Bab 12 · Vektor dan Geometri Ruang

12.1 Sistem Koordinat Tiga Dimensi

Sampai Bab 11 kita bekerja di bidang (dua dimensi). Dunia nyata tiga dimensi: posisi satelit, aliran udara, permukaan gunung. Untuk membahas kalkulus di ruang kita perlu **sistem koordinat tiga dimensi**, yaitu satu sumbu tambahan, serta rumus jarak dan persamaan permukaan sederhana.

1. Sumbu dan bidang koordinat

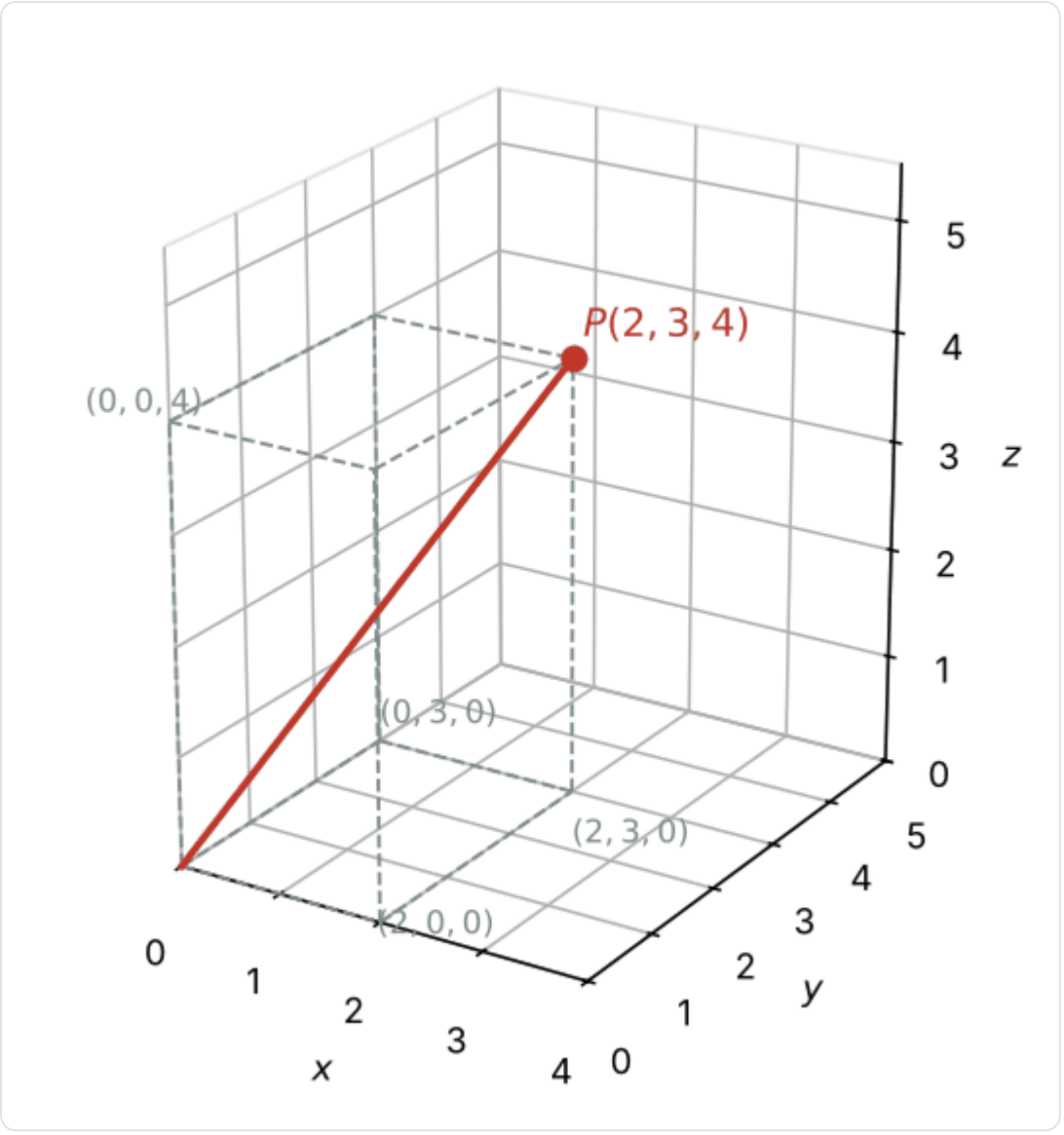
Untuk menentukan posisi titik di bidang diperlukan dua bilangan (x, y). Di ruang kita perlu tiga bilangan. Pilih titik asal O dan tiga garis berarah saling tegak lurus yang melalui O: **sumbu** x, **sumbu** y, dan **sumbu** z. Dengan konvensi **kaidah tangan kanan**: bila jari-jari tangan kanan melengkung dari sumbu x positif ke sumbu y positif, ibu jari menunjuk ke arah sumbu z positif.

