Bab 11 · Barisan dan Deret Tak Hingga

11.8 Deret Pangkat

Sampai sekarang suku deret berupa bilangan. Bila suku-sukunya adalah fungsi dari x, deret itu mendefinisikan sebuah *fungsi* (nilainya jumlah deret untuk tiap x yang membuatnya konvergen). Kelas fungsi yang paling penting dibangun dari pangkat x, mirip polinomial berderajat tak hingga: **deret pangkat**.

1. Definisi

DEFINISI

Deret pangkat dalam x adalah deret berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

dengan c_n konstanta (**koefisien**). Lebih umum, **deret pangkat dalam** $(x-a)$ (atau berpusat di a):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots.$$

Untuk tiap x tetap, ini adalah deret bilangan biasa yang kekonvergenannya dapat diuji. Pertanyaan kunci: *untuk x mana deretnya konvergen?* Selalu konvergen di pusat $x = a$ (semua suku kecuali c_0 nol).

Contoh paling sederhana: deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ konvergen ke $\dfrac{1}{1-x}$ bila $|x| < 1$ dan divergen bila $|x| \geq 1$. Jadi daerah konvergennya adalah *selang* $(-1, 1)$.

2. Uji rasio untuk deret pangkat

CONTOH 1 — $\sum N!\, X^N$

Rasio: $\left|\dfrac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$ bila $x \neq 0$. Divergen untuk semua $x \neq 0$; konvergen hanya di $x = 0$.

CONTOH 2 — $\sum \dfrac{(X-3)^N}{N}$

$\left|\dfrac{(x-3)^{n+1}/(n+1)}{(x-3)^n/n}\right| = \dfrac{n}{n+1}|x-3| \to |x-3|$. Konvergen mutlak bila $|x-3|<1$ ($2<x<4$), divergen bila $|x-3|>1$. Titik ujung:

- $x=4$: $\sum \frac{1}{n}$, harmonik, divergen.
- $x=2$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen (Leibniz).

Jadi daerah konvergen adalah $[2,4)$: ujung kiri ikut, ujung kanan tidak.

CONTOH 3 — $\sum \dfrac{X^N}{N!}$

Rasio $\dfrac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$ untuk *setiap* x. Konvergen untuk semua bilangan real. (Ini deret untuk e^x.)

3. Teorema radius kekonvergenan

TEOREMA

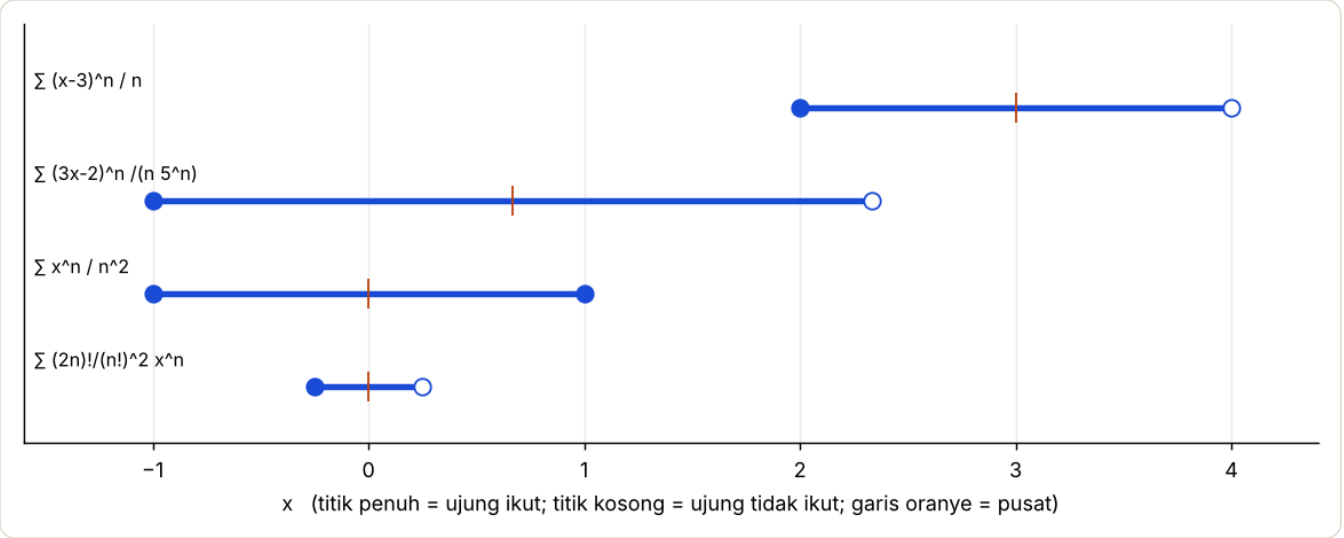
Untuk deret pangkat $\sum c_n(x-a)^n$, hanya ada tiga kemungkinan:

1. deret konvergen hanya di $x=a$;
2. deret konvergen untuk semua x;
3. ada bilangan $R>0$ sehingga deret konvergen mutlak bila $|x-a|<R$ dan divergen bila $|x-a|>R$.

Bilangan R disebut **radius kekonvergenan** ($R=0$ pada kasus 1, $R=\infty$ pada kasus 2). Himpunan x tempat deret konvergen disebut **selang kekonvergenan**: $(a-R, a+R)$ ditambah mungkin salah satu atau kedua titik ujung.

Gagasan bukti. Jika deret konvergen di $x=b$, maka suku-suku $c_n b^n$ terbatas; untuk $|x|<|b|$, $|c_n x^n| \le M\,|x/b|^n$, yaitu dibatasi oleh deret geometri konvergen. Jadi kekonvergenan di satu titik memaksa kekonvergenan mutlak di semua titik yang lebih dekat ke pusat.

