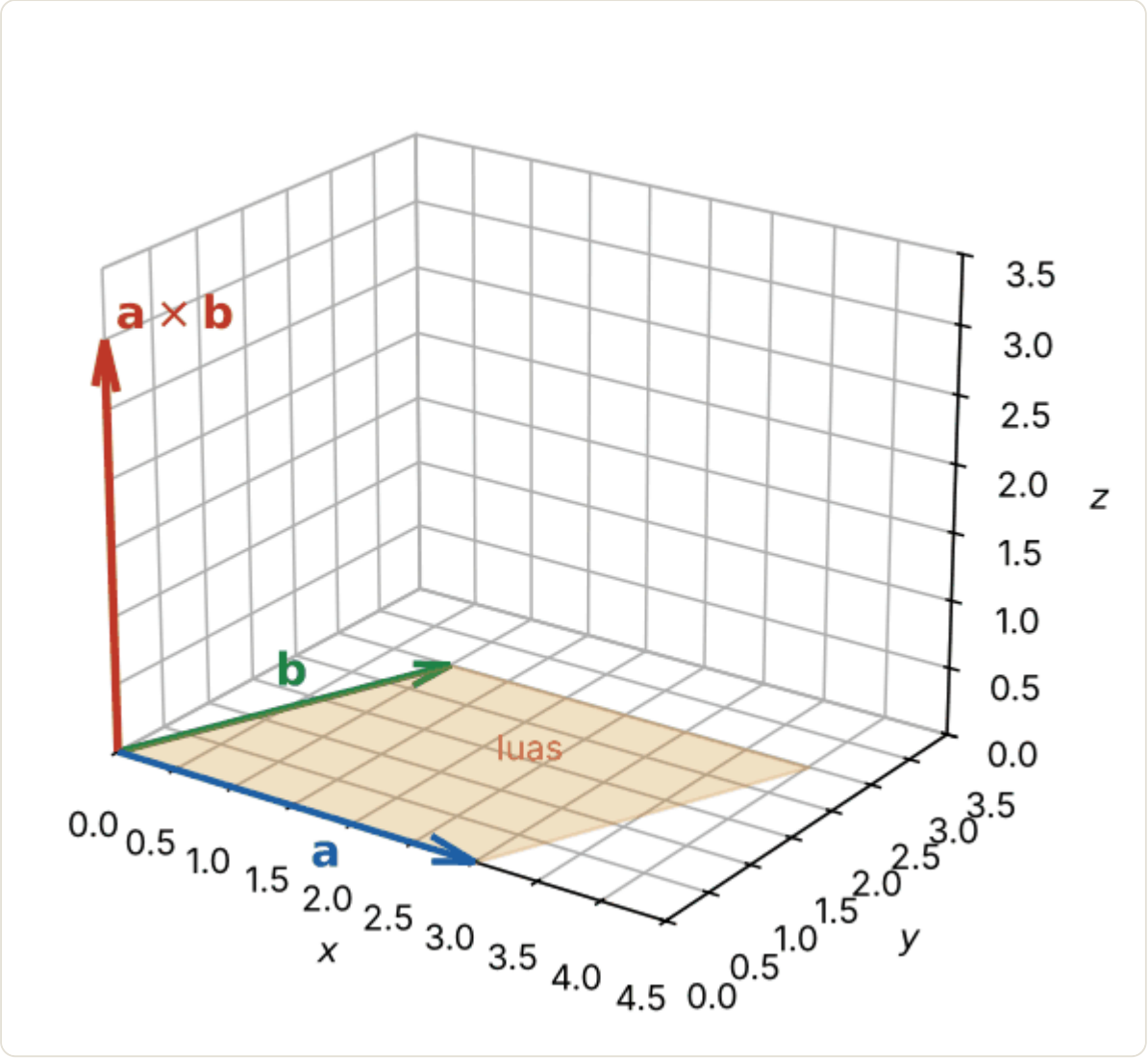
3. Arah dan besar

TEOREMA

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **tegak lurus** terhadap $\mathbf{a}$ maupun $\mathbf{b}$.

