Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.3 Hasil Kali Titik

Sampai di sini kita sudah bisa menjumlahkan vektor dan mengalikannya dengan skalar. Bagaimana dengan *mengalikan dua vektor*? Ada dua cara yang bermakna: hasil kali titik (hasilnya skalar), dibahas di sini, dan hasil kali silang (hasilnya vektor), dibahas di 12.4.

1. Definisi

DEFINISI

Untuk $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ dan $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, **hasil kali titik** (*dot product*, atau hasil kali skalar) adalah bilangan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

(Di dua dimensi: $a_1 b_1 + a_2 b_2$.)

CONTOH 1

$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 6 - 4 = 2$. $\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\frac{1}{2} \rangle = -6 + 14 - 2 = 6$. $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0 + 4 + 3 = 7$.

Sifat-sifat

Untuk vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan skalar c:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Semuanya terbukti dengan menjabarkan menjadi komponen.

2. Sudut antara dua vektor

Hasil kali titik sangat berguna karena memiliki tafsiran geometris. **Sudut antara** dua vektor tak nol $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah sudut θ ($0 \le \theta \le \pi$) di antara keduanya bila titik awalnya berimpit.

TEOREMA

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta.$$

Akibatnya $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

Bukti

Bentuk segitiga dengan sisi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, dan $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Hukum kosinus: $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. Di sisi lain, dengan sifat 1 sampai 3,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

Samakan kedua ungkapan: $-2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$. ■

CONTOH 2 — SUDUT ANTARA DUA VEKTOR

$\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2\rangle$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 - 6 - 2 = 2$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{38}$. $\cos\theta = \dfrac{2}{3\sqrt{38}} \approx 0{,}108$, $\theta \approx 83{,}8^\circ$.

CONTOH 3 — SUDUT DALAM SEGITIGA

Titik $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. Sudut di A: $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 1, 0\rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle -1, 0, 1\rangle$, dot $= 1$, panjang masing-masing $\sqrt{2}$: $\cos A = \tfrac{1}{2}$, $A = 60^\circ$. Segitiga sama sisi, jadi semua sudutnya 60°.

Tegak lurus dan sejajar

Karena $\cos\theta = 0 \iff \theta = \tfrac{\pi}{2}$:

AKIBAT

Dua vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **ortogonal** (tegak lurus) bila dan hanya bila $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. (Vektor nol dianggap ortogonal ke semua vektor.) Sejajar searah: $\cos\theta = 1$; berlawanan arah: $\cos\theta = -1$.

CONTOH 4 — UJI ORTOGONAL

$\langle 2,2,-1\rangle \cdot \langle 5,-4,2\rangle = 10-8-2 = 0$: tegak lurus. Cari t supaya $\langle t,2,-1\rangle \perp \langle 3,t,4\rangle$: $3t+2t-4=0 \Rightarrow t=\frac{4}{5}$.

TANDA DOT PRODUCT MEMBERI JENIS SUDUT

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0$: sudut lancip; $= 0$: siku-siku; < 0: sudut tumpul.

3. Sudut dan kosinus arah

Sudut yang dibentuk $\mathbf{a}$ dengan sumbu x, y, z positif adalah **sudut arah** α, β, γ. Dari $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = a_1$ diperoleh

