Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.2 Vektor

Sebagian besar besaran fisika dapat diterangkan dengan satu bilangan: suhu, massa, panjang. Besaran seperti ini disebut **skalar**. Namun ada besaran yang memerlukan juga *arah*: perpindahan, kecepatan, gaya. Besaran itu dimodelkan oleh **vektor**.

1. Vektor secara geometris

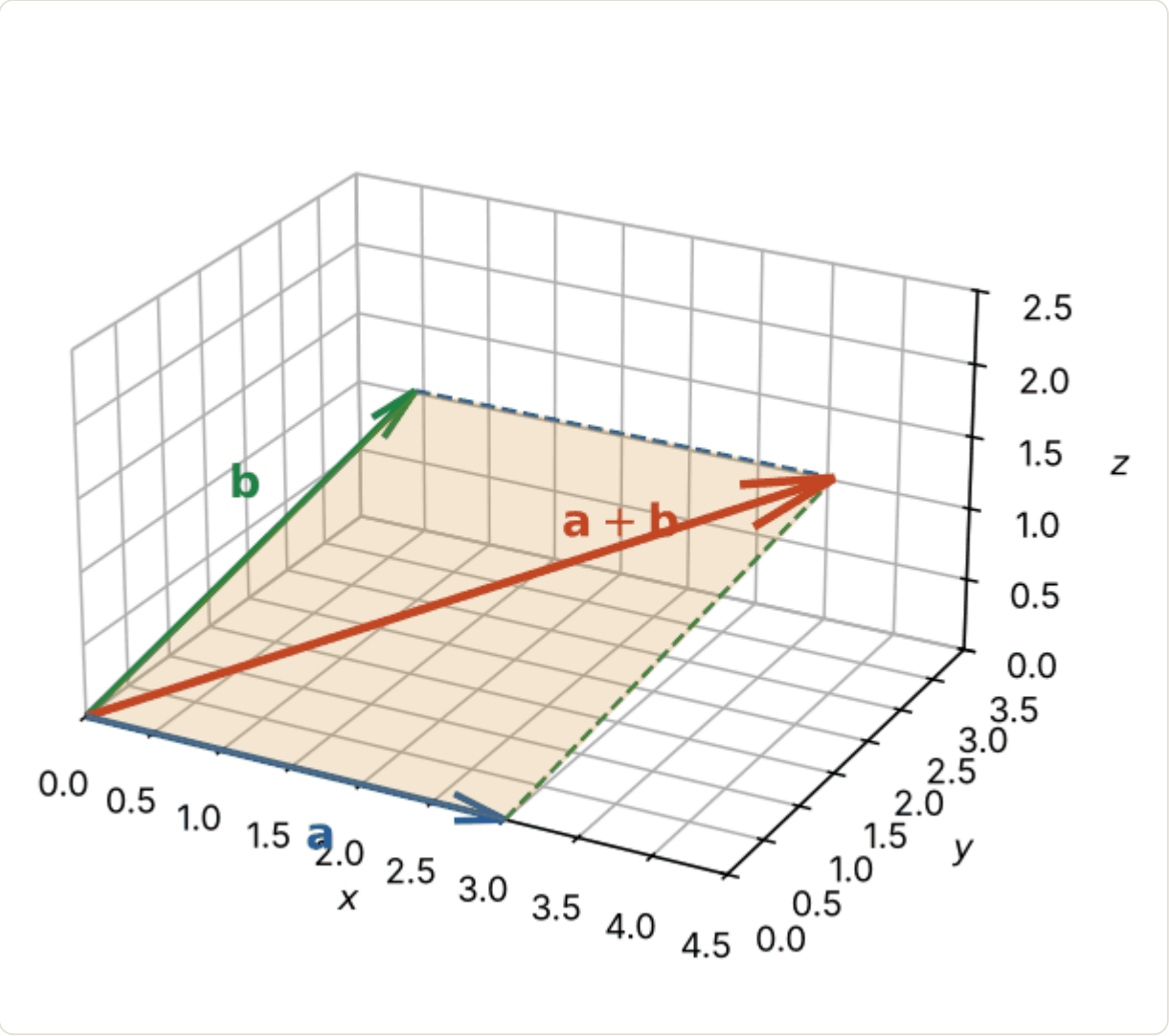
DEFINISI

Vektor adalah besaran yang mempunyai *besar* (panjang) dan *arah*. Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah (panah) dari **titik awal** A ke **titik akhir** B, ditulis $\overrightarrow{AB}$. Dua vektor **sama** bila besar dan arahnya sama, walaupun posisinya berbeda. Vektor nol $\mathbf{0}$ mempunyai panjang 0 dan tidak mempunyai arah tertentu.