Bukti. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ (semua suku saling menghapus). Serupa untuk $\mathbf{b}$. ■

Arah ditentukan oleh *kaidah tangan kanan*: bila jari tangan kanan melengkung dari $\mathbf{a}$ ke $\mathbf{b}$ (melalui sudut $\theta < \pi$), ibu jari menunjuk arah $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tegak lurus bidang yang memuat $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$; panjangnya sama dengan luas jajargenjang.

TEOREMA (BESAR)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

dengan θ sudut antara $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$.

Bukti. Identitas Lagrange (periksa dengan menjabarkan komponen): $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Karena $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta$. Karena $\sin\theta \ge 0$ pada $[0, \pi]$, akarnya $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$. ■

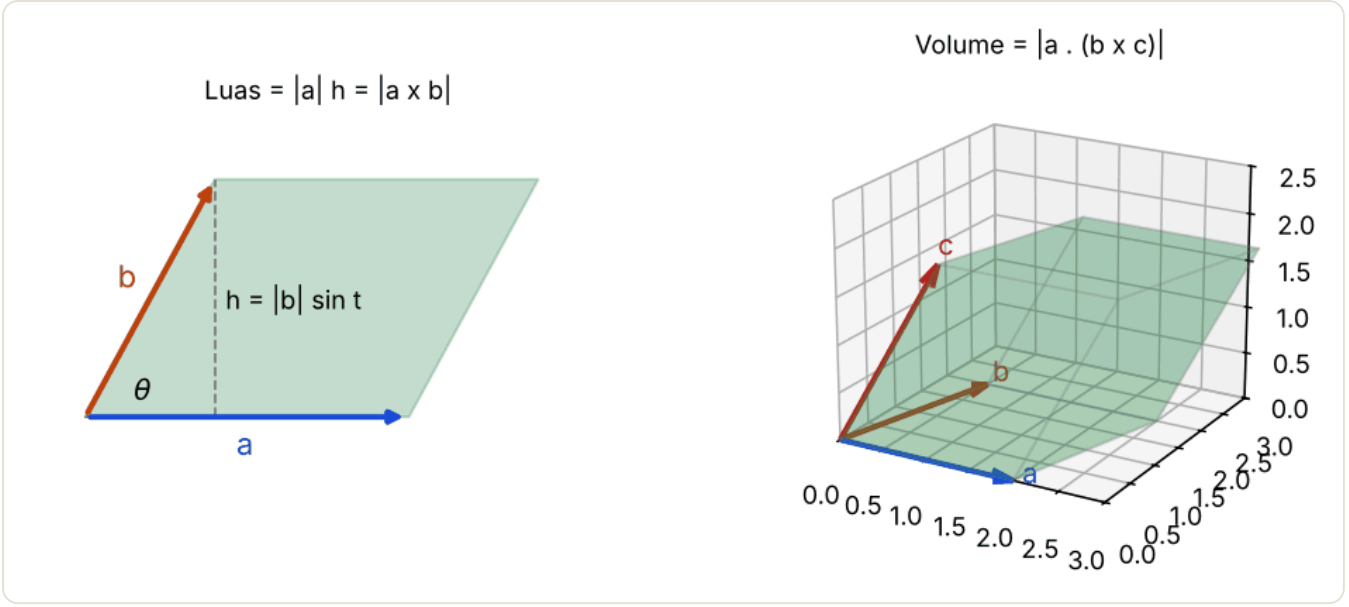
AKIBAT

Dua vektor tak nol $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **sejajar** bila dan hanya bila $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

4. Luas dan volume

Jajargenjang dengan sisi $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ memiliki alas $|\mathbf{a}|$ dan tinggi $|\mathbf{b}|\sin\theta$. Jadi

$$\text{Luas jajargenjang} = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|, \qquad \text{Luas segitiga} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$



Kiri: luas $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$. Kanan: volume $= |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$.

