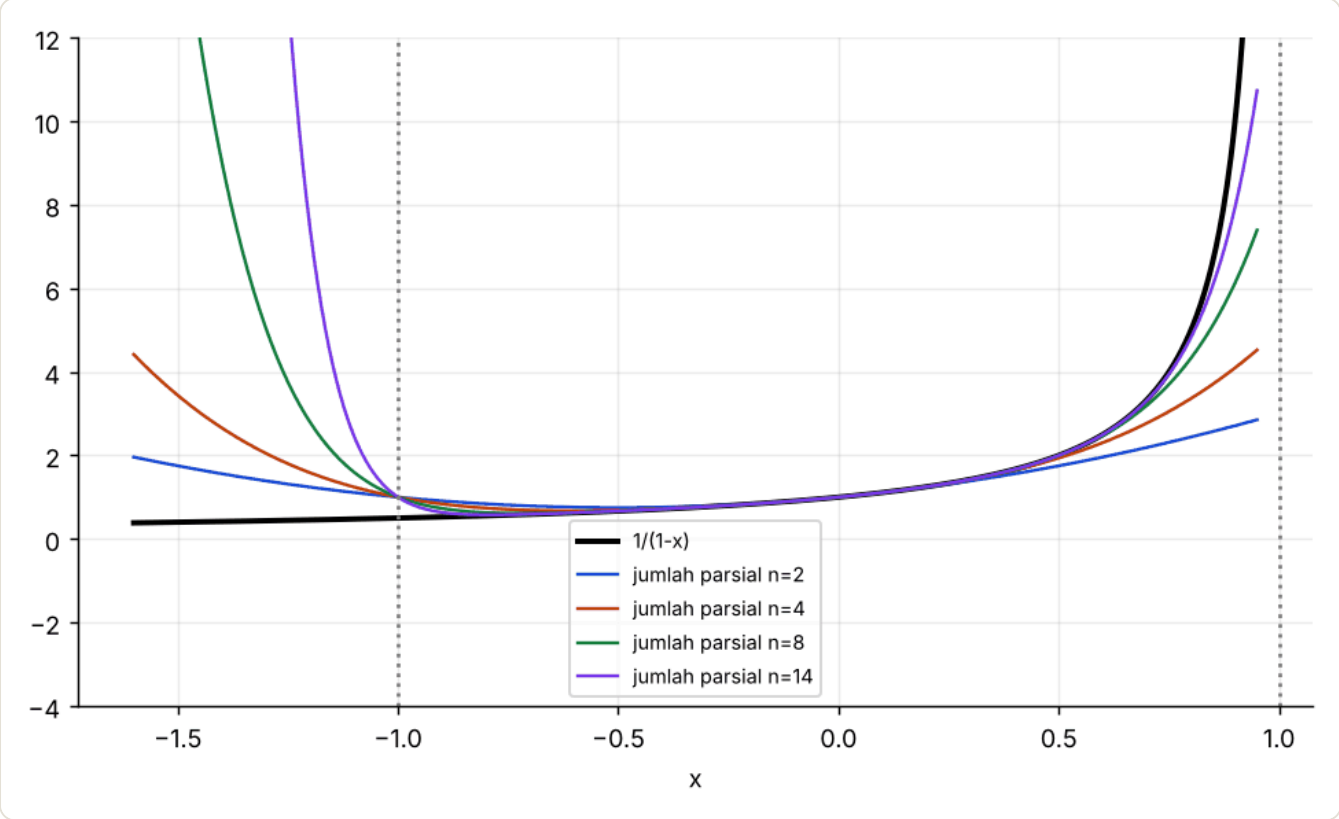
Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.9 Representasi Fungsi sebagai Deret Pangkat

Pada 11.8 kita mulai dari deret pangkat dan bertanya fungsi apa yang diwakilinya. Sekarang kita membalik arah: *diberikan sebuah fungsi, nyatakan sebagai deret pangkat.* Alasan praktisnya kuat: deret pangkat dapat diintegralkan, diturunkan, dan dihitung nilainya dengan hanya penjumlahan dan perkalian. Pada subbab ini kita memakai satu "bahan dasar" saja: **deret geometri**, ditambah turunan dan integral suku demi suku.

1. Bahan dasar: deret geometri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$



Jumlah parsial mendekati $\frac{1}{1-x}$ di dalam $(-1, 1)$ dan menyimpang di luarnya.

Ide umum: ubah fungsi menjadi bentuk $\dfrac{\text{sesuatu}}{1-(\text{rasio})}$, lalu ganti dengan $\sum(\text{rasio})^n$. Kekonvergenan terjadi bila $|\text{rasio}| < 1$.

2. Substitusi dan perkalian

CONTOH 1 — $\dfrac{1}{1+X^2}$

Ganti x dengan $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad |x| < 1.$$

Radius $R = 1$ (karena $|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$).

CONTOH 2 — $\dfrac{1}{2+X}$

Keluarkan faktor agar menjadi bentuk $\frac{1}{1-r}$: $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x/2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$. Konvergen bila $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, jadi $R = 2$. Nilai $R = 2$ wajar: pembagi $2 + x$ nol di $x = -2$, jarak 2 dari pusat 0.

CONTOH 3 — $\dfrac{X^3}{X+2}$

Dari Contoh 2: $\dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$. Radius tetap 2 (perkalian dengan x^3 tidak mengubah R). Tulisan beberapa suku: $\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} - \cdots$.