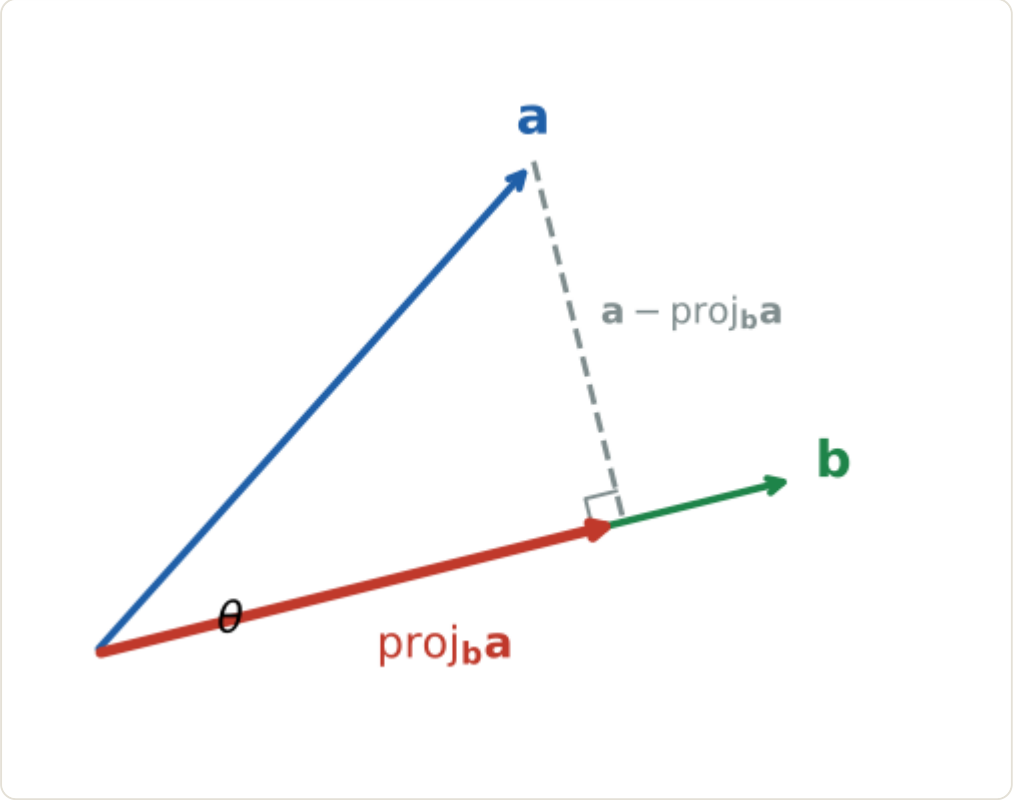
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$.

CONTOH 5

$\mathbf{a} = \langle 1,2,3\rangle$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 74{,}5^\circ$, $\beta \approx 57{,}7^\circ$, $\gamma \approx 36{,}7^\circ$. Cek: $\frac{1+4+9}{14} = 1$ ✓.

4. Proyeksi



Proyeksi skalar dan vektor $\mathbf{a}$ pada $\mathbf{b}$; $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Jatuhkan garis tegak lurus dari ujung $\mathbf{a}$ ke garis yang memuat $\mathbf{b}$. Panjang bayangan $\mathbf{a}$ pada arah $\mathbf{b}$ adalah $|\mathbf{a}|\cos\theta$.

DEFINISI

Untuk $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:

$$\text{proyeksi skalar (komponen)}\ \ \text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \qquad \text{proyeksi vektor}\ \ \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot}{|\mathbf{b}}$$

Vektor $\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ tegak lurus $\mathbf{b}$.

Pemeriksaan ortogonalitas: $\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. ✓

CONTOH 6 — PROYEKSI

$\mathbf{a} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 2\rangle$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15$, $|\mathbf{b}|^2 = 30$. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{\sqrt{30}} \approx 2{,}739$. $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{15}{30}\mathbf{b} = \langle 2{,}5, -0{,}5, 1\rangle$. Komponen tegak lurus: $\mathbf{a} - \text{proj} = \langle -0{,}5, 3{,}5, 3\rangle$, dan dot dengan $\mathbf{b}$: $-2{,}5 - 3{,}5 + 6 = 0$ ✓.

CONTOH 7 — JARAK TITIK KE GARIS (DI BIDANG)

Jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $ax + by + c = 0$ adalah $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Turunan: vektor $\mathbf{n} = \langle a, b\rangle$ tegak lurus garis. Ambil sembarang titik $P_0(x_0, y_0)$ pada garis; jaraknya $= |\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_0P}| = \dfrac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, dan $ax_0 + by_0 = -c$. Contoh: titik $(3, 4)$ ke garis $3x - 4y + 5 = 0$: $\frac{|9 - 16 + 5|}{5} = \frac{2}{5}$.

CONTOH 8 — KETAKSAMAAN CAUCHY–SCHWARZ

Karena $|\cos\theta| \le 1$, selalu berlaku $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Akibatnya ketaksamaan segitiga $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$.