CONTOH 3 — LUAS SEGITIGA DI RUANG

$P(1,4,6), Q(-2,5,-1), R(1,-1,1)$. $\overrightarrow{PQ} = \langle -3,1,-7\rangle$, $\overrightarrow{PR} = \langle 0,-5,-5\rangle$.

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \langle 1\cdot(-5)-(-7)(-5),\ (-7)\cdot 0-(-3)(-5),\ (-3)(-5)-1\cdot 0\rangle = \langle$-

$|\cdot| = \sqrt{1600+225+225} = \sqrt{2050} \approx 45{,}28$. Luas segitiga $= \tfrac{1}{2}\sqrt{2050} \approx 22{,}64$.
Vektor $\langle -40,-15,15\rangle$, atau $\langle 8,3,-3\rangle$ (dibagi -5), adalah normal bidang PQR.

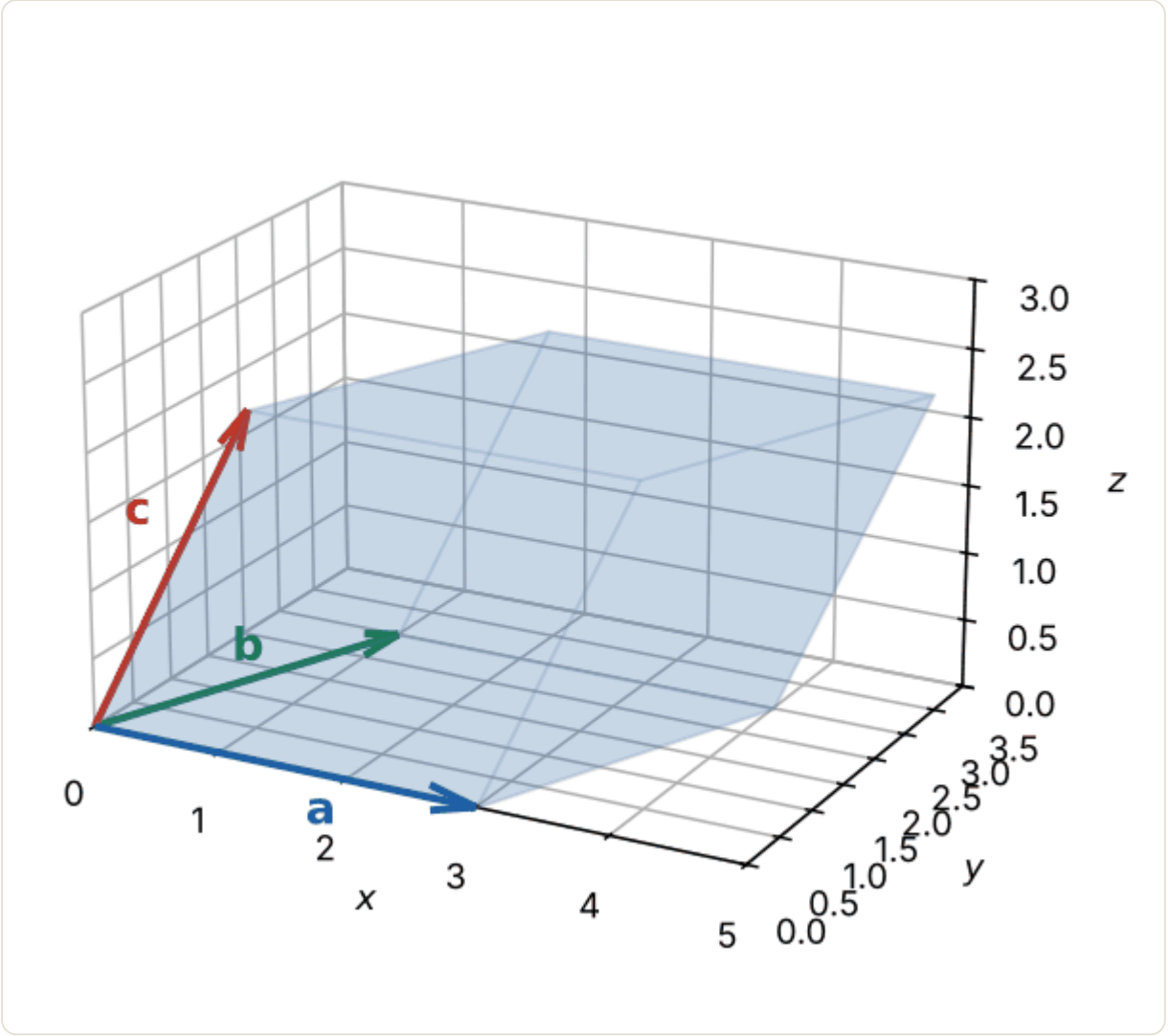
Hasil kali tripel skalar

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ disebut **hasil kali tripel skalar**, dihitung sebagai determinan:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Paralelepipedum (balok miring) dengan rusuk $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ mempunyai alas jajargenjang $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ dengan luas $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ dan tinggi $|\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}|$; jadi

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$



CONTOH 4 — VOLUME

$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle -1, 1, 2 \rangle, \mathbf{c} = \langle 2, -1, 1 \rangle$. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1),\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1,\ (-1)(-1) - 1 \cdot 2 \rangle = \langle 3, 5, -1 \rangle$. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3 + 10 - 3 = 10$. Volume $= 10$.

CONTOH 5 — UJI SEBIDANG (KOPLANAR)

Tiga vektor sebidang bila volume paralelepipedumnya nol. $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$: $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle -1\cdot 18 - 4\cdot(-9),\ 4\cdot 0 - 2\cdot 18,\ 2\cdot(-9) - 0\rangle = \langle 18, -36, -18\rangle$, dan $\mathbf{a}$·itu $= 18 - 144 + 126 = 0$. Jadi sebidang.

5. Sifat-sifat aljabar

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (anti-komutatif)
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributif)