Huruf tebal ($\mathbf{a}$) atau tanda panah ($\vec{a}$) dipakai untuk vektor; panjangnya ditulis $|\mathbf{a}|$.

Penjumlahan: aturan segitiga dan jajargenjang

Untuk menjumlahkan $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$: letakkan titik awal $\mathbf{b}$ di titik akhir $\mathbf{a}$; vektor dari titik awal $\mathbf{a}$ ke titik akhir $\mathbf{b}$ adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Hasil yang sama diperoleh dengan membuat jajargenjang dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ yang titik awalnya berimpit: diagonalnya adalah $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Jadi $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.



$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sebagai diagonal jajargenjang.

Perkalian dengan skalar

Untuk skalar c dan vektor $\mathbf{a}$: $c\mathbf{a}$ mempunyai panjang $|c||\mathbf{a}|$ dan searah $\mathbf{a}$ bila $c > 0$, berlawanan arah bila $c < 0$. Dua vektor tak nol **sejajar** bila yang satu kelipatan skalar yang lain. Pengurangan: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

2. Vektor dalam komponen

Letakkan titik awal vektor di titik asal. Titik akhirnya (a_1, a_2, a_3) menentukan vektor itu, yang ditulis

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle.$$

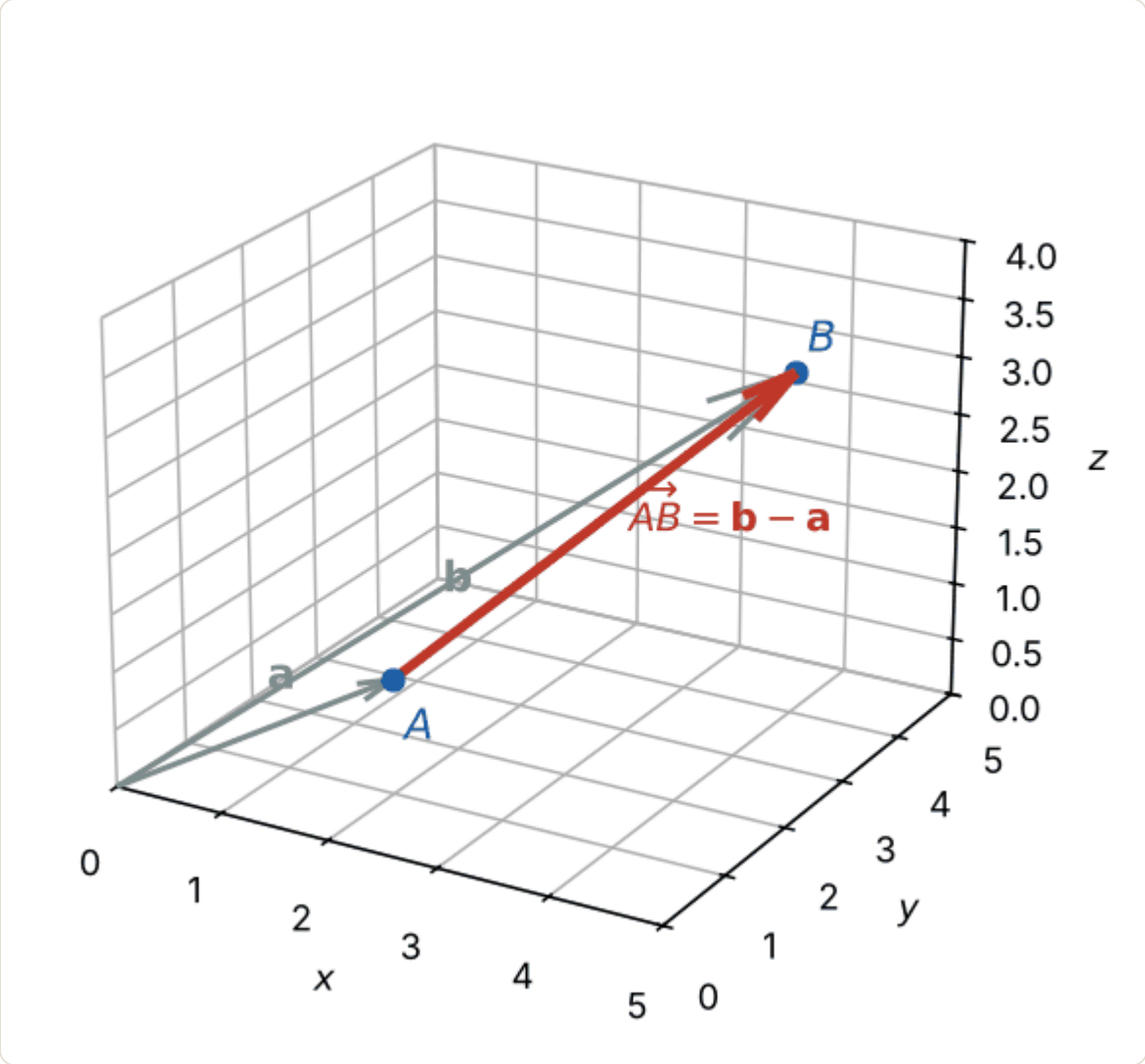
Bilangan a_1, a_2, a_3 adalah **komponen** $\mathbf{a}$. Vektor ini disebut **vektor posisi** titik (a_1, a_2, a_3).