Setiap pasang sumbu menentukan sebuah **bidang koordinat**:

- bidang xy (persamaan $z = 0$),
- bidang yz (persamaan $x = 0$),
- bidang xz (persamaan $y = 0$).

Ketiga bidang ini membagi ruang menjadi **delapan oktan**. Oktan pertama adalah oktan dengan $x, y, z > 0$.

Titik P memiliki koordinat (a, b, c): a adalah jarak berarah dari bidang yz, b dari bidang xz, dan c dari bidang xy. Kita menggambar P sebagai sudut dari balok persegi panjang dengan satu sudut di O.



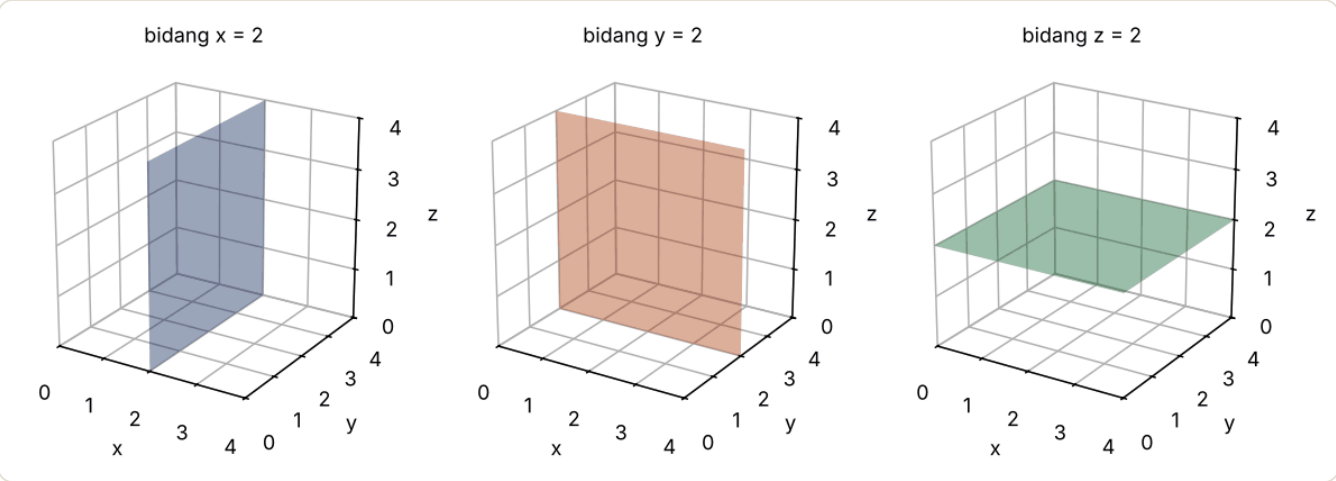
Titik $P(2, 3, 4)$: balok yang sudut-sudutnya O dan P, dengan proyeksi pada sumbu dan bidang koordinat.

PROYEKSI SEBUAH TITIK

Untuk $P(a, b, c)$: proyeksi pada bidang xy adalah $(a, b, 0)$, pada bidang yz adalah $(0, b, c)$, pada bidang xz adalah $(a, 0, c)$, dan pada sumbu x adalah $(a, 0, 0)$. Cerminan terhadap bidang xy: $(a, b, -c)$; terhadap sumbu z: $(-a, -b, c)$; terhadap titik asal: $(-a, -b, -c)$.

2. Persamaan sederhana di ruang

Di bidang, persamaan $x = 2$ adalah garis. Di ruang, $x = 2$ adalah himpunan semua titik $(2, y, z)$: sebuah **bidang** yang sejajar bidang yz, berjarak 2 darinya. Jadi arti persamaan bergantung pada dimensi ruangnya.



Bidang $x = 2$, $y = 2$, dan $z = 2$ di ruang.

CONTOH 1 — ARTI PERSAMAAN DI $\mathbb{R}^2$ DAN $\mathbb{R}^3$

- $x = 5$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis vertikal; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang sejajar bidang yz.
- $y = x$: di $\mathbb{R}^2$ adalah garis; di $\mathbb{R}^3$ adalah bidang yang memuat sumbu z (semua (x, x, z)).
- $z = 0$: bidang xy.
- $\{x = 2,\ y = 3\}$: irisan dua bidang, yaitu garis sejajar sumbu z yang melalui $(2, 3, 0)$.