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ (hasil kali tripel vektor)

PERINGATAN

Hasil kali silang **tidak komutatif** dan **tidak asosiatif**: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, sedangkan $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

6. Torsi (momen gaya)

Bila gaya $\mathbf{F}$ bekerja di titik dengan vektor posisi $\mathbf{r}$ relatif terhadap sumbu putar, **torsi** adalah $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, dengan besar $|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$: gaya yang tegak lurus lengan memberi torsi terbesar.

CONTOH 6 — MENGENCANGKAN BAUT

Kunci pas sepanjang 0,4 m searah sumbu x mengencangkan baut di titik asal; gaya 60 N diberikan ke bawah (arah $-z$). $\mathbf{r} = \langle 0{,}4, 0, 0\rangle$, $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -60\rangle$. $\boldsymbol{\tau} = \langle 0\cdot(-60) - 0,\ 0 - 0{,}4\cdot(-60),\ 0\rangle = \langle 0, 24, 0\rangle$ N·m. Besarnya 24 N·m, searah sumbu y (sumbu putar). Bila gaya miring 30° dari arah tegak lurus, torsinya turun menjadi $24\cos 30^\circ \approx 20{,}8$ N·m.

7. Kesalahan umum

- Menukar urutan: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dan $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ berlawanan arah.
- Kesalahan tanda pada komponen $\mathbf{j}$ saat ekspansi determinan.
- Memakai hasil kali silang di $\mathbb{R}^2$ (tidak ada; embed ke $\mathbb{R}^3$ dengan $z = 0$).
- Mengira $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ berarti salah satunya nol (bisa saja sejajar).

8. Ringkasan

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$: vektor tegak lurus keduanya, arah kaidah tangan kanan, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$.
- Luas jajargenjang $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; volume paralelepipedum $= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$.
- Sejajar $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$; sebidang $\iff$ tripel skalar nol.
- Torsi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Dengan dua operasi ini kita bisa menuliskan garis dan bidang di 12.5.