VEKTOR ANTARA DUA TITIK

Untuk $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1 \rangle.$$

(Titik akhir dikurangi titik awal.) Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektor posisi A, B, maka $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Aljabar vektor

Dengan $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, c skalar:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle, \qquad c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle.$$

Panjang (besar) vektor, dari rumus jarak:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

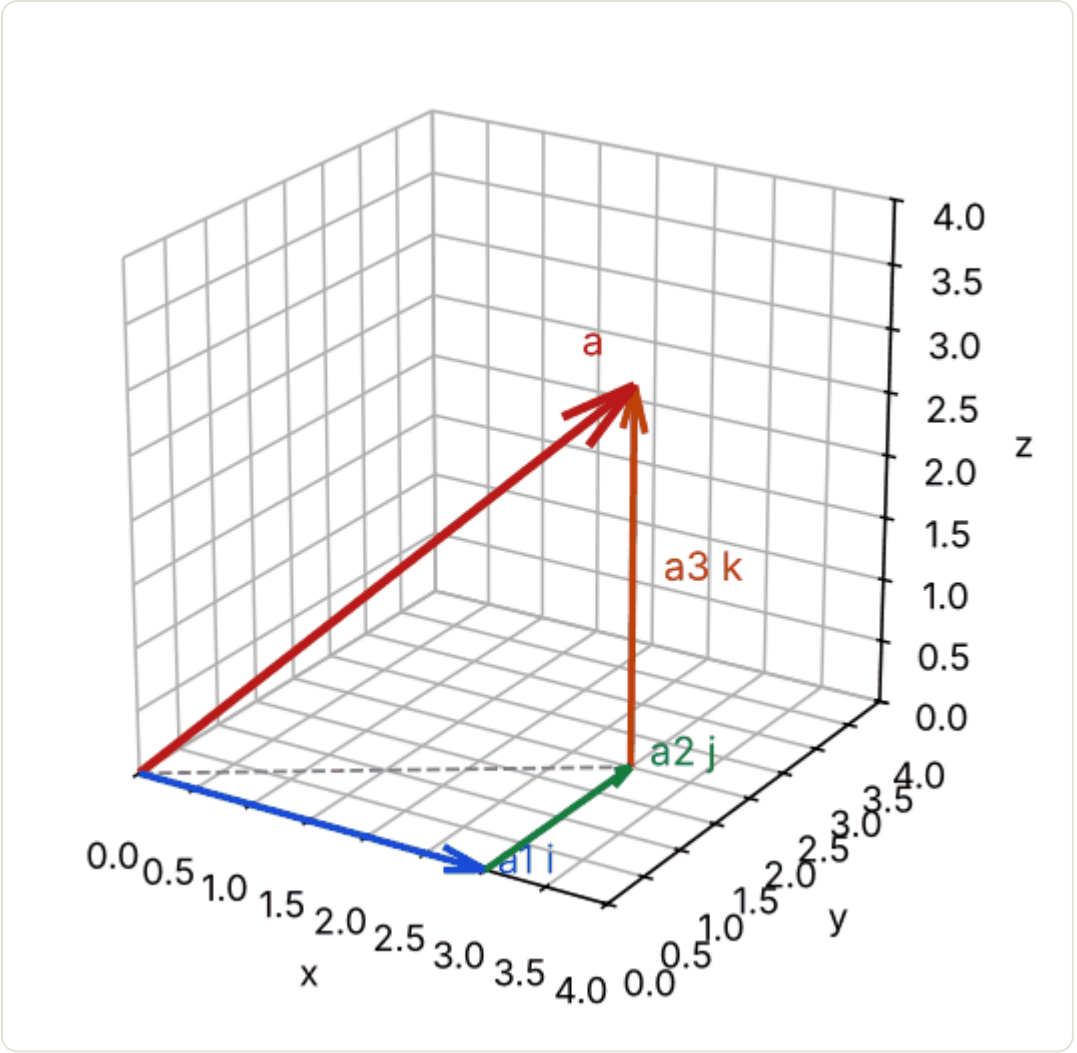
Sifat-sifat: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$, $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$, $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Semuanya mengikuti dari sifat bilangan real pada tiap komponen.