CONTOH 2 — HIMPUNAN TITIK DARI PERTIDAKSAMAAN

Himpunan $\{(x, y, z) :\ 0 \le z \le 1\}$ adalah daerah di antara bidang $z = 0$ dan $z = 1$ (lapisan tak hingga). Himpunan $\{(x, y, z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ adalah oktan pertama. Himpunan $\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\}$ adalah cakram satuan di bidang xy.

3. Jarak antara dua titik

Di bidang, $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ dari Teorema Pythagoras. Di ruang, kita memakai Pythagoras dua kali.

RUMUS JARAK

Jarak antara $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Penurunan. Bangun balok dengan P_1 dan P_2 sebagai sudut berseberangan dan rusuk-rusuk sejajar sumbu. Misalkan $B(x_2, y_2, z_1)$, yaitu titik pada balok yang satu bidang datar dengan P_1 dan tepat di bawah (atau di atas) P_2. Segitiga P_1BP_2 siku-siku di B dengan $|P_1B| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (diagonal alas, Pythagoras pertama) dan $|BP_2| = |z_2 - z_1|$. Pythagoras memberi $|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$, yaitu rumus di atas. ■

CONTOH 3 — JARAK DUA TITIK

Jarak antara $P_1(2, -1, 7)$ dan $P_2(1, -3, 5)$: $\sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$. Titik tengahnya $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2, 6\right)$.

CONTOH 4 — JENIS SEGITIGA

Titik $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$: $|PQ| = \sqrt{16+4+16} = 6$, $|PR| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|QR| = \sqrt{36+4+0} = \sqrt{40}$. Dua sisi sama panjang, jadi segitiga sama kaki. Sudut siku-siku? $6^2 + 6^2 = 72 \neq 40$, jadi bukan segitiga siku-siku.

CONTOH 5 — APAKAH TIGA TITIK SEGARIS?

Titik $A(1, 2, 3)$, $B(3, 6, 7)$, $C(2, 4, 5)$: $|AB| = \sqrt{4+16+16} = 6$, $|AC| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|BC| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Karena $|AC| + |CB| = |AB|$, ketiganya segaris dengan C di antara A dan B (dan memang C adalah titik tengah AB).