Cara menghitung R. Terapkan uji rasio (atau akar) pada $|c_n(x-a)^n|$; bila $\lim\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$, maka $R = \dfrac{1}{L}$ (dengan $R=\infty$ bila $L=0$, $R=0$ bila $L=\infty$). **Titik ujung harus diperiksa tersendiri**, karena uji rasio selalu gagal di sana ($L=1$).



Selang kekonvergenan beberapa deret. Titik penuh = ujung ikut, titik kosong = tidak; garis oranye menandai pusat.

4. Contoh mencari selang

CONTOH 4 — $\sum \frac{X^N}{N^2}$

Rasio koefisien $\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, jadi $R = 1$. Ujung: $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen; $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergen. Selang $[-1, 1]$.

CONTOH 5 — $\sum \frac{(3X-2)^N}{N\,5^N}$

Uji rasio: $\frac{|3x-2|}{5} < 1 \iff |3x-2| < 5 \iff -1 < x < \frac{7}{3}$. Ujung:

- $x = -1$: $3x - 2 = -5$, deret $\sum \frac{(-5)^n}{n5^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$, konvergen.
- $x = \frac{7}{3}$: $3x - 2 = 5$, deret $\sum \frac{1}{n}$, divergen.

Selang $[-1, \frac{7}{3})$. Perhatikan: pusatnya $x = \frac{2}{3}$ dan $R = \frac{5}{3}$ (bukan 5; faktor 3 pada $3x$ harus dikeluarkan: $|3x-2| = 3|x - \frac{2}{3}|$).

CONTOH 6 — FUNGSI BESSEL $J_0(X) = \sum \frac{(-1)^N X^{2N}}{2^{2N}(N!)^2}$

Rasio: $\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0$. Konvergen untuk semua x ($R = \infty$). Fungsi ini muncul pada getaran membran lingkaran (drum) dan penyebaran panas dalam silinder.

CONTOH 7 — KOEFISIEN BINOMIAL TENGAH, $\sum \binom{2N}{N} X^N$

Koefisien $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$; $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$, jadi $R = \frac{1}{4}$. Ujung $x = \frac{1}{4}$: suku $\binom{2n}{n}4^{-n} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (tidak menuju 0 secepat $1/n$); jumlahnya diverge karena $\sum n^{-1/2}$ divergen. Ujung $x = -\frac{1}{4}$: berganti tanda, $b_n = \binom{2n}{n}4^{-n}$ menurun (rasio $\frac{2n+1}{2n+2} < 1$) dan $\to 0$, jadi konvergen. Selang $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

CONTOH 8 — HANYA ADA PANGKAT GENAP: $\sum \dfrac{X^{2N}}{4^N}$

Ini geometri dengan rasio $\dfrac{x^2}{4}$: konvergen bila $x^2 < 4$, yaitu $|x| < 2$. Ujung $x = \pm 2$: suku $= 1$, divergen. Selang $(-2, 2)$, $R = 2$. (Uji rasio pada koefisien saja salah karena banyak koefisien nol; gunakan uji rasio pada *suku*.)

5. Turunan dan integral deret pangkat

TEOREMA (DIFERENSIASI DAN INTEGRASI SUKU DEMI SUKU)

Jika $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$ mempunyai radius $R > 0$, maka f terdiferensialkan pada $(a - R, a + R)$, dan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \qquad \int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Kedua deret ini mempunyai radius kekonvergenan yang *sama* dengan R (selang di titik ujung boleh berubah).

Artinya deret pangkat boleh diturunkan dan diintegralkan seperti polinomial, tetapi hanya di dalam selang $|x - a| < R$.

CONTOH 9 — TURUNAN DERET GEOMETRI

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pada $|x| < 1$. Turunkan: $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$. Ujung $x = \pm 1$ kini divergen (suku tidak menuju 0), jadi selang tetap $(-1, 1)$.

CONTOH 10 — TURUNAN E^X

Misalkan $f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ (Contoh 3). $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x)$. Jadi $f' = f$ dan $f(0) = 1$, maka $f(x) = e^x$. Ini penjelasan mengapa deret itu mewakili fungsi eksponensial.

CONTOH 11 — MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN DERET

Cari deret pangkat solusi $y'' = -y, y(0) = 0, y'(0) = 1$. Tulis $y = \sum c_n x^n$; $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$. Menyamakan koefisien x^n: $(n+2)(n+1)c_{n+2} = -c_n$. Dari $y(0) = 0$: $c_0 = 0$; $y'(0) = 1$: $c_1 = 1$. Maka $c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{6}, c_5 = \frac{1}{120}, \ldots$ yaitu $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x$.

6. Kesalahan umum

- Lupa memeriksa titik ujung selang.
- Salah mengira radius pada deret seperti $\sum (3x-2)^n$: ubah ke bentuk $|x - a| < R$.
- Memakai rasio koefisien bila ada koefisien nol; pakai rasio suku lengkap.
- Menganggap selang turunan sama persis dengan selang fungsi (titik ujung bisa berubah).

7. Ringkasan

- Deret pangkat: $\sum c_n (x-a)^n$; selang kekonvergenannya berpusat di a dengan radius $R \in [0, \infty]$.
- Hitung R dengan uji rasio/akar; periksa ujung dengan uji lain.
- Boleh diturunkan dan diintegralkan suku demi suku dalam $|x - a| < R$.

Selanjutnya 11.9: menyatakan fungsi-fungsi sebagai deret pangkat.