Vektor basis standar

Tiga vektor satuan sepanjang sumbu:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Setiap vektor ditulis tunggal sebagai kombinasi linear: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$.



$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$: jumlah tiga vektor sepanjang sumbu.

Vektor satuan

Vektor satuan adalah vektor dengan panjang 1. Untuk $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, vektor satuan searah $\mathbf{a}$ adalah $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ (mengalikan dengan $\frac{1}{|\mathbf{a}|}$ mengubah panjang menjadi 1 tanpa mengubah arah).

3. Contoh

CONTOH 1 — OPERASI DASAR

$\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 4, -2\rangle$. Maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$; $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = \langle 6 - 3,\ -2 - 12,\ 4 + 6\rangle = \langle 3, -14, 10\rangle$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$; $|\mathbf{b}| = \sqrt{21}$.

CONTOH 2 — VEKTOR SATUAN

Vektor satuan searah $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 2\rangle$: $\dfrac{1}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle \approx \langle 0{,}802, -0{,}267, 0{,}535\rangle$. Vektor dengan panjang 6 searah $\mathbf{a}$: $\dfrac{6}{\sqrt{14}}\langle 3, -1, 2\rangle$.

CONTOH 3 — VEKTOR DARI DUA TITIK

$A(1, 2, -1)$, $B(4, 0, 3)$: $\overrightarrow{AB} = \langle 3, -2, 4\rangle$, $|AB| = \sqrt{29}$. Titik yang membagi AB dengan perbandingan $1 : 2$ dari A: $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(2,\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

CONTOH 4 — APAKAH SEJAJAR?

$\langle 2, -4, 6\rangle$ dan $\langle -1, 2, -3\rangle$: yang pertama $= -2\cdot$yang kedua, jadi sejajar (berlawanan arah). $\langle 1, 2, 3\rangle$ dan $\langle 2, 4, 7\rangle$: perbandingan komponen $2, 2, \frac{7}{3}$ tidak sama, tidak sejajar.

CONTOH 5 — PUSAT SEGITIGA (TITIK BERAT)

Titik berat segitiga ABC dengan vektor posisi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ adalah $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$. Untuk $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$: $\mathbf{g} = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\rangle$.

4. Penerapan: gaya dalam keseimbangan

Gaya adalah vektor; gaya total pada benda adalah jumlah vektor semua gaya. Benda dalam keseimbangan bila jumlah gayanya nol.

CONTOH 6 — DUA KABEL MENAHAN BEBAN

Beban 100 N digantung pada dua kabel yang membentuk sudut 50° dan 32° terhadap garis datar (kabel pertama ke kiri, kedua ke kanan). Misalkan tegangan T_1 dan T_2. Keseimbangan komponen:

$$\text{horizontal: } -T_1\cos 50^\circ + T_2\cos 32^\circ = 0, \qquad \text{vertikal: } T_1\sin 50^\circ + T_2\sin 32^\circ =$$

Dari persamaan pertama $T_2 = T_1\dfrac{\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}$. Substitusi: $T_1\left(\sin 50^\circ + \cos 50^\circ \tan 32^\circ\right) = 100$, sehingga $T_1 \approx 85{,}6$ N dan $T_2 \approx 64{,}9$ N. Kabel yang lebih curam menanggung gaya lebih besar.

CONTOH 7 — KECEPATAN PESAWAT DAN ANGIN

Pesawat terbang dengan kecepatan udara $\langle 0, 200\rangle$ km/jam (ke utara) dan angin $\langle 60, 0\rangle$ (ke timur). Kecepatan terhadap tanah adalah jumlahnya, $\langle 60, 200\rangle$, dengan laju $\sqrt{3600 + 40000} = 208{,}8$ km/jam, arah menyimpang $\arctan\frac{60}{200} \approx 16{,}7^\circ$ ke timur dari utara.

5. Kesalahan umum

- Menulis $\overrightarrow{AB} = A - B$. Yang benar: titik akhir dikurangi titik awal.
- Mengira $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Yang benar hanya $\le$ (ketaksamaan segitiga), sama bila searah.
- Menyamakan titik (a, b, c) dengan vektor $\langle a, b, c\rangle$: berhubungan tetapi berbeda (titik vs perpindahan).
- Lupa mengubah arah/sudut ke komponen saat bekerja dengan gaya.

6. Ringkasan

- Vektor: besar dan arah; komponen $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$; $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- Penjumlahan dan perkalian skalar bekerja per komponen; $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ basis standar; vektor satuan $= \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.
- Keseimbangan gaya: jumlah komponen sama dengan nol.

Berikutnya 12.3 Hasil Kali Titik.