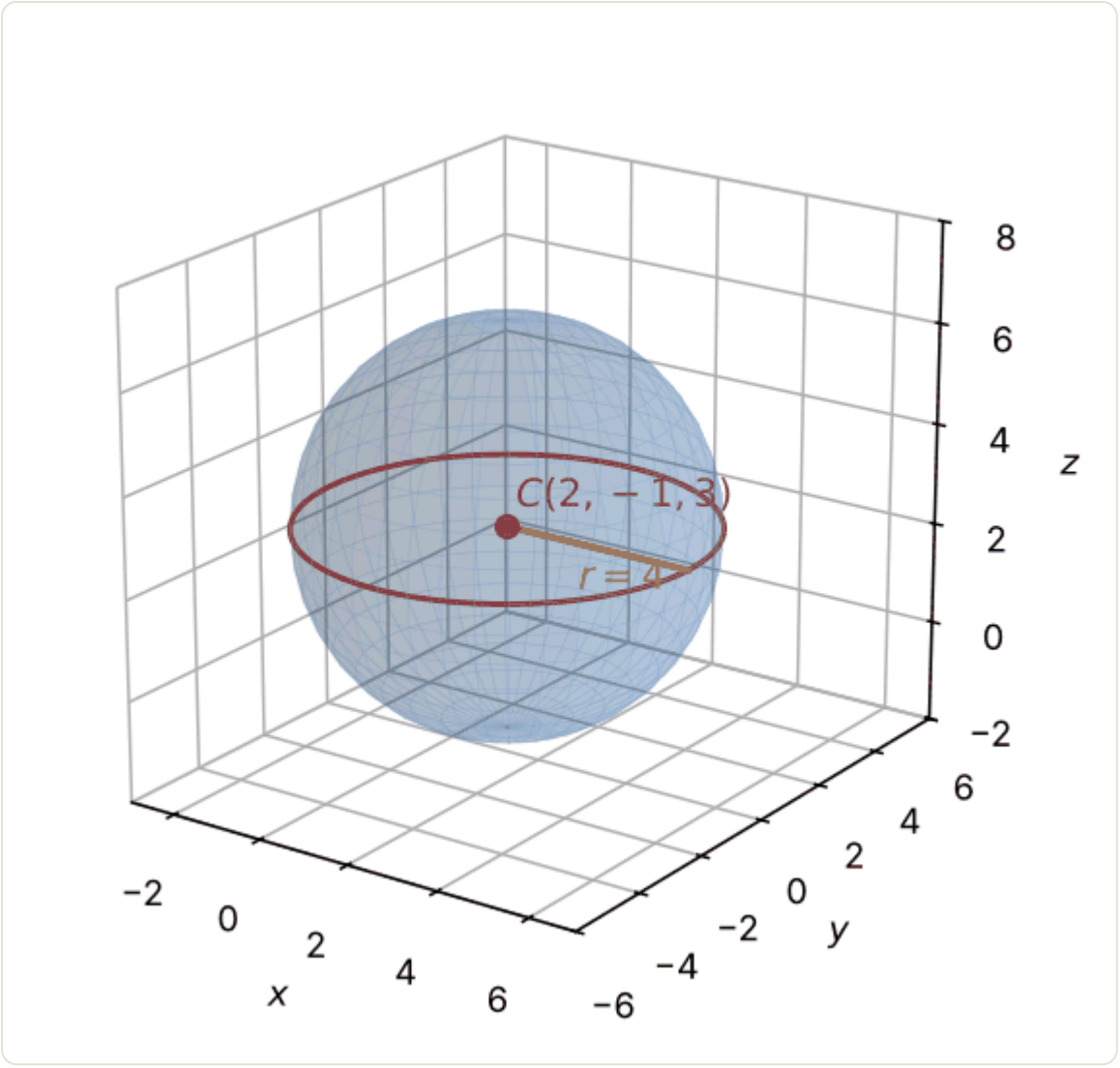
4. Persamaan bola

DEFINISI DAN PERSAMAAN

Bola dengan pusat $C(h, k, l)$ dan jari-jari r adalah himpunan semua titik $P(x, y, z)$ dengan $|PC| = r$. Mengkuadratkan rumus jarak,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2.$$

Khususnya bola berpusat di titik asal: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



Bola berpusat di C dengan jari-jari r; kurva merah adalah lingkaran besar pada bidang yang melalui pusat.

CONTOH 6 — DARI PERSAMAAN UMUM KE PUSAT DAN JARI-JARI

Tunjukkan $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$ adalah bola. Lengkapkan kuadrat: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 2z + 1) = 11 + 9 + 4 + 1$, yaitu

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25.$$

Pusat $(3, -2, 1)$, jari-jari 5.

CONTOH 7 — BOLA DENGAN DIAMETER DIBERIKAN

Bola dengan diameter dari $A(1, 2, 3)$ ke $B(5, 2, -1)$: pusat adalah titik tengah $(3, 2, 1)$; jari-jari $= \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 16} = 2\sqrt{2}$. Persamaan $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 8$.

CONTOH 8 — IRISAN BOLA DENGAN BIDANG KOORDINAT

Bola $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ dipotong bidang $z=0$: $(x-3)^2+(y+2)^2+1=25$, yaitu $(x-3)^2+(y+2)^2=24$, lingkaran berjari-jari $2\sqrt{6}$ pusat $(3,-2)$. Dipotong bidang $y=3$: $(x-3)^2+25+(z-1)^2=25 \Rightarrow (x-3)^2+(z-1)^2=0$, satu titik saja $(3,3,1)$; bidang $y=3$ menyinggung bola (jarak 5 dari pusat sama dengan jari-jari).

CONTOH 9 — DAERAH DI ANTARA DUA BOLA

$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ adalah kulit bola tebal: semua titik yang berjarak antara 1 dan 2 dari titik asal. $x^2+y^2+z^2 < 0{,}25$ adalah bagian dalam bola berjari-jari $\frac{1}{2}$ (tanpa permukaannya). Himpunan $\{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$ adalah belahan atas bola padat berjari-jari 2.

5. Kesalahan umum

- Mengira $x=2$ selalu garis. Di ruang 3D ia bidang.
- Lupa suku $(z_2-z_1)^2$ pada rumus jarak.
- Pada persamaan bola, lupa melengkapkan kuadrat untuk semua tiga peubah, atau salah tanda pusat: $(x+2)^2$ berarti pusat di $x=-2$.
- Menggambar sumbu z ke bawah (melanggar kaidah tangan kanan).

6. Ringkasan

- Titik di ruang: (x,y,z); tiga bidang koordinat, delapan oktan; kaidah tangan kanan.
- Jarak: $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$; titik tengah: rata-rata koordinat.
- Bola: $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$.
- Persamaan satu peubah (mis. $x=c$) berupa bidang di ruang.

Subbab berikutnya, 12.2, memperkenalkan vektor.