CONTOH 4 — PECAHAN PARSIAL: $\dfrac{3}{(1-X)(2+X)}$

Uraikan: $\dfrac{3}{(1-x)(2+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2+x}$ (cek: $\frac{(2+x)+(1-x)}{(1-x)(2+x)} = \frac{3}{\cdots}$ ✓). Deret: $\sum x^n + \sum \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$, berlaku untuk $|x| < 1$ (irisan $|x| < 1$ dan $|x| < 2$).

3. Turunan dan integral suku demi suku

Berdasarkan 11.8, bila $f = \sum c_n x^n$ (radius R), maka f' dan $\int f$ diperoleh dengan menurunkan/mengintegralkan tiap suku, dengan radius yang sama.

CONTOH 5 — $\dfrac{1}{(1-X)^2}$

Turunkan $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x|<1$.

CONTOH 6 — $\mathrm{LN}(1+X)$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ ($|x|<1$). Integralkan dari 0 ke x:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Konstanta integrasi nol karena $\ln 1 = 0$ di $x=0$. Radius 1. Di $x=1$ deret menjadi harmonik berganti tanda yang konvergen; sehingga $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ (hasil ini dibuktikan di 11.10).

CONTOH 7 — $\mathrm{ARCTAN}\,X$

Integralkan Contoh 1: $\arctan x = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots$, $|x|<1$. Di $x=1$ deret konvergen (Leibniz). Hasilnya, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{(deret Gregory–Leibniz)}.$$

Konvergensinya sangat lambat: 1000 suku hanya memberi akurasi sekitar 10^{-3}. Pendekatan lebih cepat: $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$, dan deret $\arctan x$ di $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ konvergen cepat.

CONTOH 8 — $\mathrm{LN}\left(\dfrac{1+X}{1-X}\right)$

$\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x^2} = 2\sum x^{2n}$. Integralkan: $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$. Berguna untuk menghitung logaritma: bila $x=\frac{1}{3}$ maka $\frac{1+x}{1-x}=2$, sehingga $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 27} + \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots\right) \approx 0{,}6931$ dengan beberapa suku saja.

4. Menjumlahkan deret bilangan

Bila kita tahu fungsi untuk sebuah deret pangkat, kita dapat memperoleh jumlah deret bilangan dengan mensubstitusi x.

CONTOH 9 — $\sum \dfrac{N}{2^N}$

Dari Contoh 5: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Pada $x = \frac{1}{2}$ (di dalam $|x| < 1$):

$$\sum \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2.$$

CONTOH 10 — $\sum \dfrac{N^2}{2^N}$

Kalikan $\sum nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ dengan x setelah menurunkan: $\sum n^2 x^n = x\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \dfrac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6$. Jadi $\sum \dfrac{n^2}{2^n} = 6$ (ini yang kita pakai di 11.6).

CONTOH 11 — $\sum \dfrac{(-1)^N}{N\,2^N}$

Dari deret $\ln(1+x)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$. Pada $x = \frac{1}{2}$: $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n} = \ln\frac{3}{2}$. Maka $\sum \dfrac{(-1)^n}{n2^n} = -\ln\frac{3}{2} \approx -0{,}4055$.

5. Mengintegralkan fungsi tanpa antiturunan elementer

CONTOH 12 — $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{DX}{1+X^4}$

Ganti x dengan x^4 pada $\frac{1}{1+u} = \sum(-u)^n$: $\frac{1}{1+x^4} = \sum(-1)^n x^{4n}$. Integralkan suku demi suku:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots$$

Deretnya berganti tanda dengan suku menurun, jadi galat $\le$ suku pertama yang dibuang. Dengan tiga suku: $0{,}5 - 0{,}00625 + 0{,}000217 \approx 0{,}49397$; galat $< \frac{1}{13\cdot 2^{13}} \approx 9{,}4 \times 10^{-6}$. (Hasil numerik $0{,}493958$.)

CONTOH 13 — ARCTAN DI TITIK TERTENTU

$\arctan\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 32} - \cdots \approx 0{,}4636$ (delapan suku memberi $0{,}463647$); dengan $\arctan\frac{1}{3} \approx 0{,}3217$, jumlah keduanya $0{,}7854 = \frac{\pi}{4}$ ✓.

6. Kesalahan umum

- Lupa konstanta integrasi: tentukan dengan mensubstitusi titik di mana nilainya diketahui.
- Mengubah indeks saat menurunkan: $\sum_{n=0}$ menjadi $\sum_{n=1}$ (suku konstan hilang).
- Menyatakan radius tanpa memeriksa persyaratan $|\text{rasio}| < 1$ pada bentuk yang sudah disubstitusi.
- Memakai deret di luar selang kekonvergenannya.

7. Ringkasan

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum x^n$ adalah dasar; substitusi dan manipulasi aljabar menghasilkan banyak deret lain.
- Turunan/integral suku demi suku menghasilkan $\ln(1+x)$, $\arctan x$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ dan lainnya.
- Deret pangkat memudahkan menghitung jumlah deret bilangan dan integral tanpa antiturunan elementer.

Pada 11.10 kita menemukan cara *langsung* menghitung koefisien deret dari turunan fungsi: deret Taylor.