5. Kerja (usaha) oleh gaya

Bila gaya konstan $\mathbf{F}$ memindahkan benda sepanjang perpindahan $\mathbf{D}$, kerja yang dilakukan adalah komponen gaya sepanjang perpindahan dikali jarak:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta.$$

CONTOH 9 — MENARIK KERETA

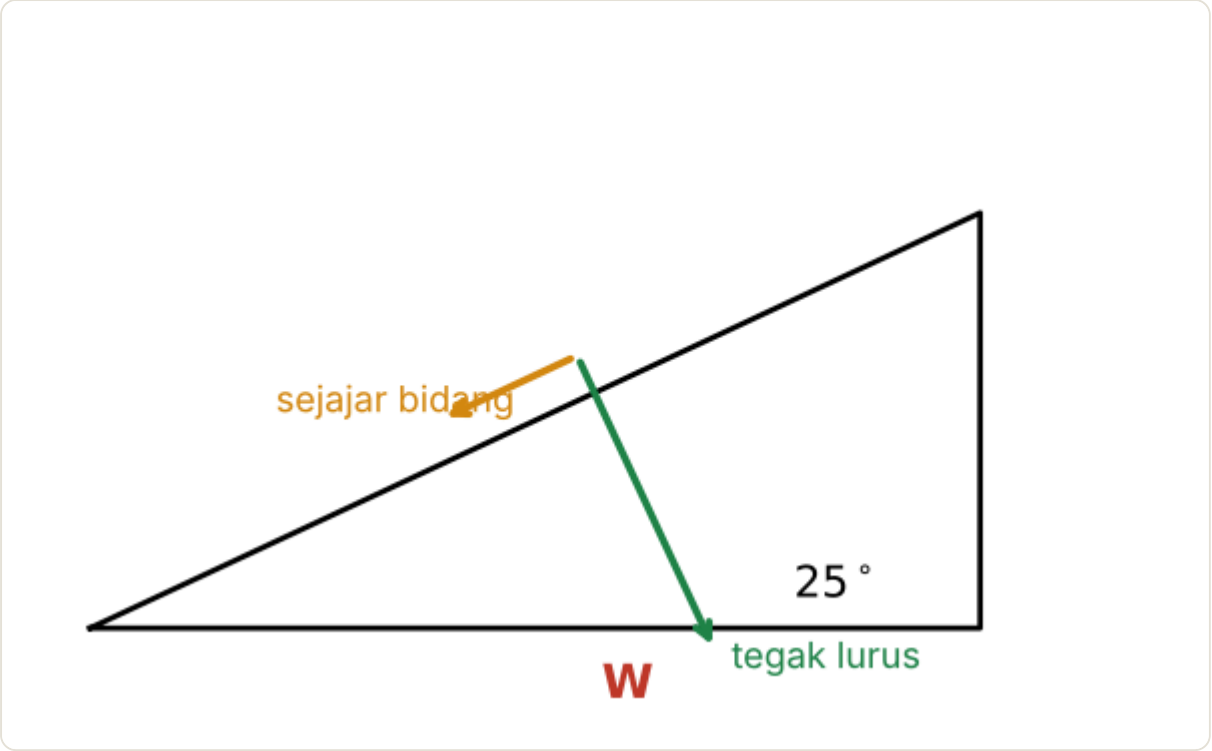
Gaya 200 N pada tali yang membentuk 30° dengan horizontal menarik kereta sejauh 100 m. $W = 200 \cdot 100\cos 30^\circ \approx 17\,321$ J.

CONTOH 10 — BALOK PADA BIDANG MIRING

Balok berbobot 50 N pada bidang miring 25°. Uraikan berat $\mathbf{W}$ menjadi komponen sejajar bidang (menggeser balok) dan tegak lurus bidang (menekan bidang):

$$W_{\parallel} = 50\sin 25^\circ \approx 21{,}1\ \text{N}, \qquad W_{\perp} = 50\cos 25^\circ \approx 45{,}3\ \text{N}.$$

Keduanya dari proyeksi $\mathbf{W}$ pada vektor sejajar dan tegak lurus bidang.



6. Kesalahan umum

- Hasil dot adalah *skalar*, bukan vektor.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ tidak bermakna (skalar dot vektor tak terdefinisi).
- Hasil dot nol tidak berarti salah satu vektor nol; bisa saja tegak lurus.
- Memakai derajat/radian yang tidak cocok saat menghitung $\theta = \arccos(\cdot)$.
- Mengira $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$: proyeksi tidak simetris.

7. Ringkasan

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$.
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; tanda dot menentukan lancip/tumpul.
- $\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$, $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.
- Kerja $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$.

Berikutnya 12.4 Hasil Kali Silang.